

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

MARIA HELENA PASSOS MARQUES

**HORIZONTES E TERMODINÂMICA DE
BURACOS NEGROS ACOPLADOS À
ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR DE
EULER-HEISENBERG**

Poços de Caldas/MG
2019

MARIA HELENA PASSOS MARQUES

HORIZONTES E TERMODINÂMICA DE
BURACOS NEGROS ACOPLADOS À
ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR DE
EULER-HEISENBERG

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física de Partículas e Campos da Universidade Federal de Alfenas - Poços de Caldas.

Área de concentração: Teoria de Campos e Gravitação.

Orientador: Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo.

Poços de Caldas/MG
2019

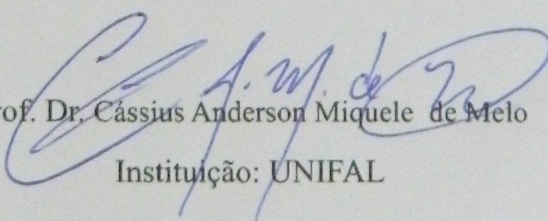
MARIA HELENA PASSOS MARQUES

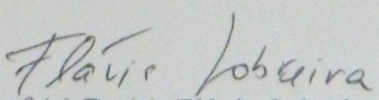
**HORIZONTES E TERMODINÂMICA DE
BURACOS NEGROS ACOPLADOS À
ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR DE
EULER-HEISENBERG**

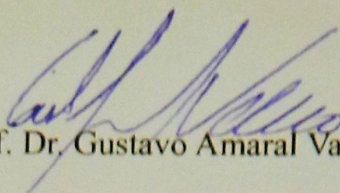
A banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física, pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas.

Área de Concentração: Teorias de Campo e Gravitação

Aprovada em: 11 de março de 2019.


Prof. Dr. Cassius Anderson Miquele de Melo
Instituição: UNIFAL


Prof (a) Dr (a). Flávia Sobreira
Instituição: UNICAMP



Prof. Dr. Gustavo Amaral Valdiviesso

Instituição: UNIFAL

Em memória de minha mãe, Eliane da Silva
Passos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, que me deu afeto e estrutura, ajudando a formar a pessoa que sou hoje. Agradeço especialmente à minha mãe. Graças a ela despertei gosto pelo conhecimento e tive os suportes necessários para completar mais esta etapa acadêmica e científica. Aos meus avós maternos que com muito zelo e amor me ensinaram valores importantes da vida. Aos meus tios, tias e primos que com muita alegria me apoiaram em todas as fases dos meus estudos. E ressalto ainda todo apoio do meu primo Adriano Nogueira, que me acolheu em sua casa durante grande parte deste curso. Agradeço também aos meus amigos que, mesmo longe na maior parte dos casos, deram-me suporte emocional e me ajudaram a encarar com mais leveza esta etapa.

Sou muito grata aos professores doutores Fernando Gardim, Enrique Collado e Alencar José de Faria, pois, com as aulas de vocês pude ampliar meus conhecimentos sobre os fenômenos físicos e a linguagem matemática. Agradeço também ao meu coordenador de estágio Prof. Dr. Laos Alexandre Hirano que, pelo exemplo e também por indicações de livros e conversas, ajudou-me a aprimorar meu fazer docente.

Sou inteiramente grata ao meu orientador, o Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo, por todo conhecimento transmitido de forma clara e motivante, tanto durante suas aulas como nas orientações de pesquisa, onde com tota calma e grande habilidade para isto, me conduziu pelo caminho da ciência.

Agradeço também aos funcionários da instituição e do Programa de Pós-Graduação em Física que sempre foram muito solícitos quando precisei. E ao Instituto de Ciência e Tecnologia (ICT) da Unifal - Poços de Caldas sou grata pela bolsa parcial que recebi no começo deste mestrado.

...em todo “estado de equilíbrio” existe um movimento estacionário.

Hendrik Antoon Lorentz [24]

RESUMO

Esta dissertação começa com um estudo bibliográfico sobre a invariância da teoria da eletrodinâmica de Maxwell pelas transformações de Lorentz. Em seguida ela discorre sobre as métricas de um buraco negro estático e primeiramente não carregado, como formulado por Schwarzschild. Na sequência é apresentada a solução para um buraco negro estático e carregado, como calculado por Reissner-Nordström. A atenção é então voltada para a descrição do buraco negro estático e carregado acoplado à teoria não-linear da eletrodinâmica de Euler-Heisenberg, e para a descrição deste objeto é usada a termodinâmica de buracos negros, assim como formulada por Jacob Bekenstein e Stephen Hawking. Por fim são calculados os raios dos horizontes deste buraco negro em relação a uma razão carga/massa do sistema e então são analisadas as inclinações dos cones de luz em torno da razão carga/massa que faz ambos os horizontes deste buraco negro, interno e externo, terem o mesmo valor de raio.

Palavras-chave: Eletrodinâmica Não-Linear. Buracos Negros. Lagrangeana de Euler-Heisenberg. Termodinâmica de Buracos Negros.

ABSTRACT

This dissertation begins with a bibliographic study about the invariance of Maxwell electrodynamics towards Lorentz transformations. After it is discussed about the metric of a not charged and static black hole, as first proposed by Schwarzschild. Following this, it is presented the solution to a charged and static black hole, as calculated by Reissner-Nordström. Then the attention is turned to the thermodynamic description of a static and charged black hole, governed by the non linear electrodynamics of Euler-Heisenberg theory, using the analogy with statistical thermodynamics as suggested by Jacob Bekenstein and Stephen Hawking. In the end, it is calculated the horizons' radii for different systems according to the ratio of charge/mass and then it is analysed the light cones in states where the horizons have nearly the same value.

Keywords: Non-Linear Electrodynamics. Black Holes. Euler-Heisenberg's Lagrangian. Black Holes' Thermodynamics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RELATIVIDADE ESPECIAL E A COVARIÂNCIA DA ELETRO- DINÂMICA DE MAXWELL	12
3	MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	18
4	MÉTRICA DE REISSNER-NORDSTRÖM	25
5	MÉTRICA DE EULER-HEISENBERG	32
5.1	Termodinâmica de Buracos Negros	32
5.1.1	Capacidade Térmica	34
5.1.2	Função de Massa	34
5.1.3	Termodinâmica de buracos negros para uma eletrodinâmica não-linear . . .	35
5.2	Função de massa da teoria de Euler-Heisenberg	36
5.3	Raios dos horizontes do buraco negro carregado de Euler-Heisenberg	38
5.4	Validade da teoria de perturbações	45
5.5	Termodinâmica no horizonte de eventos	47
5.6	Coordenadas de Eddington-Finkelstein	53
6	CONCLUSÃO	59
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A - Campo Elétrico até segunda ordem de correção .	64
	APÊNDICE B - Correção aos horizontes de Reissner-Nordström .	65

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação é sobre a termodinâmica de um buraco negro estático e carregado acoplado à eletrodinâmica não-linear da teoria de Euler-Heisenberg. Esta teoria não-linear do eletromagnetismo, representada pela lagrangeana efetiva de Euler-Heisenberg, é muito relevante na física principalmente quando a intensidade do campo é muito alta, pois nestas situações ela descreve a auto-interação entre os fótons [13]. Existem muitas pesquisas na área de eletrodinâmicas não-lineares e também na área desta teoria em conjunto com a cosmologia. Neste último caso, como exemplo, temos uma possível explicação para a aceleração do Universo [21].

O eletromagnetismo de Maxwell introduziu de forma revolucionária a ideia de campos na física. Esta nova interpretação possibilitou a abrangência deste conceito para outras áreas desta ciência, como foi o caso com a gravitação. A teoria da relatividade geral propõe exatamente isto, interpretar a gravitação como curvas no espaço-tempo devido a um sistema físico, cuja informação/composição determina geometricamente a métrica ao redor deste sistema.[1]

No início do trabalho é feito um estudo bibliográfico sobre a covariância do eletromagnetismo de Maxwell, assim como a importância desta invariância de forma para a descrição de fenômenos em espaço-tempo curvos. [2] Esta covariância é o motivo de usar uma linguagem matemática tensorial para descrever estes processos físicos. Começamos através deste capítulo sobre eletrodinâmica pois o objeto estudado é carregado e obedece a eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg.

Com base na teoria de campos de Einstein, ou teoria da relatividade geral, são solucionadas as métricas para o espaço-tempo de objetos compactos, estáticos, e primeiramente não carregado (métrica de Schwarzschild) [11] e depois, para um objeto compacto, estático e carregado, como feito por Reissner-Nordström. [1]

O teorema “no-hair” afirma que devido a força de maré, quando um objeto se aproxima do horizonte de eventos de um buraco negro, as únicas informações que restam sobre ele são informações sobre sua massa, carga e momento angular. Com base apenas nestas informações é que Bekenstein, Hawking e outros pesquisadores construíram a termodinâmica para buracos negros[20]. A partir da métrica e da função de massa do sistema encontramos os raios de horizonte para este buraco negro, fazendo-se possível uma interpretação deste sistema de acordo com a termodinâmica de buracos negros.

Para encontrar os raios de horizonte deste objeto estático e carregado são calculadas as correções da teoria clássica devido à eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg através da teoria perturbativa. Depois estas correções foram propagadas para a função de massa. Usamos as coordenadas de Eddington-Finkelstein e algumas expansões para analisar melhor os cones de luz deste sistema quando para um certa razão carga/massa seus

horizontes, interno e externo, possuem o mesmo valor de raio. Para calcular numericamente os valores das grandezas neste ponto de encontro usamos o software Mathematica, e através deste mesmo programa foram construídos os gráficos de nossos resultados, que mostram que com o aumento da razão carga/massa do sistema até o valor de $Q = 0.99954$, para um $\alpha = 10^{-1}$, o horizonte interno tem cada vez valores maiores de raio, e o horizonte externo diminui. Em um sistema onde a razão carga/massa é exatamente $Q = 0.99954$ ambos os horizontes externo e interno possuem o mesmo valor de raio. Para razões maiores que este valor de Q o buraco negro volta a apresentar novamente dois horizontes, e então horizonte externo volta a crescer até atingir seu caso extremal, e analisamos estes resultados até onde a teoria de perturbação ainda é válida.

A partir das expressões para os raios de horizonte calculamos a temperatura do buraco negro, ou seja, a aceleração gravitacional na superfície do horizonte externo desde buraco negro, e calculando também sua capacidade térmica. Notamos que as grandezas termodinâmicas para o buraco negro de Euler-Heisenberg não possuem diferença significativa dos resultados para os buracos negros de Reissner-Nordström.

2 RELATIVIDADE ESPECIAL E A COVARIÂNCIA DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

A teoria do eletromagnetismo, consolidada por Maxwell, estabelece um valor limite para a velocidade das ondas eletromagnéticas. Este valor fixo de velocidade abalou a generalização das transformações de Galilei e o absolutismo sobre a interpretação dos conceitos de espaço e tempo, dados por Newton. Em decorrência disto, viu-se necessário a formulação de um novo plano de fundo (transformações), onde as equações desta nova teoria, o eletromagnetismo, fossem invariantes. Lorentz e Poincaré chegaram à esta forma invariante, onde as equações de Maxwell e a equação de força de Lorentz são covariantes. Começamos através deste capítulo sobre eletrodinâmica pois o objeto estudado é carregado e obedece a eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg.

Essa invariância de forma implica que quantidades como ρ (densidade de carga), \mathbf{J} (fluxo elétrico), \mathbf{E} (campo elétrico) e \mathbf{B} (campo magnético) mudem de forma bem definida sob as transformações de Lorentz.

Considerando a força de Lorentz para uma partícula de carga q

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (1)$$

e sabendo que o momento linear \mathbf{p} se transforma como sendo a parte espacial de um quadri-vetor de energia momento

$$p^\alpha = (p^0, \mathbf{p}) = m (U_0, \mathbf{U}), \quad (2)$$

onde $p_0 = \frac{E}{c}$. A quadri-velocidade U^α representa a variação do quadri-vetor (x_0, \mathbf{x}) em relação ao tempo próprio τ , pois τ é invariante pelas transformações de Lorentz [2]. Assim temos:

$$U_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u c \quad (3)$$

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \mathbf{u}. \quad (4)$$

A seguir será derivado o momento linear \mathbf{p} em relação a este tempo próprio τ , que resultará num quadri-vetor força. Para relacionar o intervalo de tempo próprio ao intervalo de tempo ordenado será usado intervalo de eventos de Minkowski com assinatura $\eta(-1, 1, 1, 1)$ em função de uma razão de velocidades $\beta = \mathbf{u}/c$,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\mathbf{x}|^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2), \quad (5)$$

sendo $cdt = dx^0$. Então analisando apenas um breve instante do sistema em movimento, onde $dt' \equiv d\tau$ e $d\mathbf{x}' = 0$, percebe-se que tanto o intervalo de eventos $ds = cd\tau$, quanto o

intervalo de tempo próprio $d\tau$, são Lorentz invariantes

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \beta(t)^2} = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

ou ainda

$$\gamma(t) = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta(t)^2}}. \quad (6)$$

E agora derivando o momento \mathbf{p} pelo tempo próprio τ :

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \gamma(t) \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{q}{c} (c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \gamma(t) \quad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{q}{c} (U_0\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (9)$$

chega-se a expressão que representa a parte espacial do quadri-vetor momento. A componente temporal deste mesmo quadri-vetor refere-se a taxa de mudança de energia em relação ao tempo.

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{dp_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) \gamma(t) = \frac{q}{c} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E}. \quad (10)$$

Sendo as equações de força e de mudança de energia Lorentz covariantes, então, o lado direito das duas últimas equações, eq.(9) e eq.(10), devem formar juntos os componentes deste quadri-vetor força. Se as propriedades de transformação de dois dos três fatores destas equações (carga, quadri-velocidade e os campos eletromagnéticos) são conhecidas, então é possível determinar como o terceiro fator se transforma. [2]

Com a exigência de covariância da equação de força de Lorentz perante transformações do tipo Lorentz, e como já bem conhecida, a invariância da carga elétrica, isto nos leva a querer determinar as propriedades das transformações de Lorentz para o campo eletromagnético. Para isto, utilizamos as equações microscópicas de Maxwell. Primeiro as homogêneas

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

e em seguida, as não-homogêneas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

Reconhecendo o campo magnético como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, e sabendo que o divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo [6], concordando com a primeira equação homogênea de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

agora usando a equação para lei de indução de Faraday eq.(12) e fazendo tal substituição para o campo magnético

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Se o rotacional de um vetor é igual à zero, então existirá um potencial escalar Φ , cujo gradiente é igual à este vetor, [6]

$$-\nabla \Phi = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (17)$$

Reescrevendo a parte não-homogênea das equações de Maxwell eq.(13) e eq.(14) em termos deste novo quadri-vetor $A^\alpha = (\Phi, \mathbf{A})$,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho \quad (19)$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -4\pi\rho. \quad (20)$$

Conhecendo a condição de calibre de Lorenz no vácuo para a divergência de \mathbf{A}

$$A_{|\mu}^\mu = \partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (21)$$

que representada em notação vetorial ordinária tem a seguinte forma

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

Aplicando o calibre de Lorenz eq.(22) na primeira expressão não-homogênea da equação de Maxwell eq.(20), então

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -4\pi\rho \quad (23)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho, \quad (24)$$

fica fácil observar que esta equação pode ser reescrita de forma simplificada usando o operador D'Alembertiano, que é definido como

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \nabla^2. \quad (25)$$

Sendo $A^\alpha = (\Phi, \mathbf{A})$ um quadri-vetor eletromagnético, o uso do operador D'Alembertiano

junto com a equação eq.(270) nos fornece a parte temporal das equações do eletromagnetismo de Maxwell

$$\square \Phi = 4\pi\rho. \quad (26)$$

Se $c\rho \equiv J^0$, então de forma equivalente

$$\square \Phi = \frac{4\pi}{c} J^0. \quad (27)$$

Analisando agora a equação circular não-homogênea de Maxwell e Ampère eq.(14) para encontrar uma relação para a parte espacial do 4-vetor A^α

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (28)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (29)$$

Usando a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}, \quad (30)$$

então

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (31)$$

e de acordo com a condição de calibre de Lorentz eq.(22)

$$-\nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (32)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (33)$$

que se representado usando o operador D'Alembertiano tem a seguinte forma

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (34)$$

Assim as equações de onda junto com a condição de Lorenz são escritas na forma covariante

$$\square A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad (35)$$

sendo J^α uma quadri-corrente.

As equações eq.(27) e eq.(34) implicam que campos elétricos e magnéticos, com seis componentes ao todo, são os elementos de um tensor antissimétrico de rank dois $F^{\alpha\beta}$

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad (36)$$

tendo a seguinte forma matricial contravariante:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Com índices covariantes o tensor de força de campo pode ser reescrito como:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\beta} \quad (38)$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Para construir o tensor dual de força de campo $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ é usado a definição do tensor antissimétrico de rank-4 $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, conhecido como tensor de Levi-Civita

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{para } \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3 \text{ e qualquer permutação par;} \\ -1, & \text{para qualquer permutação ímpar;} \\ 0, & \text{se dois índices são iguais.} \end{cases}, \quad (40)$$

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

abaixo é mostrado como um elemento desta matriz é obtido \tilde{F}^{12} , de forma semelhante todos os outros elementos podem ser encontrados:

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2} \varepsilon^{12\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{120\delta} F_{0\delta} + \frac{1}{2} \varepsilon^{123\delta} F_{3\delta} \quad (42)$$

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2} \varepsilon^{1203} F_{03} + \frac{1}{2} \varepsilon^{1230} F_{30} \quad (43)$$

$$\tilde{F}^{12} = \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} + \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} = \varepsilon^{1203}F_{03} \quad (44)$$

$$\tilde{F}^{12} = +F_{03} = E_z. \quad (45)$$

Para finalizar este capítulo escreveremos as equações do eletromagnetismo de Maxwell na sua forma covariante em termos do tensor de Faraday $F^{\alpha\beta}$, do seu tensor de campo dual $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ e da quadri-corrente J^α . [2] Representando as equações não homogêneas de Maxwell eq.(13) e eq.(14)

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\beta, \quad (46)$$

e então suas equações homogêneas eq.(11) e eq.(12)

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0. \quad (47)$$

3 MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Neste capítulo introduzimos a descrição métrica para o espaço-tempo através do estudo do buraco negro estático de Schwarzschild, já que um dos nossos objetivos é encontrar a métrica que descreve o buraco negro carregado acoplado à teoria de Euler-Heisenberg.

As equações de campo de Einstein descrevem geometricamente o espaço-tempo de acordo com a distribuição de matéria e energia do sistema. Para poder escrever estas equações de campo para a gravitação foi preciso respeitar algumas condições, como o princípio da equivalência e o princípio de covariância geral. Em concordância com a última condição as equações de campo devem ser equações tensoriais, e no limite de campos fracos esta equação tensorial de campo deve equivaler à equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (48)$$

com ϕ representando o campo gravitacional e ρ , neste capítulo, representa a densidade de massa do sistema.

No vácuo a geometria do espaço-tempo deve ser nula, pois não há informação de massa nem energia. Pensando em um tensor para representar a geometria do espaço-tempo o mais conveniente é usar o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, pois por simetria $R_{\mu\nu} = 0$ terá dez equações e isto não implica em uma variedade nula no vácuo.

Usando um tensor $T_{\mu\nu}$ para descrever as equações que possuem dados sobre a massa e energia do sistema, pode-se escrever as equações de campo como [7]

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (49)$$

onde κ é uma constante. E o lado esquerdo descreve geometricamente a métrica do sistema.

O tensor $T_{\mu\nu}$ deve ser conservado devido ao princípio de conservação de massa e energia. E pelo princípio de covariância geral, esta conservação do tensor é expressa utilizando a derivada covariante

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (50)$$

onde os índices obedecem a convenção de soma de Einstein, e especificamente os índices gregos variam de 0 à 3. Desda forma o lado esquerdo da eq.(49) deve também se anular quando aplicada a derivada covariante à ele, $\nabla_\nu R^{\mu\nu} = 0$. Mas com base nas identidades de Bianchi contraídas por um par de métrica, $\nabla_\nu R^{\mu\nu} \neq 0$, como adiante

$$g^{\kappa\mu} (\nabla_\sigma R_{\kappa\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\kappa\lambda\nu\sigma} + \nabla_\nu R_{\kappa\lambda\sigma\mu}) = 0 \quad (51)$$

$$\nabla_\sigma R_{\lambda\nu} + \nabla_\mu R^\mu_{\lambda\nu\sigma} - \nabla_\nu R_{\lambda\sigma} = 0. \quad (52)$$

Contraindo λ com ν ,

$$g^{\lambda\nu} (\nabla_\sigma R_{\lambda\nu} + \nabla^\mu R_{\mu\lambda\nu\sigma} - \nabla_\nu R_{\lambda\sigma}) = 0 \quad (53)$$

$$\nabla_\sigma R - \nabla_\mu R^\mu{}_\sigma - \nabla_\nu R^\nu{}_\sigma = 0, \quad (54)$$

com os índices μ e ν iguais, então

$$\nabla_\sigma R = 2\nabla_\mu R^\mu{}_\sigma, \quad (55)$$

sendo o mesmo que

$$\nabla_\mu R = 2\nabla_\sigma R^\sigma{}_\mu \quad (56)$$

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu R = g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \nabla_\mu R \quad (57)$$

Assim

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \neq 0. \quad (58)$$

Como mostrado pelas identidades de Bianchi, o tensor de Ricci não se conserva de forma covariante, assim deverá existir um outro tensor que seja covariante $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} R, \quad (59)$$

este tensor é conhecido como tensor de Einstein.

Para descrever o campo gravitacional no vácuo é preciso encontrar um conjunto de equações diferenciais que façam uma analogia com as equações de Laplace para o campo gravitacional $\nabla^2 \phi = 0$, só que agora numa forma tensorial. O tensor de Riemman $R_{\alpha\beta\lambda\sigma}$ parece apropriado para isto, pois ele possui informações sobre a estrutura geométrica do espaço [1]. Sabendo que a segunda equação para o movimento de Newton deve corresponder a equação da geodésica para o movimento, dada uma mesma trajetória com movimento lento das partículas e sendo o campo gravitacional fraco, então a componente do tensor métrico g_{00} pode ser expressa por

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad (60)$$

e de forma equivalente

$$\phi = \frac{c^2}{2} (g_{00} - 1). \quad (61)$$

Aplicando o laplaciano à este termo para o campo gravitacional, isto levará a uma derivada segunda do tensor métrico com soma sobre os índices repetidos i (que variam de 1 à 3). Para um tensor covariante o análogo a soma de índices é a contração de seus termos. Aplicando isto ao tensor simétrico de Riemann, a única contração significativa para $R_{\alpha\beta\lambda\sigma} = 0$ é

$$R^\alpha{}_{\beta\alpha\sigma} = R_{\beta\sigma} = 0. \quad (62)$$

$R_{\beta\sigma}$ representa o tensor de Ricci. De acordo com Einstein esta é a equação que descreve o campo gravitacional no espaço livre. Escrita em termos das conexões, tem a seguinte forma

$$R_{\beta\delta} = \partial_\delta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + \Gamma_{\tau\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\tau - \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\tau = 0, \quad (63)$$

sendo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (64)$$

a definição para os símbolos de Christoffel de primeiro tipo.

Quando foi publicado o trabalho final de Einstein sobre a relatividade geral, acontecia a primeira guerra mundial. Trabalhando nesta guerra com lançamento de projéteis, um alemão chamado Karl Schwarzschild teve acesso a publicação sobre a relatividade geral e resolveu as equações de campo de Einstein para um sistema tão compacto que nem mesmo a luz conseguiria escapar. Na simplificação, proposta por Schwarzschild em 1916, as imposições feitas ao elemento de linha eram que o sistema fosse estático e esféricamente simétrico, e que estivesse localizado na origem de um referencial qualquer. Segundo a relatividade especial o elemento de linha deve ser invariante pelas transformações de Lorentz, e devido à imposição de simetria esférica previamente feita, o intervalo pode ser convenientemente expresso em coordenadas esféricas r , θ e ϕ

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (65)$$

É acrescentado ao elemento de linha os coeficientes g da métrica, para espaço-tempo curvos. E sendo o elemento de linha eq.(65) invariante a inversão de sinal do intervalo da coordenada temporal dx^0 em relação aos sinais dos intervalos das coordenadas espaciais $dx^i dx^k$, isto sugere o uso de coordenadas nas quais as componentes fora da diagonal da métrica tensorial g_{0i} sejam iguais a zero e o elemento de linha é escrito como

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \quad (66)$$

e g_{ik} é independente de x^0 , ou seja, o sistema é independente do tempo.

Como o sistema é esféricamente simétrico, e isto significa que ele não possui uma direção angular preferencial, logo seu elemento de linha é independente da mudança de sinal da coordenada $d\theta \rightarrow -d\theta$ e também de $d\phi \rightarrow -d\phi$. O tensor métrico, por sua vez, deve ser totalmente diagonal, não havendo assim termos como $drd\theta$, $d\theta d\phi$, etc.

Escrevendo o elemento de linha eq.(65) com o auxílio de funções (A,B,C e D) a serem determinadas com base nas condições de simetria já apresentadas [7], e sabendo que estas funções dependem apenas da coordenada radial r , temos

$$ds^2 = Ac^2 dt^2 - (Bdr^2 + Cr^2 d\theta^2 + Dr^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (67)$$

Como não acontecem variações em θ e ϕ , é conveniente supor que C e D sejam ambas uma única constante C, e então

$$ds^2 = Ac^2 dt^2 - Bdr^2 - C (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (68)$$

Escolhendo uma coordenada radial para simplificar o elemento de linha

$$\hat{\mathbf{r}} = \sqrt{C(r)}r \quad (69)$$

pois $\hat{\mathbf{r}}^2 = C(r)r^2$. Diferenciando esta nova coordenada $\hat{\mathbf{r}}$,

$$d\hat{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{C}}r \frac{dC}{dr} + \sqrt{C} \right) dr = \sqrt{C} \left(1 + \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} \right) dr. \quad (70)$$

Encontrando uma nova função \hat{B} que dependenda das funções B e C anteriores

$$Bdr^2 = \frac{B}{C} \left(1 + \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} \right)^{-2} d\hat{\mathbf{r}}^2 \equiv \hat{B}d\hat{\mathbf{r}}^2. \quad (71)$$

Pode-se agora escrever o elemento de linha com apenas duas funções desconhecias, A e B, dependentes de $\hat{\mathbf{r}}$.

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - Bd\hat{\mathbf{r}}^2 - \hat{\mathbf{r}}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (72)$$

Para maior clareza visual chamaremos apenas de r a nova coordenada radial $\hat{\mathbf{r}}$,

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - Bdr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (73)$$

Supondo que estas funções radiais A e B sejam exponenciais dependentes de r , $A(r) = e^{\nu(r)}$ e $B(r) = e^{\lambda(r)}$, então o elemento de linha eq.(73) pode ser reescrito como

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (74)$$

Esta métrica pode ser representada matricialmente da seguinte maneira [1]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (75)$$

ou então

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}, \quad (76)$$

$e^{\nu(r)}$ e $e^{\lambda(r)}$ são funções a serem determinadas a partir das equações de campo para o vácuo $R_{\mu\nu} = 0$ e de acordo com as especificidades do sistema.

Para resolver esta equação de campo calculamos os símbolos de Christoffel de primeiro tipo eq.(64) de acordo com os elementos da métrica. E então é verificado que as

conexões não nulas são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} & (77) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\lambda' \\
\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}\nu' = \Gamma_{01}^1 \\
\Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda} \\
\Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2 \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3 \\
\Gamma_{23}^3 &= \cot \theta = \Gamma_{32}^3.
\end{aligned}$$

Assumindo a condição de que o espaço-tempo deva ser assintoticamente plano no limite em que r tende à infinito, então

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\nu(r)} &= 1; & (78) \\
\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\lambda(r)} &= 1;
\end{aligned}$$

e que o espaço-tempo exterior à distribuição de massa seja vazio $R_{\mu\nu} = 0$. Usando a forma covariante da equação de campo de Einstein eq.(59) para a gravitação e limitados pelas condições de contorno, é encontrada as expressões para as funções $e^{\nu(r)}$ e $e^{\lambda(r)}$.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (79)$$

se

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (80)$$

o mesmo que

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = 0, \quad (81)$$

então a equação de campo eq.(79) pode ser reescrita como,

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R \quad (82)$$

$$0 = R - \frac{1}{2}4R \quad (83)$$

$$R = 0. \quad (84)$$

Sendo o escalar de Ricci nulo, resta agora determinar o termo para o tensor de Ricci. Este, por sua vez, pode ser definido em relação aos símbolos de Christoffel eq.(63)

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta. \quad (85)$$

Tendo os resultados das conexões não nulas eq.(77), pode ser calculado as soluções não triviais onde $R_{\mu\nu} = 0$:

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left(\frac{-\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) = 0, \quad (86)$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} = 0, \quad (87)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right) - 1 = 0, \quad (88)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta = 0. \quad (89)$$

Fazendo a seguinte operação $\frac{e^{\lambda(r)}}{e^{\nu(r)}} R_{00} + R_{11} = 0$, verifica-se que:

$$\begin{aligned} -\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda'}{r} &= 0, \\ \nu' + \lambda' &= 0. \end{aligned} \quad (90)$$

O resultado acima implica que $\nu + \lambda = cte$, e as condições de contorno assintóticas implicam que esta constante seja nula.

$$\nu + \lambda = 0, \quad (91)$$

$$\nu = -\lambda. \quad (92)$$

De acordo com a eq.(92) a expressão para R_{22} pode reescrita apenas em termos de ν , veja

$$R_{22} = e^\nu \left(1 + \frac{r\nu'}{2} + \frac{r\nu'}{2} \right) - 1 = 0 \quad (93)$$

$$e^\nu (1 + r\nu') = 1 \quad (94)$$

$$e^\nu + e^\nu r\nu' = 1 \quad (95)$$

$$\frac{d}{dr}(re^{\nu(r)}) = 1 \quad (96)$$

$$\int \frac{d}{dr}(re^{\nu(r)}) dr = \int dr \quad (97)$$

$$re^\nu = (r + M) \quad (98)$$

$$e^{\nu(r)} = \left(1 + \frac{M}{r}\right) \quad (99)$$

sendo M uma constante de integração. De acordo com a eq.(99) e com a eq.(92) encontra-se a expressão para a segunda função radial usada na métrica

$$e^{\lambda(r)} = \left(\frac{1}{1 + \frac{M}{r}}\right). \quad (100)$$

Usando estas soluções eq.(99) e eq.(100) nas equações de campo $R_{\mu\nu} = 0$, verifica-se que elas são realmente solução destas equações.

Finalmente podemos escrever o elemento de linha eq.(73) com as devidas expressões eq.(99) e eq.(100), funções apenas do raio, de acordo com as imposições previamente feitas ao sistema.

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 + \frac{M}{r}}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (101)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, é o ângulo sólido.

4 MÉTRICA DE REISSNER-NORDSTRÖM

Na relatividade geral a gravitação é explicada através de termos geométricos que representam a variedade espaço-tempo. O objetivo desta seção é analisar as equações de Maxwell em conjunto com as equações de Einstein, e entender o fenômeno geométrico que a teoria eletromagnética causa na variedade espaço-tempo. Para isto, será calculada a equação de campo de Einstein para um tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ [1] devido a um campo eletromagnético externo gerado por uma massa pontual carregada

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \left(F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (102)$$

Assumindo que tanto a métrica quanto o campo eletromagnético possuem simetria esférica e são independentes do tempo, este problema torna-se similar ao de Schwarzschild, exceto pelo fato de agora o tensor energia-momento possuir informação sobre o campo elétrico de uma carga pontual em vez de descrever somente uma esfera fluida.

Por causa da antissimetria do tensor de campo eletromagnético, o tensor energia-momento eletromagnético eq.(102) possui traço nulo.

$$T = T^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (103)$$

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\mu &= \frac{1}{c^2} \left(F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} g_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \\ T^\mu{}_\mu &= \frac{1}{c^2} \left(F_{\nu\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} 4 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \end{aligned}$$

sendo $\nu \equiv \beta$, então

$$T^\mu{}_\mu = \frac{1}{c^2} (-F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$$

$$T^\mu{}_\mu = 0. \quad (104)$$

Usando a equação geral de campo de Einstein eq.(49) e eq.(59)

$$G^{\alpha\gamma} = R^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} R = -\frac{8\pi G_H}{c^4} T^{\alpha\gamma}, \quad (105)$$

isto sendo $\kappa = -\frac{8\pi G_H}{c^4}$, onde G_H refere-se a constante gravitacional, $R \equiv g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$ e $T \equiv g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$, a equação de campo eq.(105) pode ser reescrita como

$$g_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} R = -\frac{8\pi G_H}{c^4} g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \quad (106)$$

$$R - \frac{1}{2} 4R = -\frac{8\pi G_H}{c^4} T \quad (107)$$

$$R = \frac{8\pi G_H}{c^4} T, \quad (108)$$

substituindo este resultado para o escalar de Ricci na equação de Einstein eq.(105), encontra-se uma expressão para o tensor de Ricci,

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{8\pi G_H}{c^4} T \right) = -\frac{8\pi G_H}{c^4} T^{\alpha\beta} \quad (109)$$

$$R^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G_H}{c^4} \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} T \right), \quad (110)$$

como visto, o traço do tensor energia-momento eletromagnético se anula eq.(104), logo o tensor de Ricci pode ser expresso como

$$R_{\mu\nu} = CT_{\mu\nu}, \quad (111)$$

sendo $\kappa \equiv C \equiv -\frac{8\pi G}{c^4}$ a constante que relaciona o tensor energia-momento do sistema com a métrica do mesmo.

Na seção sobre a solução de Schwarzschild foram encontradas as equações para o tensor de Ricci devido a uma métrica estática e com simetria esférica eq.(86), neste capítulo usaremos as mesmas equações por semelhança de simetria entre estes sistemas.

Da equação de campo reduzida percebe-se que o tensor de Faraday $F^{\alpha\beta}$ deve corresponder à um campo elétrico estático $E(r)$ e esfericamente simétrico em r . Para uma melhor visualização, o tensor de Faraday $F^{\alpha\beta}$ será reescrito em coordenadas esféricas, e por esta simetria, seus elementos devem ser representados apenas em função da coordenada r .

De acordo com as equações de Maxwell e com a condição de contorno que estabelece como estático o campo elétrico, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (112)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (113)$$

concluí-se então, com base do Teorma de Helmholtz [6], que o campo magnético é um vetor nulo, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Em decorrência disto, o tensor de Faraday pode ser representado apenas pelo campo elétrico em função da variável r

$$F^{\alpha\beta} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Sendo conhecida a definição de derivada covariante para tensores e considerando o espaço-tempo plano de forma a anular os termos de conexão de Levi-Civita

$$\eta^{ab}{}_{|c} \equiv \partial_c \eta^{ab} + \Gamma^a{}_{cd} \eta^{db} + \Gamma^b{}_{cd} \eta^{ad} \quad (115)$$

$$\eta^{ab}{}_{|c} = \partial_c \eta^{ab}, \quad (116)$$

assim a derivada covariante reduz-se a mesma forma da derivada ordinária. Aplicando esta derivada covariante a densidade do tensor eletromagnético de modo a encontrar uma expressão para o campo elétrico $E(r)$,

$$(\mathcal{F}^{\alpha\beta})_{|\beta} = (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})_{|\beta} = 0. \quad (117)$$

Calculando primeiro o determinante da métrica pelo desenvolvimento de Laplace,

$$g = e^\nu \begin{vmatrix} -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = e^\nu (-e^\lambda) \begin{vmatrix} -r^2 & 0 \\ 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}$$

$$g = -e^{(\nu+\lambda)} r^4 \sin^2 \theta,$$

logo

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} r^2 \sin \theta. \quad (118)$$

$$(\mathcal{F}^{\alpha\beta})_{|\beta} = \left[e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} r^2 \sin \theta E \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{|\beta}, \quad (119)$$

nota-se que a única condição não trivial desta função matricial derivada em β é $(\mathcal{F}^{01})_{|1}$

$$(\mathcal{F}^{01})_{|1} = \left[-e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} r^2 \sin \theta E \right]_{|1} = 0. \quad (120)$$

Esta derivada se anula em r , isto significa que os termos dependentes de r são iguais a uma constante que chamaremos de q

$$q = -e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} r^2 E, \quad (121)$$

ou ainda

$$E = -e^{\frac{-(\nu+\lambda)}{2}} \frac{q}{r^2}. \quad (122)$$

Voltado às condições de contorno, quando $r \rightarrow \infty$ a geometria do espaço-tempo deve ser Euclidiana (plana), e assim, $\nu \rightarrow 0$ e $\lambda \rightarrow 0$. Então, para grandes valores de r , a constante q pode ser identificada como

$$q = \frac{-Q}{4\pi}, \quad (123)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (124)$$

resultado conhecido do campo elétrico de Maxwell.

Para resolver a equação simplificada de campo eq.(111) é necessário calcular o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ eq.(102), segundo a expressão para o campo elétrico encontrada eq.(122) e o tensor de Faraday eq.(114). Usando as métricas eq.(75) e eq.(76) podemos escrever o tensor de Maxwell-Faraday nas formas covariante, mistos e contravariante, respectivamente:

$$F^{\alpha\beta} = e^{\frac{-(\nu+\lambda)}{2}} \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Sendo

$$F^{\alpha}_{\beta} = F^{\beta}_{\alpha},$$

$$F^{\alpha}_{\beta} = e^{\frac{-(\nu+\lambda)}{2}} \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{\alpha}_{\beta} = e^{\frac{-(\nu+\lambda)}{2}} \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\nu(r)} & 0 & 0 \\ e^{\lambda(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{\alpha}_{\beta} = F^{\beta}_{\alpha} = \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{(\nu-\lambda)}{2}} & 0 & 0 \\ e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (126)$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{(\nu-\lambda)}{2}} & 0 & 0 \\ e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (127)$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} & 0 & 0 \\ e^{\frac{(\lambda+\nu)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{\alpha\beta} = e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} \frac{q}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (128)$$

Dado os tensores de campo de Faraday nas suas variadas formas, agora é calculado o tensor energia-momento gerado por este campo eq.(102)

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \left(F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\tau} + \frac{1}{4} g_{\mu\tau} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (129)$$

Calculando primeiro apenas $F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\tau}$:

$$F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\tau} = -\frac{q^2}{r^4} e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} \begin{pmatrix} -e^{\frac{(\nu-\lambda)}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{(\lambda-\nu)}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

$$F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\tau} = \frac{q^2}{r^4} \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (131)$$

Cálculo do segundo termo de $T_{\mu\nu}$. Conhecendo sobre a contração de índices para o cálculo do traço do tensor F^{β}_{β}

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} F^{\alpha\beta} = A^{\beta}_{\beta} \quad (132)$$

e que

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{q^2}{r^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$F^{\beta}_{\beta} = -\frac{2q^2}{r^4}.$$

E assim

$$\frac{1}{4} g_{\mu\tau} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\frac{q^2}{2r^4} g_{\mu\tau}.$$

Juntando os resultados acima no tensor energia-momento eq.(102), temos que

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{q^2}{2r^4} \left[\begin{pmatrix} 2e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \right], \quad (133)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{q^2}{2c^2r^4} \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Com esta expressão matricial para o tensor energia-momento eletromagnético em conjunto com os resultados obtidos para os tensores de Ricci, é possível calcular a equação simplificada de campo de Einstein eq.(111), e então determinar quem são as funções $e^{\nu(r)}$ e $e^{\lambda(r)}$, utilizadas genericamente na métrica.

$$R_{\mu\nu} = CT_{\mu\nu} \quad (135)$$

$$R_{00} = e^{(\nu-\lambda)} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} \frac{q^2}{2c^2r^4} e^\nu, \quad (136)$$

$$R_{00} = e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) = \frac{-4\pi Gq^2}{c^6r^4}, \quad (137)$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{q^2}{2c^2r^4} e^\lambda, \quad (138)$$

$$R_{11} = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) = \frac{4\pi Gq^2}{c^6r^4}, \quad (139)$$

$$R_{22} = \left(1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} - 1 = \frac{-8\pi G}{c^4} \frac{q^2}{2c^2r^4} r^2, \quad (140)$$

$$R_{22} = 1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} = e^\lambda \left(1 - \frac{4\pi Gq^2}{c^6r^2} \right) \quad (141)$$

Relacionando R_{00} com R_{11} , assim como feito anteriormente para a métrica de Schwarzschild, temos

$$-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} = -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r}, \quad (142)$$

logo

$$-\lambda' = \nu', \quad (143)$$

ou ainda, $\lambda' + \nu' = 0$, sugerindo que $\lambda + \nu = cte$. De acordo com uma das condições de contorno, quando $r \rightarrow \infty$, as funções ν e λ vão à zero. E então

$$\lambda = -\nu, \quad (144)$$

satisfaz esta condição.

Usando o tensor de Ricci R_{22} e a relação entre as funções ν e λ estabelecida acima,

$$1 - \frac{r\lambda'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} = e^\lambda \left(1 - \frac{4\pi G_H q^2}{c^6 r^2} \right), \quad (145)$$

$$(1 - r\lambda') e^{-\lambda} = \frac{Cq^2}{2c^2 r^2} + 1,$$

sendo $C = -\frac{8\pi G_H}{c^4}$. E

$$(1 + r\nu') e^\nu = \frac{Cq^2}{2c^2 r^2} + 1 \quad (146)$$

Sabendo que $\frac{d}{dr}(re^\nu) = e^\nu + r\nu' e^\nu = e^\nu(1 + r\nu')$, então a eq.(146) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dr}(re^\nu) = \frac{Cq^2}{2c^2 r^2} + 1, \quad (147)$$

$$\int \frac{d}{dr}(re^\nu) dr = \int dr + \frac{Cq^2}{2c^2} \int r^{-2} dr \quad (148)$$

$$re^\nu = r + \frac{Cq^2}{2c^2}(-r^{-1}) - 2m, \quad (149)$$

sendo $2m$ a constante de integração. Então

$$e^\nu = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{Cq^2}{2c^2 r^2}. \quad (150)$$

Agora podemos escrever o elemento de linha assim como feito por Reissner e Nordström,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{Cq^2}{2c^2 r^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{Cq^2}{2c^2 r^2} \right)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (151)$$

Como esperado, esta métrica descreve um objeto parecido com o de Schwarzschild, pelo fato de ela também ser estática e ter simetria esférica, porém esta métrica possui a função q que representa a carga do sistema.

5 MÉTRICA DE EULER-HEISENBERG

James Clerk Maxwell sintetizou os conhecimentos experimentais e teóricos para a física do eletromagnetismo no final do século XIX, e, desde então muitas outras teorias foram propostas complementando a de Maxwell para casos em que o campo elétrico é muito intenso. Com as investigações em física moderna estas novas formulações ganharam ainda mais força. Um exemplo é a teoria de Born-Infeld [22]. Neste trabalho nos dedicamos ao estudo dos efeitos da eletrodinâmica não linear da teoria de Euler-Heisenberg [13, 15], uma vez que esta teoria é conhecida como sendo uma ação efetiva para a eletrodinâmica quântica, ou seja, ela é uma teoria determinística que descreve bem alguns fenômenos quânticos do eletromagnetismo.

Para estudar esta lagrangeana efetiva começamos escrevendo-a em termos de seus invariantes F e G , assim como feito por Schwinger [14], conforme uma eletrodinâmica não-linear invariante por paridade, [21]

$$\mathcal{L}(F, G^2) \simeq F + \frac{1}{2}a_+F^2 + \frac{1}{2}a_-G^2 + \mathcal{O}(3), \quad (152)$$

onde a_+ e a_- são as correções de acoplamento dos termos de correção não-lineares. E os invariantes são dados por

$$F \equiv -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (153)$$

e

$$G \equiv -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (154)$$

Como explicado no Capítulo - 2, $F_{\mu\nu}$ refere-se ao tensor de campo eletromagnético e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o seu dual. Sendo o sistema estático e com simetria esférica, as únicas componentes não nulas do tensor eletromagnético são, $F_{01} = -F_{10} = -E(r)$, e por isto o segundo invariante desta teoria não linear será nulo $G = 0$. Reescrevemos a lagrangeana eq.(152) em termos apenas do invariante F ,

$$\mathcal{L}(F) \simeq F + \frac{1}{2}a_+F^2 + \mathcal{O}(3). \quad (155)$$

Usando as informações desta lagrangeana será encontrado o campo elétrico e então a função de massa limitada ao horizonte de eventos deste sistema e, finalmente será interpretada sua relação com a termodinâmica de buracos negros.

5.1 Termodinâmica de Buracos Negros

O colapso de grande quantidade de matéria em uma pequena região já havia sido imaginado antes mesmo da teoria da relatividade geral ser formulada por Einstein [23]. Esta ideia de colapso/buraco negro teve como base a lei da gravitação de Newton, em

que todos os corpos que possuem massa atraem uns aos outros [4]. Mas somente após a elaboração da teoria física sobre o espaço-tempo de Einstein é que Schwarzschild, com as equações de campo de Einstein em mãos, resolveu-as para o caso em que a força gravitacional de um objeto é tão intensa que nem mesmo a luz consegue escapar de seu campo gravitacional. Hoje em dia estes objetos são conhecidos como buracos negros. Outras métricas para sistemas similares à este foram solucionadas, como é o caso da solução de Reissner-Nordström já apresentada neste trabalho, além da métrica de Kerr-Newman, para objetos que apresentam momento angular [5]. Uma grande questão é que estas métricas descrevem o espaço-tempo apenas do lado de “fora” do horizonte de eventos dos buracos negros, e o que acontece “dentro” deles ainda é muito pouco conhecido.

Foi estudando buracos negros que Jacob Bekenstein [16] percebeu relações interessantes entre os processos físicos destes objetos e a termodinâmica. Ao afirmar que a área de um buraco negro sempre aumenta ou permanece constante independente dos processos físicos que ele sofra, Bekenstein notou uma relação entre a área A destes objetos com a definição de entropia \mathcal{S} na termodinâmica estatística, e dois anos depois esta relação foi confirmada também por Stephen Hawking através da teoria quântica de campos

$$\mathcal{S} = \frac{A}{4} = \pi r^2, \quad (156)$$

fazendo desta ideia mais tarde, a Segunda Lei da Termodinâmica de Buracos Negros.

Trabalhando junto com Bardeen e Carter, Hawking terminou de elaborar estas leis que estabelecem a mecânica dos buracos negros [20]. A Lei Zero nos diz que para tais objetos estacionários a gravidade superficial κ é a mesma em qualquer ponto sobre o horizonte de eventos, fazendo a correspondência entre os conceitos de temperatura de um corpo em equilíbrio termodinâmico e a aceleração gravitacional no horizonte de eventos do buraco negro. Desde modo a temperatura de buracos negros é definida como

$$T_\kappa \equiv \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{g'_{00}(r)}{4\pi}. \quad (157)$$

Sendo κ a aceleração gravitacional em cima do horizonte de eventos. A temperatura dos buracos negros também pode ser expressa através da derivada da componente temporal da métrica $g'_{00}(r)$ do objeto em estudo.

Nas proximidades do horizonte de eventos a diferença gravitacional entre dois pontos de um mesmo corpo é tão extrema que este objeto se desintegra completamente. Este fenômeno faz com que as únicas informações restantes sobre este objeto, quando ele ultrapassar o horizonte de eventos, estejam relacionadas apenas à sua carga, massa e momento angular. A afirmação exposta acima é conhecida como teorema do "no-hair".

O teorema "no-hair" nos dá informações sobre a massa, carga e momento angular do objeto estudado, que, junto com conhecimentos sobre a área do seu horizonte de eventos e a aceleração gravitacional em sua superfície, constroem a Primeira Lei para Buracos

Negros, para processos quasi-estacionários,

$$d\mathcal{M} = \frac{\kappa}{8\pi G_N} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (158)$$

Além desta semelhança de formulação com a primeira lei da termodinâmica, a Terceira Lei Termodinâmica para Buracos Negros estabelece que não é possível reduzir a gravidade superficial κ à zero por um processo físico em um tempo finito. Isto corrobora mais uma vez com a analogia entre o conceito de temperatura na termodinâmica estatística e o conceito de aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos.

5.1.1 Capacidade Térmica

Na termodinâmica convencional a definição de capacidade térmica é dada em relação a variação da taxa de calor absorvido ΔQ com a variação da temperatura ΔT , isto levando também em conta como esta variação de temperatura ocorre. [10] Além disto, características próprias do sistema definem sua capacidade térmica

$$\Delta Q = C \Delta T.$$

Para a termodinâmica de buracos negros a “capacidade térmica” representa a expressão que relaciona a taxa de mudança na área do buraco negro $\Delta \mathcal{S}$ com a taxa de mudança da aceleração gravitacional ΔT_κ na superfície de seu horizonte de eventos. A capacidade térmica para buracos negros é expressa da seguinte forma,

$$C = T_\kappa \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T_\kappa} \right), \quad (159)$$

ou então

$$C = T_\kappa \frac{\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}}{\frac{\partial T_\kappa}{\partial r}}, \quad (160)$$

onde r representa o raio de horizonte externo do buraco negro.

5.1.2 Função de Massa

A função de massa $M(r)$ expressa a integral de toda energia limitada a uma determinada região r à ∞ . [17, 18]

$$\int_0^r \rho_e(r) r^2 dr = m - \int_r^\infty \rho_e(r) r^2 dr = m - M(r), \quad (161)$$

sendo que ρ_e é a densidade de energia dada pela componente T_{00} do tensor energia-momento e

$$m = \int_0^\infty \rho_e(r) r^2 dr, \quad (162)$$

sendo m a massa gravitacional do sistema.

No estudo de buracos negros interessa saber sobre esta função limitada ao horizonte de eventos. Por isto igualamos a parte temporal da métrica à zero $g_{00} = 0$, sendo esta a definição de horizonte de um buraco negro [7]. Lembrando que para um geodésica radial $\frac{cdt}{dr} = \frac{1}{g_{00}}$ e assim o anulamento de g_{00} define o horizonte.

De acordo com a função de massa eq.(161), temos que

$$M'(r) = r^2 \rho_e, \quad (163)$$

onde ρ_e representa a densidade de massa/energia do sistema e pode ser obtida através de informações sobre sua langrangeana ou sobre seu tensor energia-momento. Para eletrodinâmicas não-lineares contendo apenas F, temos [12]

$$\rho_e = -\mathcal{L}_F E^2 + \mathcal{L}. \quad (164)$$

Usando estas relações é possível representar o raio do horizonte de eventos em função das componentes constituintes do buraco negro, aquelas apresentadas pelo teorema "no-hair", ou seja, massa, carga e momento angular.

5.1.3 Termodinâmica de buracos negros para uma eletrodinâmica não-linear

Pela definição da eq.(161) temos que a relação entre a métrica e a função de massa é dada por [17]:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{1}{r} M(r). \quad (165)$$

Para encontrar a função de massa limitada ao horizonte externo r_+^{NL} igualamos a parte temporal da métrica a zero, [18]

$$g_{00}(r_+^{NL}) = 1 - \frac{2m}{r_+^{NL}} + \frac{1}{r_+^{NL}} M(r_+^{NL}) = 0, \quad (166)$$

$$r_+^{NL} = 2m - M(r_+^{NL}), \quad (167)$$

ou então

$$M(r_+^{NL}) = 2m - r_+^{NL}, \quad (168)$$

esta é a relação entre a função de massa e o horizonte externo para um buraco negro.

Segundo a mecânica de buracos negros, a temperatura de Hawking eq.(157) é diretamente proporcional à derivada da métrica eq.(165) em cima do horizonte de eventos

$$g'_{00}(r_+^{NL}) = \frac{2m}{(r_+^{NL})^2} - \frac{M(r_+^{NL})}{(r_+^{NL})^2} + \frac{M'(r_+^{NL})}{r_+^{NL}}, \quad (169)$$

substituindo a expressão para a função de massa $M(r_+^{NL})$ eq.(168), temos

$$g'_{00}(r_+^{NL}) = \frac{1}{r_+^{NL}} + \frac{M'(r_+^{NL})}{r_+^{NL}}. \quad (170)$$

Escrevendo a temperatura para buracos negros eq.(157) de acordo com a derivada da métrica no horizonte de eventos

$$T_\kappa = \frac{1}{4\pi r_+^{NL}}(1 + M'(r_+^{NL})), \quad (171)$$

podemos encontrar uma expressão para a capacidade térmica eq.(160) em função de r_+^{NL} e da função de massa $M(r_+^{NL})$, calculamos primeiro a derivada da entropia eq.(156) deste objeto compacto em relação a r_+^{NL}

$$\frac{d\mathcal{S}}{dr_+^{NL}} = 2\pi r_+^{NL}. \quad (172)$$

Para completar a expressão para a capacidade térmica eq.(160) falta derivar a temperatura de Hawking eq.(171) em relação à r_+^{NL}

$$\frac{dT_\kappa}{dr_+^{NL}} = -\frac{1 + M'(r_+^{NL})}{4\pi(r_+^{NL})^2} + \frac{M''(r_+^{NL})}{4\pi r_+^{NL}}. \quad (173)$$

Assim podemos expressar a capacidade térmica eq.(160) em função das derivadas da função de massa $M(r_+^{NL})$ da eletrodinâmica não-linear e do raio do horizonte de eventos r_+^{NL} ,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\frac{1+M'(r_+^{NL})}{4\pi r_+^{NL}} 2\pi r_+^{NL}}{\frac{-1-M'(r_+^{NL})+r_+^{NL}M''(r_+^{NL})}{4\pi(r_+^{NL})^2}} \\ C &= \frac{1 + M'(r_+^{NL})}{2} \cdot \frac{4\pi(r_+^{NL})^2}{r_+^{NL}M''(r_+^{NL}) - 1 - M'(r_+^{NL})} \\ C &= 2\pi(r_+^{NL})^2 \left(\frac{1 + M'(r_+^{NL})}{r_+^{NL}M''(r_+^{NL}) - M'(r_+^{NL}) - 1} \right). \end{aligned} \quad (174)$$

Observe que as expressões eq.(171) e eq.(174) servem para qualquer métrica da forma da equação eq.(165).

5.2 Função de massa da teoria de Euler-Heisenberg

Através da relação entre campo elétrico e a derivada da lagrangeana $\mathcal{L}_F \equiv \frac{d\mathcal{L}}{dF}$ calculamos a expressão para o campo elétrico corrigido devido a esta eletrodinâmica não-linear,

$$\mathcal{L}_F E = \frac{q}{r^2}, \quad (175)$$

como

$$\mathcal{L}_F = 1 + a_+ F, \quad (176)$$

e considerando $F = \frac{E^2}{2}$, então

$$\mathcal{L}_F = 1 + \frac{a_+ E^2}{2}. \quad (177)$$

Encontramos a equação cúbica para o campo elétrico,

$$E = \frac{q}{r^2} - \frac{a_+}{2} E^3, \quad (178)$$

De acordo com as equações eq.(175) e eq.(177), o campo elétrico da eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg pode ser expresso como,

$$E_n = \frac{q}{r^2} - \frac{a_+}{2} E_{n-1}^3, \quad (179)$$

sendo $E_0 = \frac{q}{r^2}$ e $E_n = 0$ para $n < 0$.

Abaixo é mostrada a correção de segunda ordem para o campo elétrico com termos limitados à ordem quadrática de a_+ , são estes termos que diferenciam esta eletrodinâmica da eletrodinâmica clássica de Maxwell. Os cálculos desta correção encontram-se no apêndice A desta dissertação,

$$E_2 \simeq \frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2r^6} + \frac{3a_+^2 q^5}{4r^{10}}. \quad (180)$$

A lagrangeana da teoria de Euler-Heisenberg pode ser usada para calcular a densidade de matéria deste sistema através da expressão dada pela equação eq.(164). Usaremos o campo elétrico com duas ordens de correção eq.(180) na expressão para a densidade de energia eletromagnética ρ_e eq.(164) para então calcular a função de massa eq.(161), como feito abaixo:

$$M(r) \equiv 2 \int r^2 (-\mathcal{L}_F E^2 + \mathcal{L}) dr, \quad (181)$$

substituindo a lagrangeana eq.(155) e sua derivada eq.(177)

$$M(r) = 2 \int r^2 \left[\left(-1 - \frac{a_+ E^2}{2} \right) E^2 + \frac{E^2}{2} + \frac{a_+ E^4}{8} \right] dr \quad (182)$$

$$M(r) = 2 \int \left(-r^2 E^2 - \frac{a_+ r^2 E^4}{2} + \frac{r^2 E^2}{2} + \frac{a_+ r^2 E^4}{8} \right) dr \quad (183)$$

$$M(r) = - \int (r^2 E^2 + \frac{3}{4} a_+ r^2 E^4) dr. \quad (184)$$

E de acordo com a segunda ordem de correção para o campo elétrico (cálculos apresentados também no apêndice A), a função de massa toma a seguinte forma

$$M(r) = - \int r^2 \left[\frac{q^2}{r^4} - \frac{a_+ q^4}{r^8} + \frac{7a_+^2 q^6}{4r^{12}} + \frac{3a_+}{4} \left(\frac{q^4}{r^8} - \frac{2a_+ q^6}{r^{12}} + \frac{9a_+^2 q^8}{2r^{16}} \right) \right] dr \quad (185)$$

$$M(r) = - \int \left(\frac{q^2}{r^2} - \frac{a_+ q^4}{4r^6} + \frac{a_+^2 q^6}{4r^{10}} \right) dr. \quad (186)$$

Resolvendo a integral acima encontra-se a função de massa para o sistema estudado

$$M(r) = \frac{q^2}{r} - \frac{a_+ q^4}{20r^5} + \frac{a_+^2 q^6}{36r^9}. \quad (187)$$

Usaremos este resultado na métrica do sistema para calcular os raios de horizonte deste buraco negro estático e carregado.

5.3 Raios dos horizontes do buraco negro carregado de Euler-Heisenberg

Os raios de horizonte de um buraco negro são determinados por sua métrica quando a parte temporal desta é igualada à zero, restringindo assim o intervalo de eventos apenas a valores negativos, de acordo com a assinatura adotada. Para entender porque horizontes são superfícies nulas, basta lembrar que uma geodésica radial nula é determinada pela equação $\frac{cdt}{dr} = \frac{1}{g_{00}}$. Portanto, sobre os horizontes, a inclinação dos cones de luz se torna infinita, pois o anulamento de g_{00} define a condição de red-shift infinito. Sendo a condição de horizonte dada por $g^{11} = 0$ e sabendo da relação $\nu(r) = -\lambda(r)$, então por consequência $g^{11} = g_{00}$ e assim podemos afirmar que a condição de red-shift infinito também se anula.

Resolvendo a equação $g_{00} = 0$, podem ser obtidos o raio positivo $r_+^{NL} = m\rho_1$ e o raio negativo $r_-^{NL} = m\rho_2$ para buracos negros carregados, eles podem ser chamados de forma adimensional e equivalente, de raio externo ρ_1 e raio interno ρ_2 . Além destes raios de horizonte existe também a singularidade, que é descrita quando $r^* = \rho^* = 0$.

Escrevendo a parte temporal da solução das equações de Einstein para o caso de um buraco negro carregado, e conhecendo a expressão para a função de massa eq.(187) encontrada a partir da lagrangeana da eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg, então,

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - \frac{a_+ q^4}{20r^6} + \frac{a_+^2 q^6}{36r^{10}}. \quad (188)$$

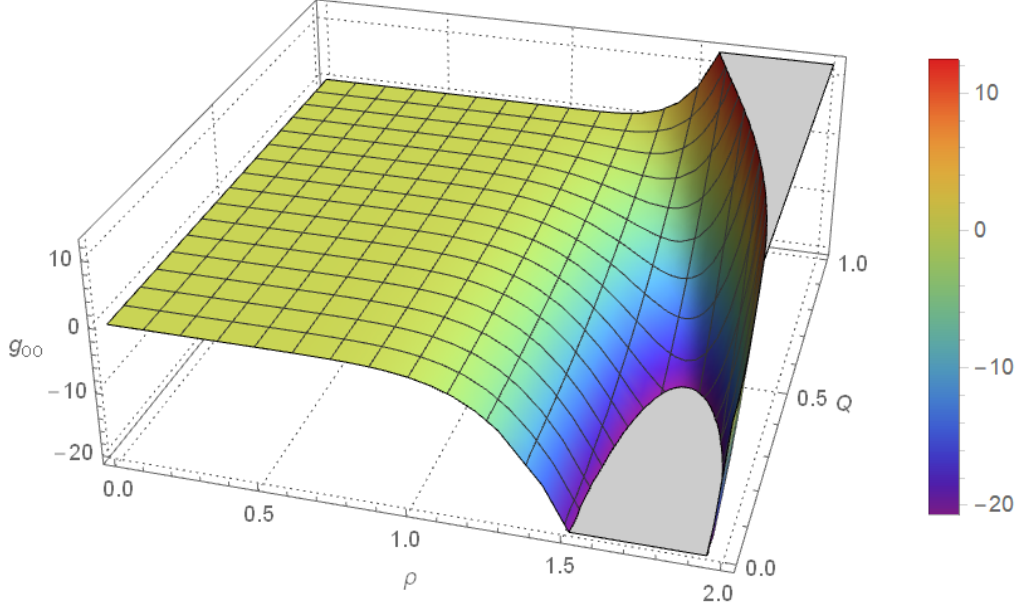
Chamando a razão carga/massa de $Q = \frac{q}{m}$ e $\alpha = \frac{a_+}{m^2}$, então podemos reescrever g_{00} em termos apenas de variáveis adimensionais, como

$$g_{00} = 1 - \frac{2}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2} - \frac{\alpha Q^4}{20\rho^6} + \frac{\alpha^2 Q^6}{36\rho^{10}}. \quad (189)$$

Os gráficos para g_{00} , representados na Figura - 1 e na Figura -2, sugerem que o buraco negro desta eletrodinâmica não-linear possui dois horizontes, e que eles devem ter o mesmo valor de raio para uma razão carga/massa próximo à razão Q para o caso extremal. Para encontrar uma expressão que relacione os raios destes horizontes aos componentes do sistema, fazendo $g_{00} = 0$,

$$1 - \frac{2}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2} - \frac{\alpha Q^4}{20\rho^6} + \frac{\alpha^2 Q^6}{36\rho^{10}} = 0, \quad (190)$$

Figura 1 – Representação gráfica da parte temporal da métrica de Euler-Heisenberg. Sugerindo a presença de dois horizontes para buracos negros de Euler-Heisenberg, dado um $\alpha = 10^{-1}$ constante.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{2}{\rho} - \frac{Q^2}{\rho^2} + \frac{\alpha Q^4}{20\rho^6} - \frac{\alpha^2 Q^6}{36\rho^{10}}, \\
 \rho^{10} &= 2\rho^9 - Q^2\rho^8 + \frac{\alpha Q^4\rho^4}{20} - \frac{\alpha^2 Q^6}{36}, \\
 \rho^{10} - 2\rho^9 + Q^2\rho^8 - \frac{\alpha Q^4\rho^4}{20} &= -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}, \\
 \rho^4 \left(\rho^6 - 2\rho^5 + Q^2\rho^4 - \frac{\alpha Q^4}{20} \right) &= -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}. \tag{191}
 \end{aligned}$$

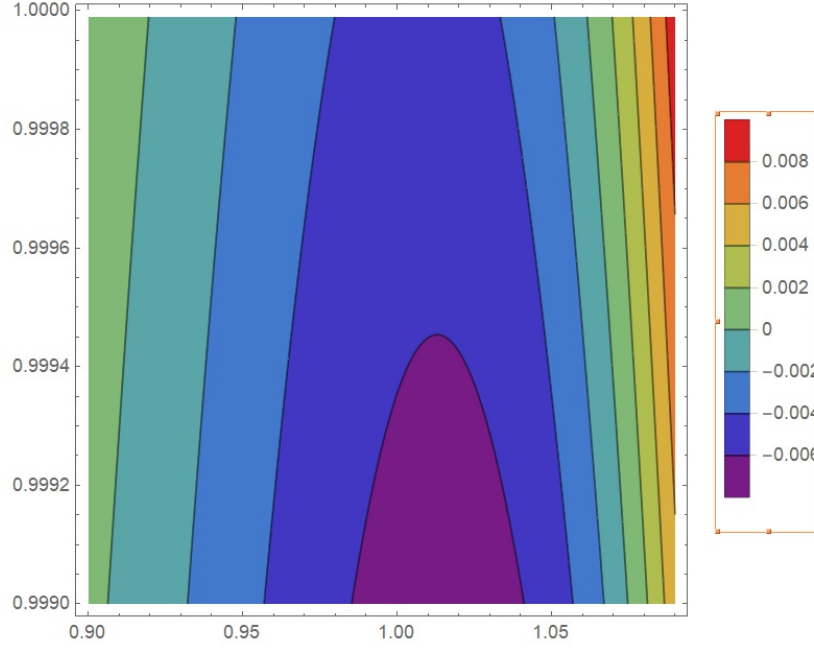
Usaremos a teoria perturbativa para encontrar as correções para os raios de Reissner-Nordström devido a eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg. Como $\alpha \ll 1$, conseqüentemente seu termo ao quadrado é ainda menor, e começamos a simplificação ao considerá-lo igual à zero, $\alpha^2 = 0$. Aqui percebemos a singularidade em $\rho^4 = \rho^* = 0$. Nesta aproximação, os horizontes devem ser dados por:

$$\begin{aligned}
 \rho^6 - 2\rho^5 + Q^2\rho^4 &= \frac{\alpha Q^4}{20}, \\
 \rho^4 (\rho^2 - 2\rho + Q^2) &= \frac{\alpha Q^4}{20}. \tag{192}
 \end{aligned}$$

De forma semelhante, considerando nulo agora o termo linear em α , percebe-se então, mais uma vez, a singularidade. E sobra ainda a equação de segundo grau abaixo,

$$\rho^2 - 2\rho + Q^2 = 0. \tag{193}$$

Figura 2 – Os horizontes do buraco negro de Euler-Heisenberg tendem a se encontrar próximo ao caso extremal, em $Q \simeq 1$. Gráfico feito com $\alpha = 10^{-1}$ constante.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Pelo teorema de Baskara encontra-se os raios dos horizontes externo e interno de Reissner-Nordström R_1 e R_2 ,

$$R_1 = 1 + \sqrt{1 - Q^2} = 1 + \omega \quad (194)$$

e

$$R_2 = 1 - \sqrt{1 - Q^2} = 1 - \omega, \quad (195)$$

onde $\omega = \sqrt{1 - (\frac{q}{m})^2}$.

Conforme o resultado de Baskara reescrevemos a expressão completa para o raio deste objeto carregado com as correções devido a teoria perturbativa da eletrodinâmica de Euler-Heisenberg eq.(191), da seguinte forma

$$\rho^4 \left[\rho^4 (\rho - R_1)(\rho - R_2) - \frac{\alpha Q^4}{20} \right] = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}. \quad (196)$$

Usaremos os raios de Reissner-Nordström R_1 e R_2 e a teoria perturbativa com correções de até segunda ordem para encontrar os raios de horizonte devido a teoria não-linear da eletrodinâmica de Euler-Heisenberg. Para o raio externo,

$$\rho_1 = R_1 + \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc}. \quad (197)$$

E para o raio interno,

$$\rho_2 = R_2 + \alpha \rho_{-c} + \alpha^2 \rho_{-cc}. \quad (198)$$

A partir da eq.(196) podemos calcular estas correções $\rho_{+c}, \rho_{+cc}, \rho_{-cc}$ e ρ_{-cc} . Estes cálculos são feitos no apêndice B deste trabalho, cujos resultados para o horizonte externo são:

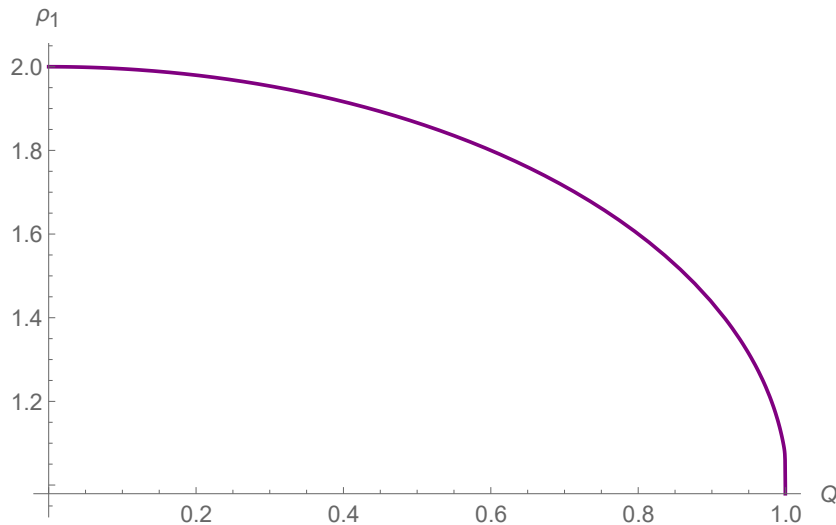
$$\rho_{+c} = \frac{Q^4}{40R_1^4\sqrt{1-Q^2}} \quad (199)$$

$$\rho_{+cc} = -\frac{Q^8}{4^2 \times 10^2 R_1^8 (1-Q^2)} \left(\frac{1}{2\sqrt{1-Q^2}} - \frac{4}{R_1} \right) - \frac{Q^6}{72R_1^8\sqrt{1-Q^2}}. \quad (200)$$

E a expressão completa para o raio externo de Euler-Heisenberg é dada por,

$$\rho_1 = R_1 + \alpha \frac{Q^4}{40R_1^4\sqrt{1-Q^2}} + \alpha^2 \left[\frac{Q^6}{72R_1^8\sqrt{1-Q^2}} + \frac{Q^8}{2^4 \times 10^2 R_1^8 (1-Q^2)} \left(\frac{1}{2\sqrt{1-Q^2}} - \frac{4}{R_1} \right) \right]. \quad (201)$$

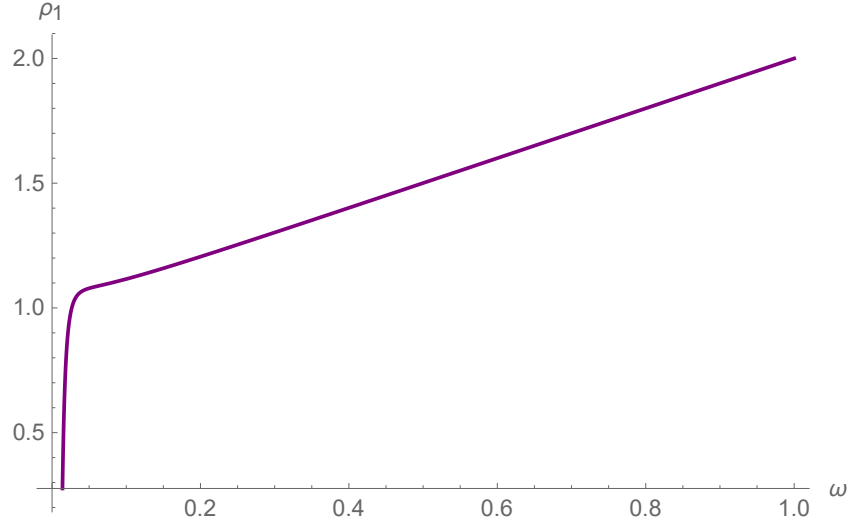
Figura 3 – O horizonte externo do buraco negro diminui quando a razão carga/massa Q do sistema é aumentada. Gráfico feito para um $\alpha = 10^{-1}$ constante.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

No gráfico da Figura - 3 está representada a função para o horizonte externo do buraco negro de Euler-Heisenberg em função da razão carga/massa do sistema Q . Através dele percebe-se que com o aumento da razão Q o raio externo do sistema diminui de tamanho e quando esta razão tende a 1 (caso do horizonte extremal de Reissner-Nordström) o raio externo adimensional decresce muito rapidamente, este comportamento pode ser melhor visualizado na Figura - 4, onde analisamos o horizonte externo deste buraco negro em relação à variável ω . Observando que só existe sentido físico para $Q \leq 1$, caso contrário surgirão números complexos nas expressões para os raios de Reissner-Nordström.

Figura 4 – O horizonte externo diminui drasticamente quando o sistema apresenta um $\omega \simeq 0$. Gráfico feito para $\alpha = 10^{-1}$ constante.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Usando novamente os raios de Reissner-Nordström eq.(194) e (195) e a teoria perturbativa com correções de até segunda ordem para encontrar agora o raio adimensional do horizonte interno deste buraco negro devido a mesma teoria não-linear da eletrodinâmica, encontramos (vide apêndice B):

$$\rho_{-c} = -\frac{Q^4}{40R_2^4\sqrt{1-Q^2}}. \quad (202)$$

$$\rho_{-cc} = \frac{Q^6}{72R_2^8\sqrt{1-Q^2}} + \frac{Q^8}{2^4 \times 10^2 R_2^8(1-Q^2)} \left(\frac{1}{2\sqrt{1-Q^2}} - \frac{4}{R_2} \right). \quad (203)$$

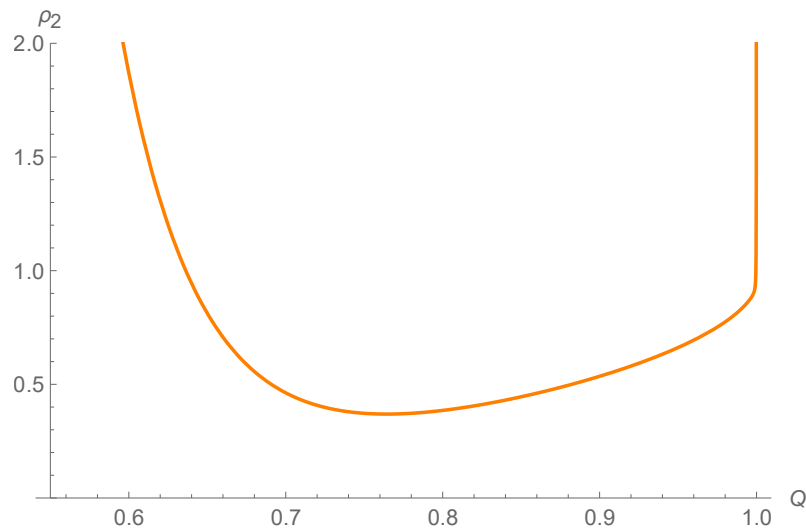
Escrevendo a expressão para o raio interno adimensional deste buraco negro com dois termos de correção,

$$\begin{aligned} \rho_2 = R_2 - \alpha \frac{Q^4}{40R_2^4\sqrt{1-Q^2}} + \alpha^2 \frac{Q^6}{72R_2^8\sqrt{1-Q^2}} + \\ + \alpha^2 \frac{Q^8}{2^4 \times 10^2 R_2^8(1-Q^2)} \left(\frac{1}{2\sqrt{1-Q^2}} - \frac{4}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (204)$$

No gráfico da Figura - 5 temos a curva para o horizonte interno em função da razão Q . Nele podemos perceber duas divergências, uma próxima ao caso extremal, assim como apresentado também pelo horizonte externo e uma outra divergência para pequenos valores de Q . Esta última divergência deve acontecer porque a teoria perturbativa perde a validade nesta região quando $\alpha = 10^{-1}$, como confirmaremos na seção seguinte.

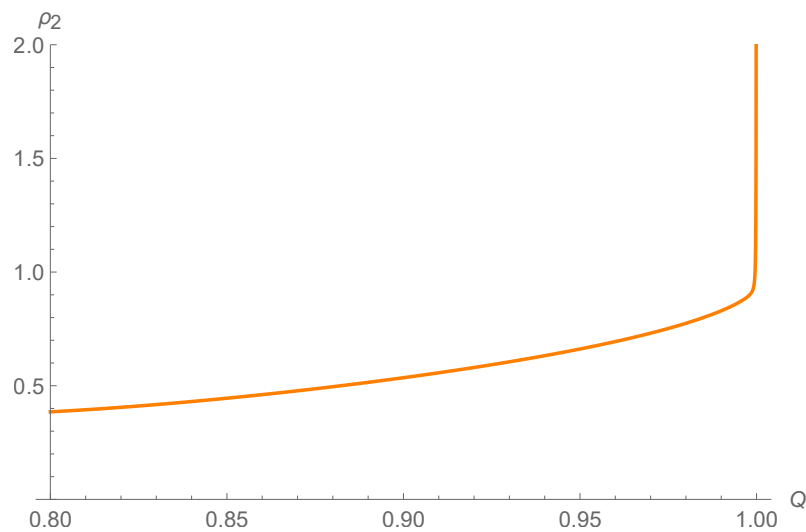
Na Figura - 6, vemos que o horizonte interno aumenta para sistemas onde a razão carga/massa é maior, este gráfico também sugere que o horizonte interno deve possuir o

Figura 5 – O horizonte interno para um $\alpha = 10^{-1}$ constante. A primeira divergência em $Q \simeq 0.6$ pode ser explicada pela perda de validade da teoria perturbativa nesta região.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Figura 6 – O horizonte interno cresce em sistemas em que a razão carga/massa Q fica cada vez maior. Aqui analisamos o intervalo onde $0.8 \leq Q \leq 1$, eliminando assim a primeira divergência do gráfico, sendo $\alpha = 10^{-1}$ constante.



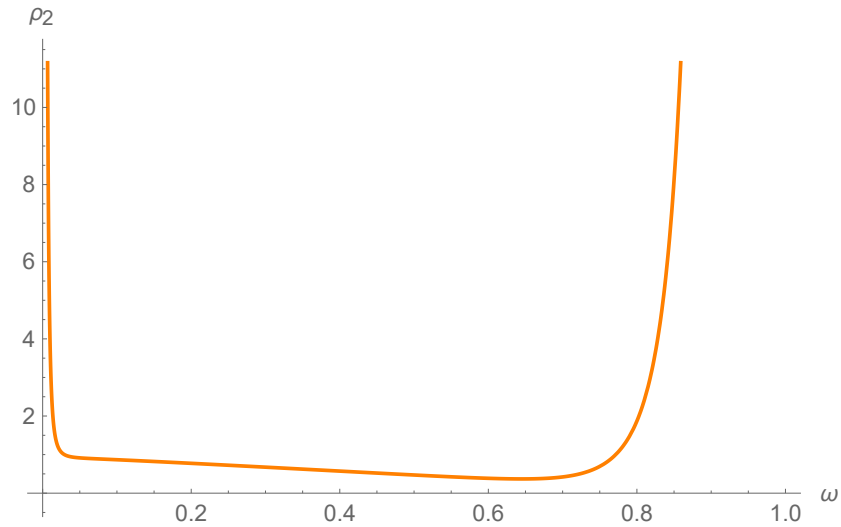
Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

mesmo valor que o horizonte externo para uma razão $Q \simeq 1$, próximo ao caso extremal de Reissner-Nordström. Na Figura - 8 é possível analisar melhor este comportamento.

Da mesma forma como feito para o horizonte externo, na Figura - 7 está o gráfico para o raio interno adimensional ρ_2 em função da variável ω , nele percebemos que o horizonte interno aumenta em sistemas que apresentam pequenos valores de ω .

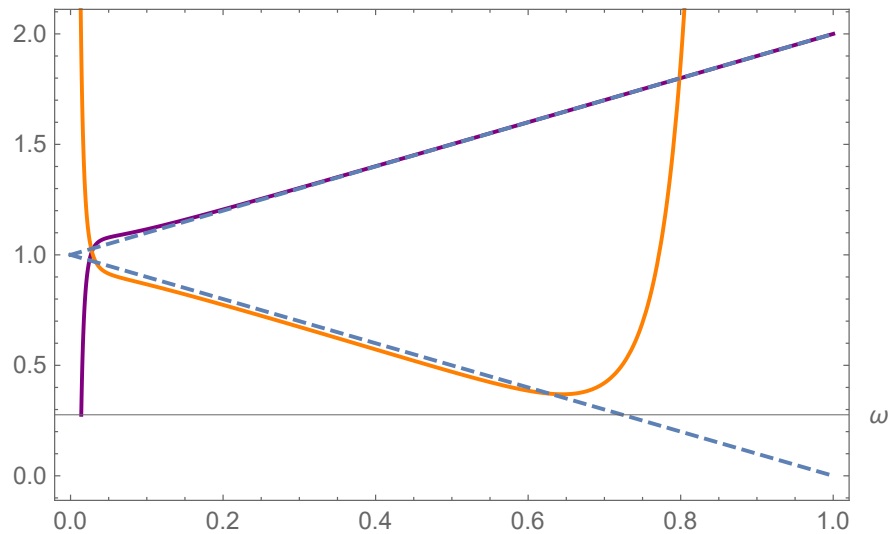
No gráfico da Figura - 8, vemos que para um certo valor um pouco menor que o caso extremal de Reissner-Nordström $Q = 1$, os raios interno e externo do buraco negro

Figura 7 – O horizonte interno cresce rapidamente para sistemas com pequenos valores de ω . Sendo $\alpha = 10^{-1}$ constante.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Figura 8 – Comportamento dos raios de horizonte externo (laranja) e interno (roxo) em relação à ω do sistema. Sendo $\alpha = 10^{-1}$ constante. As curvas em linha pontilhada e azuis representam os horizontes de Reissner-Nordström.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

da teoria de Euler-Heisenberg apresentam o mesmo valor de raio. As curvas em linha pontilhada representam os raios dos horizontes de Reissner-Nordström. Para interpretar melhor fisicamente este caso extremal de Euler-Heisenberg, em que seus horizontes possuem o mesmo valor de raio, construiremos as coordenadas de Eddington-Finkelstein para a métrica desta teoria, de modo a obter informações sobre a estrutura causal destes estados.

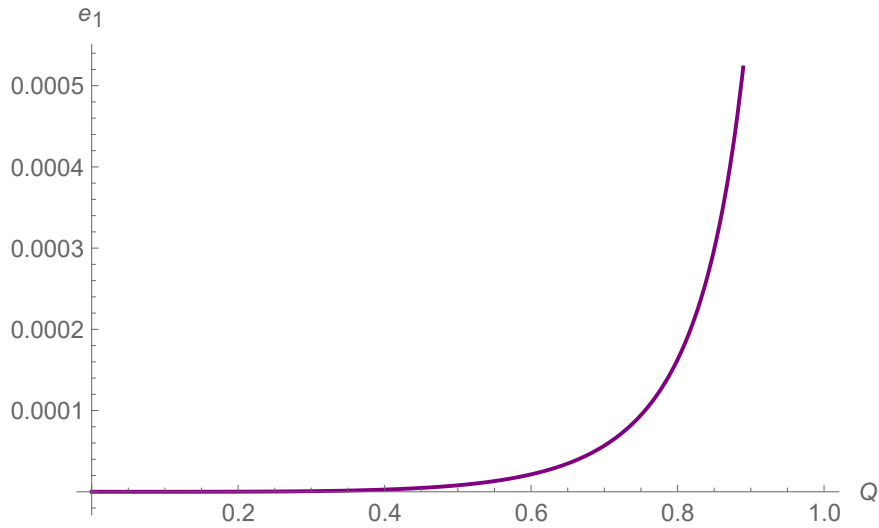
5.4 Validade da teoria de perturbações

Para analisarmos a região de validade da teoria perturbativa usada para encontrar os termos adicionais desta eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg, dividiremos os termos de correção de primeira e segunda ordem dos horizontes externo e interno pelos termos sem correção, ou termos de Reissner-Nordström. A seguir temos estes cálculos para o horizonte externo:

$$e_1(\alpha, Q) = \frac{\alpha Q^4}{40\rho(Q)^5\omega(Q)}, \quad (205)$$

$$e_2(\alpha, Q) = \frac{\alpha^2 (-Q^8) \left(\frac{4}{R_1} + \frac{1}{2\omega} \right)}{4^2 10^2 R_1^9 \omega^2} - \frac{\alpha^2 Q^6}{72 R_1^9 \omega} \quad (206)$$

Figura 9 – Validade da teoria perturbativa para a primeira correção do horizonte externo, com $\alpha = 10^{-1}$.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Quando igualadas a um, estas equações verificam a validade da teoria perturbativa para o horizonte externo deste buraco negro.

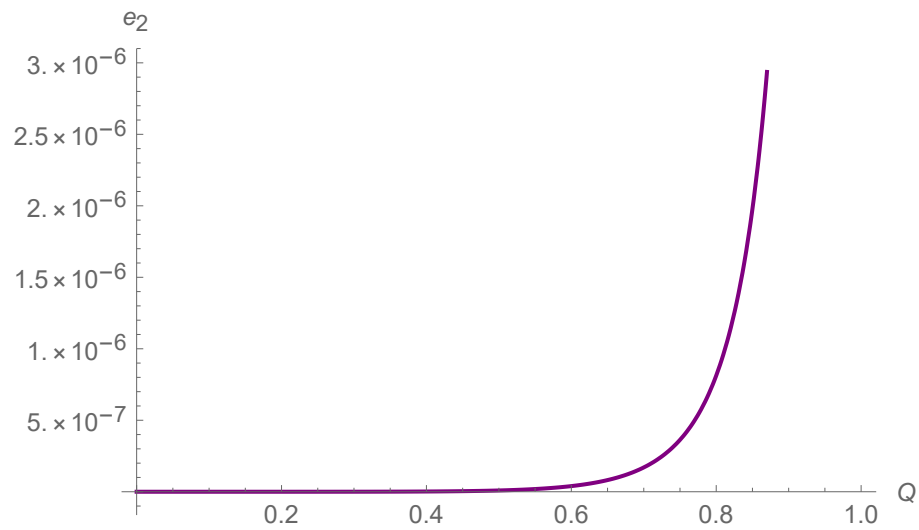
Agora é verificada a validade da teoria perturbativa para o horizonte interno. Da mesma forma como para o horizonte externo, fazendo $\alpha = 10^{-1}$. Verificamos primeiro apenas a primeira correção,

$$i_1(\alpha, Q) = -\frac{\alpha Q^4}{40R_2^5\omega}. \quad (207)$$

Agora analisamos a correção quadrática em α ,

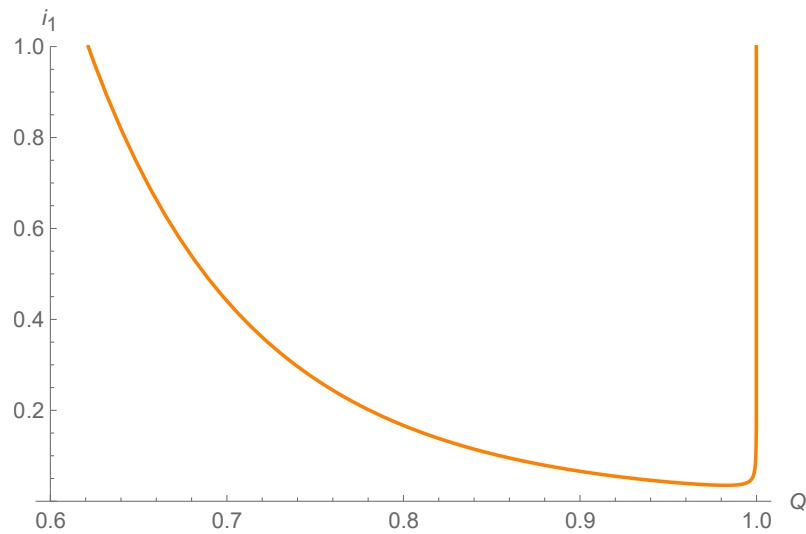
$$i_2(\alpha, Q) = \frac{\alpha^2 Q^6}{72R_2^9\omega} + \frac{\alpha^2}{R_2} \left(\frac{1}{2\omega} - \frac{4}{R_2} \right) \left(\frac{Q^4}{40R_2^4\omega} \right)^2 \quad (208)$$

Figura 10 – Validade da teoria perturbativa para a segunda correção do horizonte externo, com $\alpha = 10^{-1}$.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Figura 11 – Validade da teoria perturbativa para a primeira correção do horizonte interno, com $\alpha = 10^{-1}$.

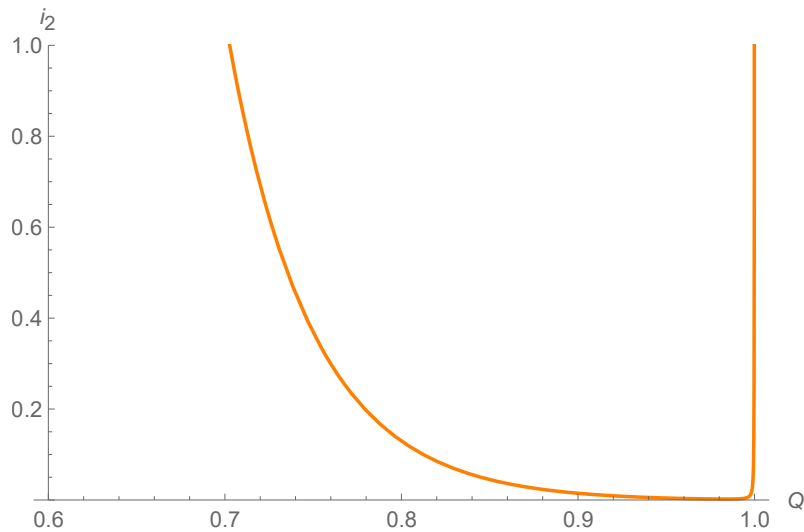


Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Através de uma solução numérica encontramos os pontos exatos onde esta teoria ainda é válida para um certo $\alpha = 10^{-1}$ arbitrário. Como as correções quadráticas são mais restritivas, igualamos $e_2 = 1$ e encontramos assim um valor de $Q = 0.999894$. Substituindo este valor de Q na expressão para o horizonte externo ρ_1 encontramos o ponto onde a teoria perturbativa deixa de valer para o horizonte externo, em $\rho_1 \leq 0.162073$.

De forma semelhante, encontramos a região do horizonte interno onde a teoria perturbativa é válida. De acordo com a Figura - 5 esperamos encontrar dois valores de Q restritivos. Igualando $i_2 = 1$, encontramos $Q = 0.702668$ e $Q = 0.999892$. Substituindo

Figura 12 – Validade da teoria perturbativa para a segunda correção do horizonte interno, com $\alpha = 10^{-1}$.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

estes valores de Q na expressão para o horizonte interno de Euler-Heisenberg ρ_2 , temos que para $Q = 0.702668$ o valor mínimo onde a teoria ainda é válida acontece em $\rho_2 \geq 0.45329$, já para $Q = 0.999892$ o valor máximo onde a teoria tem validade acontece em $\rho_2 \leq 1.79022$.

Igualando as expressões para ρ_1 e ρ_2 encontramos o valor da razão carga/massa que faz com que estes horizontes se encontrem ,

$$Q \rightarrow 0.999542641... \quad (209)$$

A partir desta razão encontramos o ponto de encontro destes horizontes substituindo este valor de Q e $\alpha = 10^{-1}$ em uma das expressões para o horizonte, ρ_1 ou ρ_2 .

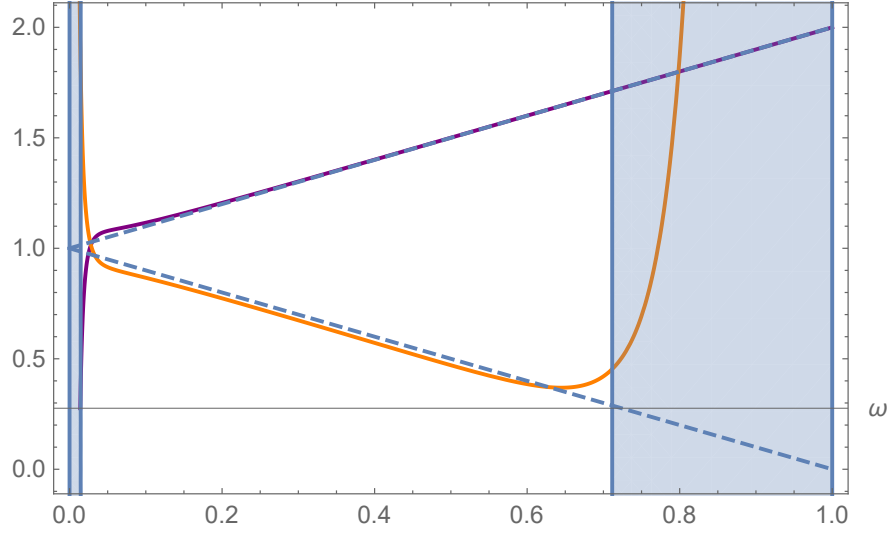
$$\rho_1 = \rho_2 = 0.990339545... \quad (210)$$

Este ponto de encontro dos horizontes fica dentro da região de validade da teoria de perturbação de até segunda ordem que estamos usando, e por isto podemos continuar analisando com segurança o que acontece neste encontro.

5.5 Termodinâmica no horizonte de eventos

Nesta seção vamos começar calculando a aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos do buraco negro estudado de acordo com ρ_1 encontrado. Como a temperatura de Hawking envolve a derivada da função de massa eq.(187), então será

Figura 13 – Região de validade da teoria perturbativa com duas ordens de correção. $\alpha = 10^{-1}$



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

conveniente escrever a função de massa em termos da razão ρ_1 . Lembrando que $r_+^{NL} = m\rho_1$, temos

$$M(\rho_+) = \frac{q^2}{m\rho_1} - \frac{a_+q^4}{20m^5\rho_1^5} + \frac{(a_+)^2q^6}{36m^9\rho_1^9}, \quad (211)$$

$$M(\rho_1) = \frac{m(1-\omega^2)}{\rho_1} - \frac{a_+(1-\omega^2)}{20m\rho_1^5} + \frac{(a_+)^2(1-\omega^2)^3}{36m^3\rho_1^9}. \quad (212)$$

Chamando de $P(\rho_1) = \frac{M(\rho_1)}{m}$ a razão entre a função de massa pela massa do sistema, para tornar nossas expressões todas adimensionais, sendo $\alpha \equiv \frac{a_+}{m^2}$, então

$$P(\rho_1) = \frac{(1-\omega^2)}{\rho_1} - \frac{\alpha(1-\omega^2)}{20\rho_1^5} + \frac{\alpha^2(1-\omega^2)^3}{36\rho_1^9}. \quad (213)$$

Cálculo da derivada da função de massa por unidade de massa,

$$\frac{\partial P(\rho_1)}{\partial \rho_1} = -\frac{(1-\omega^2)}{\rho_1^2} + \frac{\alpha(1-\omega^2)}{4\rho_1^6} - \frac{\alpha^2(1-\omega^2)^3}{4\rho_1^{10}}. \quad (214)$$

Multiplicando a temperatura do buraco negro eq.(171) pela massa para que a expressão seja também adimensional,

$$T \equiv mT_\kappa = \frac{1}{4\pi\rho_1} \left[1 + \frac{dP(\rho_1)}{d\rho_1} \right], \quad (215)$$

assim

$$T = \frac{1}{4\pi\rho_1} - \frac{(1-\omega^2)}{4\pi\rho_1^3} + \frac{\alpha(1-\omega^2)^2}{16\pi\rho_1^7} - \frac{\alpha^2(1-\omega^2)^3}{16\pi\rho_1^{11}}. \quad (216)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor ao redor dos horizontes de Reissner-Nordström para os polinômios do denominador e limitando as correções ao termo quadrático de α . Sendo

$$\frac{1}{\rho_1^n} = \frac{1}{(R_1 + \alpha\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+cc})^n}, \quad (217)$$

chamando de $f(x) = \frac{1}{(R_1+x)^n}$ e $x = \alpha\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+cc}$, então

$$f(x) \simeq \frac{1}{\rho_1^n} \simeq \frac{1}{(R_1)^n} - \frac{nx}{(R_1)^{n+1}} + \frac{n(n+1)x^2}{(R_1)^{n+2}} \frac{1}{2}, \quad (218)$$

logo, substituindo os polinômios do denominador usando a expansão acima, temos

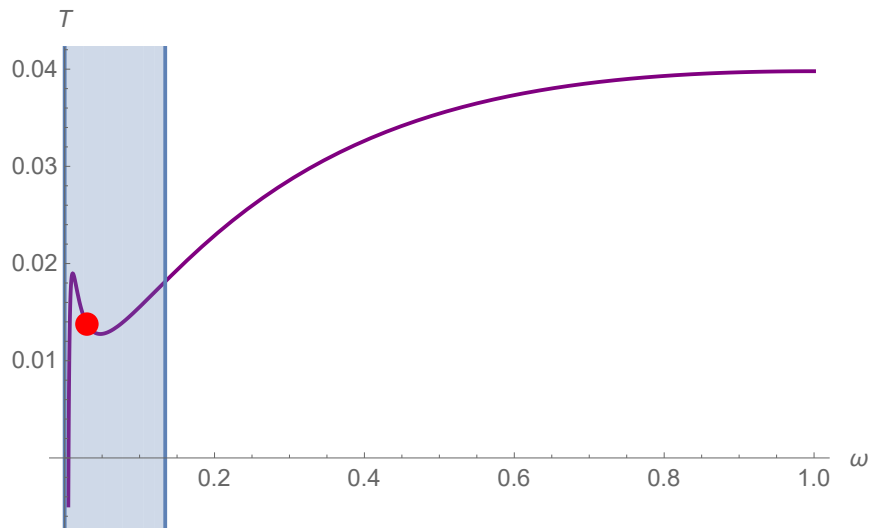
$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{(\alpha\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+cc})}{(R_1)^2} + \frac{\alpha^2\rho_{+c}^2}{(R_1)^3} \right] + \\ & - \frac{Q^2}{4\pi} \left[\frac{1}{(R_1)^3} - \frac{3(\alpha\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+cc})}{(R_1)^4} + \frac{6\alpha^2\rho_{+c}^2}{(R_1)^5} \right] + \\ & + \frac{\alpha Q^4}{16\pi} \left[\frac{1}{(R_1)^7} - \frac{7\alpha\rho_{+c}}{(R_1)^8} \right] - \frac{\alpha^2 Q^6}{16\pi(R_1)^{11}}, \end{aligned} \quad (219)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{4\pi R_1} \left(1 - \frac{1-\omega^2}{R_1^2} \right) + \\ & + \frac{\alpha}{4\pi R_1^2} \left(\frac{(1-\omega)^2}{4R_1^5} - \rho_{+c} + \frac{3(1-\omega)\rho_{+c}}{R_1^2} \right) + \\ & + \frac{\alpha^2}{4\pi R_1^2} \left(\frac{\rho_{+c}^2}{R_1} - \rho_{+cc} + \frac{(1-\omega)\rho_{+cc}}{R_1^2} - \frac{6(1-\omega)\rho_{+c}^2}{R_1^3} \right) + \\ & \frac{\alpha^2}{4\pi R_1^2} \left(-\frac{7(1-\omega)^2\rho_{+c}}{4R_1^6} - \frac{(1-\omega)^3}{4R_1^9} \right). \end{aligned} \quad (220)$$

Na Figura - 14 temos o gráfico que relaciona a aceleração gravitacional na superfície do horizonte de eventos, eixo das ordenadas, com a variável ω , no eixo das abscissas.

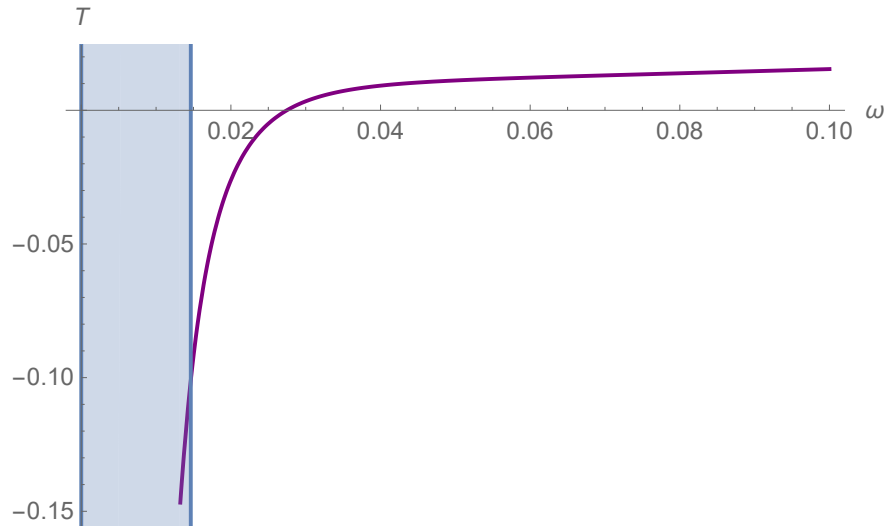
Figura 14 – Aceleração gravitacional nas superfícies do horizonte de eventos. O ponto vermelho marca o caso extremo para o buraco negro de Euler-Heisenberg.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Percebemos por ele, que a aceleração gravitacional no horizonte externo diminui para sistemas em que a razão carga/massa é maior, ou seja, para valores pequenos de ω . Para enxergar melhor este comportamento onde $\omega \rightarrow 0$, fizemos uma ampliação desde gráfico na Figura - 15, limitando ω ao intervalo $0 \leq \omega \leq 5.10^{-2}$.

Figura 15 – Temperatura de Hawking para regiões pequenas de ω , com $\alpha = 10^{-2}$. A faixa em azul é onde a teoria de perturbações perde validade.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Próximo ao caso extremal de Reissner-Nordström, em que $\frac{q^2}{m^2} = 1$, a aceleração gravitacional diminui abruptamente para valores negativos, assim como mostrado no gráfico da Figura - 15. O comportamento da temperatura deste sistema pode ser melhor compreendido através de um estudo sobre a estrutura causal nesta região em que $\omega - > 0$.

Para encontrar uma expressão para a capacidade térmica em função da variável adimensional para o raio de horizonte externo ρ_1 , temos que começar escrevendo a entropia deste sistema compacto eq.(156) em função de ρ_1 .

$$S = \frac{\mathcal{S}}{m^2} = \pi \rho_1^2. \quad (221)$$

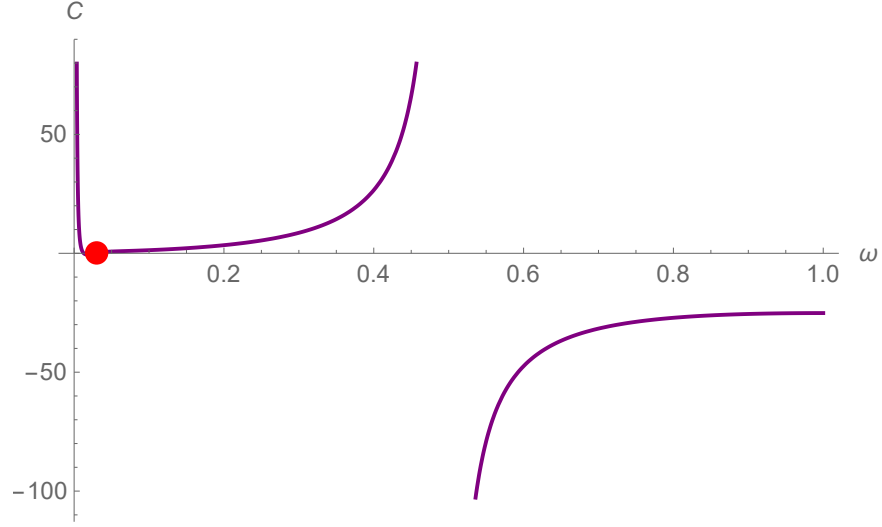
Expressando a capacidade térmica eq.(160) de forma também adimensional,

$$C_\rho = T \frac{\frac{\partial S}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial T}{\partial \rho_1}}, \quad (222)$$

mas antes calculando $\frac{dT}{d\rho_1} = 2\pi\rho_1$, e $\frac{dS}{d\rho_1}$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{4\pi\rho_1^2} + \frac{3(1-\omega^2)}{4\pi\rho_1^4} - \frac{7\alpha(1-\omega^2)^2}{16\pi\rho_1^8} + \frac{11\alpha^2(1-\omega^2)^3}{16\pi\rho_1^{12}}, \quad (223)$$

Figura 16 – Gráfico para a razão da capacidade térmica em relação a ω . O ponto vermelho marca o caso extremal para o buraco negro de Euler-Heisenberg.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

substituindo os polinômios do denominador pela expansão, como feito para a temperatura, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \rho_1} = & -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{(R_1)^2} - \frac{2(\alpha\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+cc})}{(R_1)^3} + \frac{3\alpha^2\rho_{+c}^2}{(R_1)^4} \right] + \\ & + \frac{3Q^2}{4\pi} \left[\frac{1}{(R_1)^4} - \frac{4(\alpha\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+cc})}{(R_1)^5} + \frac{10\alpha^2\rho_{+c}^2}{(R_1)^6} \right] + \\ & - \frac{7\alpha Q^4}{16\pi} \left[\frac{1}{(R_1)^8} - \frac{8\alpha\rho_{+c}}{(R_1)^9} \right] + \frac{11\alpha^2 Q^6}{16\pi(R_1)^{12}}. \end{aligned} \quad (224)$$

Agora podemos escrever a expressão para a capacidade térmica,

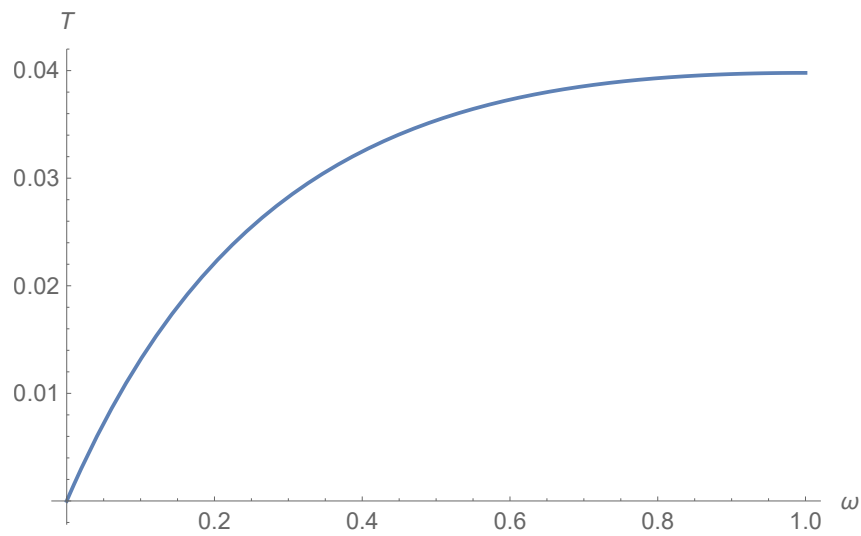
$$C = \frac{\left[2\pi\alpha^2\rho_{+cc} \left(\frac{1}{4\pi R_1} - \frac{Q^2}{4\pi(R_1)^3} \right) + 2\pi\alpha\rho_{+c} \left(-\frac{\alpha\rho_{+c}}{4\pi(R_1)^2} + \frac{3\alpha\rho_{+c}Q^2}{4\pi(R_1)^4} + \frac{\alpha Q^4}{16\pi(R_1)^7} \right) + 2\pi R_1 T \right]}{\frac{\partial T}{\partial \rho_1}}. \quad (225)$$

O gráfico da Figura - 16 representa a razão para a capacidade térmica no eixo vertical e o termo que engloba a razão carga/massa do sistema no eixo horizontal. Neste gráfico percebemos um mudança de fase do sistema, assim como sugerido pela termodinâmica convencional.

Mostramos também os resultados quando $\alpha = 0$, ou seja, a termodinâmica para o buraco negro de Reissner-Nordström. Na Figura - 17 está o gráfico para a aceleração gravitacional na superfície do horizonte em relação a razão carga/massa do sistema ω , e na Figura - 18 encontra-se o gráfico para a sua capacidade térmica.

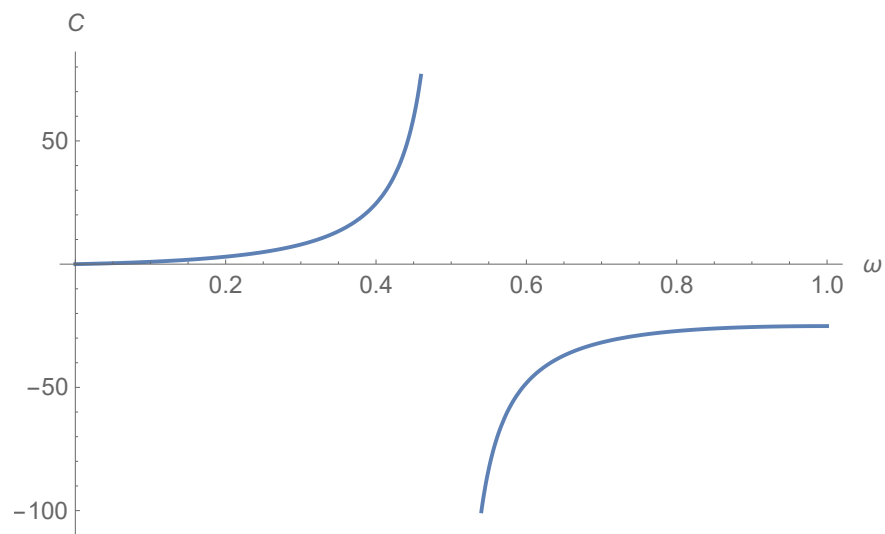
Comparando os gráficos dos resultados obtidos para as grandezas termodinâmicas do buraco negro carregado de Euler-Heisenberg percebemos que elas pouco diferem dos

Figura 17 – Aceleração gravitacional no horizonte de eventos do buraco negro de Reissner-Nordström.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

Figura 18 – Capacidade térmica do buraco negro de Reissner-Nordström. Não diferem significativamente dos resultados para os buracos negros de Euler-Heisenberg.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

resultados para as grandezas termodinâmicas do buraco negro de Reissner-Nordström. Ou seja, os efeitos da eletrodinâmica não-linear não afetam as propriedades termodinâmicas do sistema.

5.6 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Para podermos analisar a métrica da teoria de Euler-Heisenberg para qualquer distância ρ da singularidade, a relatividade geral nos permite a escolha de qualquer sistema de coordenadas, e o melhor a ser usado aqui é o sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Sabemos que uma geodésica radial nula deve obedecer [8]

$$\frac{cdt}{dr} = e^{-\nu} = \frac{1}{g_{00}}. \quad (226)$$

Escrevendo o elemento de linha de forma adimensional e chamando $g_{00}(\rho) = 1 - f$, para fazer uma analogia com as coordenadas de Eddington-Finkelstein para o buraco negro de Reissner-Nordström,

$$g_{00}(\rho) = 1 - f = 1 - \frac{2}{\rho} + \frac{Q^2}{\rho^2} - \frac{\alpha Q^4}{20\rho^6} + \frac{\alpha^2 Q^6}{36\rho^{10}}, \quad (227)$$

assim

$$\frac{ds^2}{m} = (1 - f)c^2 d\tau^2 - \frac{1}{1 - f} d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2. \quad (228)$$

Sendo o elemento de linha nulo no horizonte de um buraco negro com simetria radial, então

$$\frac{ds^2}{m} = 0 = d\Omega^2, \quad (229)$$

e

$$\left(\frac{cd\tau}{d\rho}\right)^2 = \frac{1}{(1 - f)^2}. \quad (230)$$

Para fazer uma analogia com as coordenadas de Eddington-Finkelstein construídas para o buraco negro de Reissner-Nordström decomparamos o elemento de linha em termos iguais aos de Reissner-Nordström e assim separamos os termos de correção desta eletrodinâmica não linear. Chamando $g_{00} = 1 - f_{RN} + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2$,

$$\frac{cd\tau}{d\rho} = \frac{1}{1 - f} = \frac{1}{1 - f_{RN} + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2}, \quad (231)$$

sendo

$$f_{RN} = \frac{2}{\rho} - \frac{Q^2}{\rho^2}, \quad (232)$$

$$f_1 = -\frac{Q^4}{20\rho^6} \quad (233)$$

e

$$f_2 = \frac{Q^6}{36\rho^{10}}. \quad (234)$$

Fazendo uma expansão em torno dos horizontes de Reissner-Nordström, temos

$$\frac{cd\tau}{d\rho} = \frac{1}{(1 - f_{RN}) \left(1 + \frac{\alpha f_1}{1 - f_{RN}} + \frac{\alpha^2 f_2}{1 - f_{RN}}\right)}, \quad (235)$$

$$\frac{cd\tau}{d\rho} \simeq \frac{1}{(1-f_{RN})} \left(1 - \frac{\alpha f_1}{1-f_{RN}} - \frac{\alpha^2 f_2}{1-f_{RN}} + \frac{\alpha^2 f_1^2}{(1-f_{RN})^2} \right), \quad (236)$$

$$\frac{cd\tau}{d\rho} \simeq \frac{1}{1-f_{RN}} - \frac{\alpha f_1}{(1-f_{RN})^2} + \alpha^2 \frac{f_1^2 - f_2(1-f_{RN})}{(1-f_{RN})^3}. \quad (237)$$

Integrando para depois transformar para coordenadas de Eddington-Finkelstein,

$$\int cd\tau \simeq \int \left[\frac{1}{1-f_{RN}} - \frac{\alpha f_1}{(1-f_{RN})^2} + \alpha^2 \frac{f_1^2 - f_2(1-f_{RN})}{(1-f_{RN})^3} \right] d\rho. \quad (238)$$

Chamando de

$$K' = \frac{-f_1}{(1-f_{RN})^2}; \quad (239)$$

e

$$J' = \frac{f_1^2 - f_2(1-f_{RN})}{(1-f_{RN})^3}. \quad (240)$$

Então

$$\int cd\tau \simeq \int \frac{1}{1-f_{RN}} d\rho + \int \alpha K' d\rho + \int \alpha^2 J' d\rho. \quad (241)$$

A primeira integral é equivalente a teoria de Reissner-Nordström, podemos escrevê-la em termos dos horizontes de Reissner-Nordström,

$$\frac{1}{1-f_{RN}} = \frac{\rho^2}{\rho^2 - 2\rho + Q^2} = \frac{\rho^2}{(\rho - R_1)(\rho - R_2)}. \quad (242)$$

Reescrevendo a integral,

$$\int cd\tau \simeq \int \frac{\rho^2}{(\rho - R_1)(\rho - R_2)} d\rho + \int \alpha K' d\rho + \int \alpha^2 J' d\rho. \quad (243)$$

Resultando assim em,

$$c\tau = \rho + \frac{R_1^2 \log(\rho - R_1)}{R_1 - R_2} - \frac{R_2^2 \log(\rho - R_2)}{R_1 - R_2} + \alpha K(\rho) + \alpha^2 J(\rho) + D, \quad (244)$$

encontramos a equação para a curva outgoing de geodésica nula desta métrica, onde D é a constante de integração e os termos $K(\rho)$ e $J(\rho)$ encontram-se abaixo:

$$K(\rho) = -\frac{1}{20\rho} - \frac{-2\rho + (\rho - 3)Q^2 + 4}{40(Q^2 - 1)((\rho - 2)\rho + Q^2)} + \frac{\log(\rho)}{5Q^2} - \frac{\log((\rho - 2)\rho + Q^2)}{10Q^2} +$$

$$+ \frac{(-3Q^4 + 12Q^2 - 8) \tan^{-1} \left(\frac{\rho - 1}{\sqrt{Q^2 - 1}} \right)}{40Q^2 (Q^2 - 1)^{3/2}} \quad (245)$$

e

$$J(\rho) = \frac{10380}{432000\rho^4} + \frac{2184Q^2}{432000\rho^5} - \frac{40(173Q^2 - 984)}{432000\rho^3Q^2} - \frac{480(123Q^2 - 310)}{432000\rho^2Q^4} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15Q^2(5888(\rho-2) + (265\rho-1801)Q^8 + (14526-4414\rho)Q^6)}{432000Q^8(Q^2-1)^2((\rho-2)\rho+Q^2)} + \\
& - \frac{270Q^4(16(3\rho-7)Q^2-32(\rho-2))}{432000Q^8(Q^2-1)((\rho-2)\rho+Q^2)^2} + \frac{15Q^2(48(289\rho-737)Q^4-32(487\rho-1075)Q^2)}{432000Q^8(Q^2-1)^2((\rho-2)\rho+Q^2)} + \\
& + \frac{240(465Q^4-2920Q^2+3288)\log((\rho-2)\rho+Q^2)}{432000Q^8} + \\
& - \frac{480(465Q^4-2920Q^2+3288)\log(\rho)}{432000Q^8} + \\
& - \frac{15(445760Q^4-356480Q^2+105216)\tan^{-1}\left(\frac{\rho-1}{\sqrt{Q^2-1}}\right)}{432000Q^8(Q^2-1)^{5/2}} + \frac{240(123Q^4-1860Q^2+2920)}{432000\rho Q^6} + \\
& - \frac{15(-2233Q^{10}+52990Q^8-245280Q^6)\tan^{-1}\left(\frac{\rho-1}{\sqrt{Q^2-1}}\right)}{432000Q^8(Q^2-1)^{5/2}} + \\
& - \frac{270Q^4((\rho-7)Q^6+(56-18\rho)Q^4)}{432000Q^8(Q^2-1)((\rho-2)\rho+Q^2)^2}. \tag{246}
\end{aligned}$$

Para encontrar a curva ingoing devemos trocar o sinal de todos os termos da curva outgoing,

$$c\tau = - \left[\rho + \frac{R_1^2 \log(\rho - R_1)}{R_1 - R_2} - \frac{R_2^2 \log(\rho - R_2)}{R_1 - R_2} + \alpha K(\rho) + \alpha^2 J(\rho) + D \right]. \tag{247}$$

Transformando a curva ingoing para coordenadas de Eddington-Finkelstein,

$$c\tau^* = c\tau + \frac{R_1^2 \log(\rho - R_1)}{R_1 - R_2} - \frac{R_2^2 \log(\rho - R_2)}{R_1 - R_2} + \alpha K(\rho) + \alpha^2 J(\rho), \tag{248}$$

assim podemos escrever a curva ingoing retificada da seguinte forma,

$$c\tau^* = -\rho + D. \tag{249}$$

Diferenciando a curva outgoing para entender a estrutura causal deste buraco negro,

$$cd\tau = cd\tau^* + \frac{f_{RN}}{1-f_{RN}}d\rho - \alpha K'(\rho)d\rho + \alpha^2 J'(\rho)d\rho, \tag{250}$$

$$cd\tau = cd\tau^* + \frac{f_{RN}}{1-f_{RN}}d\rho - \alpha \frac{f_1}{(1-f_{RN})^2}d\rho + \alpha^2 \left[\frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} - \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} \right] d\rho. \tag{251}$$

Elevando $cd\tau$ ao quadrado,

$$\begin{aligned}
(cd\tau)^2 &= (cd\tau^*)^2 + \frac{2f_{RN}}{1-f_{RN}}d\tau^*d\rho - \alpha \frac{2f_1}{(1-f_{RN})^2}d\tau^*d\rho + \\
& + \alpha^2 2 \left[\frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} - \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} \right] d\tau^*d\rho + \left(\frac{f_{RN}}{1-f_{RN}} \right)^2 d\rho^2 - \alpha \frac{2f_{RN}f_1}{(1-f_{RN})^3} d\rho^2 +
\end{aligned}$$

$$+\alpha^2 \frac{2f_{RN}}{(1-f_{RN})} \left[\frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} - \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} \right] d\rho^2 + \alpha^2 \frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^4} d\rho^2. \quad (252)$$

Escrevendo o elemento de linha em função destas novas coordenadas,

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{m^2} = & (1-f_{RN} + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2) d\tau^* + \frac{2f_{RN}}{1-f_{RN}} (1-f_{RN} + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2) d\tau^* d\rho + \\ & -\alpha \frac{2f_1}{(1-f_{RN})^2} (1-f_{RN} + \alpha f_1) d\tau d\rho + \\ & +\alpha^2 2(1-f_{RN}) \left[\frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} - \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} \right] d\tau^* d\rho + \\ & -\alpha \frac{2f_{RN}f_1}{(1-f_{RN})^3} (1-f_{RN} + \alpha f_1) d\rho^2 + \alpha^2 2f_{RN} \left[\frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} - \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} \right] d\rho^2 + \\ & + \left(\frac{f_{RN}}{1-f_{RN}} \right)^2 (1-f_{RN} + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2) d\rho^2 + \alpha^2 \frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} d\rho^2 + \\ & -\frac{1}{1-f_{RN}} d\rho^2 + \alpha \frac{f_1}{(1-f_{RN})^2} d\rho^2 + \alpha^2 \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} d\rho^2 - \alpha^2 \frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} d\rho^2. \end{aligned} \quad (253)$$

Manipulando esta equação e limitando sempre a correção à ordem quadrática, temos

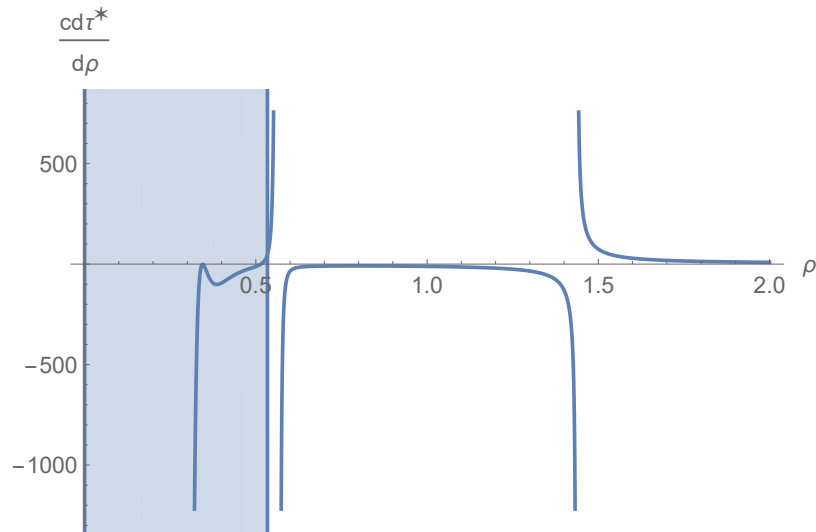
$$\begin{aligned} \frac{cd\tau^*}{d\rho} = & \frac{f_{RN} \pm 1}{1-f_{RN}} - \alpha \left[\frac{f_1}{(1-f_{RN})^2} \pm \left(-\frac{f_2(1+f_{RN})}{1-f_{RN}} \right) \right] + \\ & +\alpha^2 \left[\frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} - \frac{f_1^2}{(1-f_{RN})^3} \right] + \\ & \pm\alpha^2 \left(\frac{3f_1^2}{2(1-f_{RN})^3} - \frac{f_2}{(1-f_{RN})^2} - \frac{f_2^2(1+f_{RN})^2}{2(1-f_{RN})} \right). \end{aligned} \quad (254)$$

Através do gráfico para $\frac{cd\tau^*}{d\rho}$ podemos analisar a estrutura causal dos horizontes deste buraco negro de Euler-Heisenberg. A Figura - 19 mostra a inclinação das curvas outgoing deste buraco negro para um $\alpha = 10^{-1}$ e para um $Q = 0.9$, ou seja, ponto anterior ao encontro dos horizontes. Neste gráfico percebemos que o horizonte externo é um horizonte de eventos, pois a inclinação do cone de luz muda de positiva para negativa, enquanto que o horizonte interno é um horizonte de partículas, assim como para o buraco negro de Reissner-Nordström.

Ainda na Figura - 19, percebe-se pontos de divergência em $\rho \simeq 0.5$ e em $\rho \simeq 1.5$, estas divergências representam os dois horizontes deste buraco negro. A divergência para $\rho < 0.5$ é explicada pela proximidade deste local com a fonte e portanto a teoria de perturbação com apenas duas ordens de correção não consegue representar bem os resultados nesta região.

A estrutura causal é analisada na Figura - 20 através da curva outgoing após o encontro dos horizontes, para um $Q = 0.9995$. Neste gráfico percebemos que após os horizontes se encontrarem, o horizonte interno ρ_2 antes um horizonte de partículas, passa

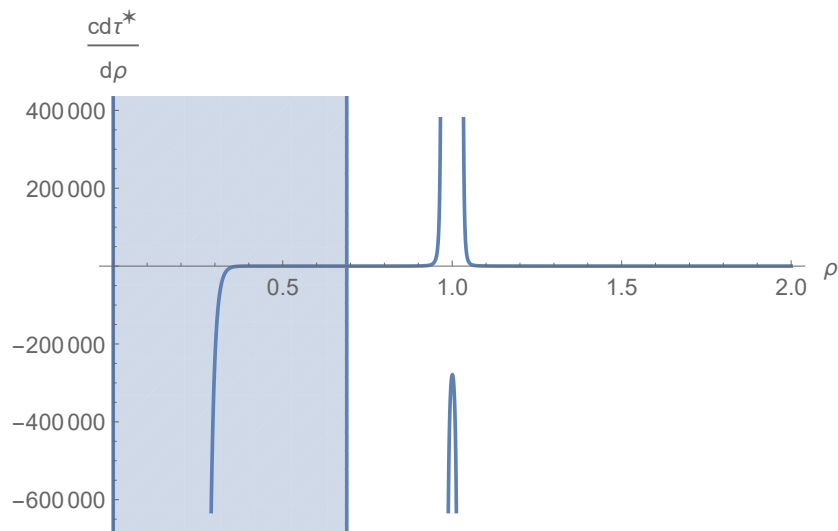
Figura 19 – Curvas outgoing do buraco negro de Euler-Heisenberg, para $\alpha = 10^{-1}$ e $Q = 0.9$.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

a ser o horizonte externo ou horizonte de eventos. E o horizonte externo ρ_1 que antes era o horizonte de eventos passa a ser o horizonte de interno, ou de partículas, para um $Q > 0.9995$. Ou seja, as propriedades físicas para um observador externo não muda. O

Figura 20 – Curvas outgoing do buraco negro de Euler-Heisenberg, para $\alpha = 10^{-1}$ e $Q = 0.9995$.



Fonte: Gráfico feito pela autora, usando o Software Mathematica da Wolfram.

que é percebido para um observador do lado de fora do buraco negro é a diminuição de seu horizonte externo com o aumento da razão carga/massa Q até que o horizonte externo se encontre com o interno para $Q \simeq 0.99954$, e então o buraco negro volta a crescer mais um pouco até atingir o caso extremal de Reissner-Nordström em $Q = 1$, logo, do ponto de vista de um observador externo, o horizonte de eventos do buraco negro sofre um efeito de ricochete (bouncing) devido às correções quânticas da eletrodinâmica.

A teoria de perturbação tem seus limites de validade, e pelas divergências dos gráficos acima percebemos que ela deixa de valer primeiro para valores pequenos de ρ e isto se explica devido a maior proximidade deste local com a fonte. Como nosso maior interesse foi analisar a região próxima ao caso extremal de Reissner-Nordström $Q = 1$, então não precisamos nos preocupar em usar um α tão pequeno.

Como sugerido por nossos resultados, o horizonte externo para o buraco negro de Euler-Heisenberg diminui com o aumento da razão carga/massa Q até se encontrar com o horizonte interno pouco antes do ponto extremal $Q = 1$. Ao se encontrarem, estes horizontes, trocam de propriedades e portanto, para um observador externo, o buraco negro sofre um ricochete ("bouncing").

6 CONCLUSÃO

Esta dissertação foi elaborada com o propósito de estudar melhor as propriedades físicas de buracos negros carregados próximos ao caso extremal.

Começamos através de um estudo bibliográfico sobre a eletrodinâmica de Maxwell, já que esta teoria foi fundamental para o desenvolvimento da relatividade especial, através do estabelecimento de uma velocidade limite para as ondas eletromagnéticas, e, também, para a formulação da relatividade geral já que no eletromagnetismo de Maxwell, o conceito “campo” foi melhor definido matematicamente. No capítulo 2, esta teoria de Maxwell foi estudada numa linguagem matemática tensorial para então mostrar como ela é invariante pelas transformações de Lorentz. Todo este estudo sobre eletrodinâmica se deve ao fato de o objeto pesquisado ser um buraco negro carregado e acoplado à teoria não-linear de Euler-Heisenberg.

Os capítulos seguintes, 3 e 4, trataram de soluções para métricas do espaço-tempo ao redor de objetos compactos. A primeira solução foi de uma métrica para o espaço-tempo que representa um buraco negro estático, assim como formulada pelo físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild, sendo a relatividade geral de Albert Einstein a base teórica para todas estas métricas. Além de chegarmos à solução de Schwarzschild que descreve geometricamente o espaço-tempo devido a um objeto compacto sem rotação e nem carga, apresentamos, no capítulo 4, a métrica de Reissner-Nordström para um buraco negro carregado e sem rotação.

No capítulo 5 estudamos sobre a métrica de um do buraco negro estático e carregado acoplado a teoria não-linear de Euler-Heisenberg, além de interpretar suas propriedades termodinâmicas que, assim como proposto por Jacob Bekenstein e Stephen Hawking, fazem uma analogia com a termodinâmica. Aplicando a solução desta métrica à termodinâmica de buracos negros alcançamos resultados para os raios de horizonte interno e externo desde objeto. Para melhor entender estes resultados, preferimos analisá-los em função da razão carga/massa Q do sistema, pois assim as equações para seus raios ficavam todas adimensionais.

Nos primeiros gráficos, Figura - 1 e Figura - 2, apresentamos a parte temporal da métrica para o buraco negro de Euler-Heisenberg em função da razão carga/massa Q e de ρ , nele pudemos perceber a presença de dois horizontes para esta teoria. Nos gráficos seguintes, apresentamos separadamente o comportamento do horizonte externo e do horizonte interno. Pelas divergências apresentadas nestes gráficos, vimos que o horizonte mais afetado por esta eletrodinâmica não-linear é o horizonte interno. Atráves da Figura - 8 percebemos que os buracos negros devido esta teoria possuem diferentes raios de horizonte externo e interno para diferentes valores da razão carga/massa Q do sistema. Para buracos negros com valores grandes de Q o horizonte externo tende à ser

menor e o horizonte interno maior do que para sistemas com menores valores de Q . Além disso, existe um certo valor de Q em que os horizontes interno e externo apresentam o mesmo valor de raio.

Verificamos os pontos onde a teoria de perturbação é válida, e vimos que o horizonte interno é mais restritivo que o horizonte externo, além de sofrer uma maior mudança devido à esta eletrodinâmica não-linear. Como nosso interesse foi analisar que acontece próximo ao caso extremal deste buraco negro, não foi necessário usar um α muito pequeno, e por isto fizemos ele constante em $\alpha = 10^{-1}$.

Interpretamos a termodinâmica devido ao raio externo deste buraco negro, utilizando ρ_1 nas equações para a temperatura de buracos negros e também para calcular sua capacidade térmica. No gráfico para a temperatura, Figura - 13 e Figura -14, percebemos que para sistemas com razões carga/massa maiores, a aceleração gravitacional é menor. E próximo ao caso extremal esta temperatura adimensional, $T = mT_\kappa$, decresce rapidamente para valores negativos. O gráfico para a capacidade térmica, Figura - 15, sugere uma mudança de fase deste sistema quando comparado com a termodinâmica convencional.

A Figura - 5 representa a mudança do horizonte interno ρ_2 em relação a variável Q que refere-se à razão carga/massa do sistema. Neste gráfico não demos importância aos resultados em que ρ_2 é muito pequeno, pois a proximidade desta região com a fonte, faz com que a nossa aproximação de apenas duas ordens de correção da eletrodinâmica não-linear não reproduza fielmente os efeitos físicos devido ao intenso campo elétrico. Já na região em que ω aproxima-se de zero, vemos esta razão ρ_2 aumentar abruptamente. As grandezas termodinâmicas para o horizonte externo desta teoria não-linear comportam-se quase da mesma forma que na teoria linear, ou seja, para o buraco negro de Reissner-Nordström.

Um desdobramento possível desde trabalho é analisar a termodinâmica de acordo com ρ_2 , ou seja, para sistemas em que $Q > 0.99954$, depois de terem atingido o limite extremal, pois a partir desta razão o horizonte externo deixa de ser ρ_1 e passa a ser ρ_2 , fazendo sentido sua análise termodinâmica.

Estudamos as coordenadas de Eddington-Finkelstein para saber sobre a estrutura causal deste buraco negro ao redor do seu limite extremal. Percebemos através das inclinações dos cones de luz que estes buracos negros de Euler-Heisenberg apresentam seus limites extremais para razões Q pouco menores que os buracos negros de Reissner-Nordström. E não mudam suas características de horizonte de eventos para o raio externo e horizonte de partículas para o raio interno, assim como sugerido pela Figura - 18 e pela Figura - 19. Além disto, para um observador de fora destes buracos negros, sistemas com o maiores razões de carga/massa Q possuem horizontes externos menores, até atingirem o caso extremal, em que atigem seu menor tamanho, e então para razões um pouco maiores o buraco negro aumenta um pouco seu raio.

Um outro desdobramento que pode ser feito a partir deste trabalho é estudar as geodésicas do tipo tempo para analisar o que acontece com um partícula quando esta cai em direção ao buraco negro de Euler-Heisenberg.

Esta dissertação foi uma pesquisa na área de física teórica, sem pretensões de descrever objetos do mundo natural. Buscamos contribuir de forma teórica com a relação entre a física clássica/determinística e a física moderna.

Referências

- [1] ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to general relativity**. 2nd ed.. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975.
- [2] JACKSON, J.D. **Classical electrodynamics**. 3rd ed.. Danvers: John Wiley and Sons, 1998.
- [3] NOVELLO, M. **Eletrodinâmica não linear: causalidade e efeitos**. Rio de Janeiro: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - Livraria da Física, 2010.
- [4] NEWTON, I. **Principia**. V.3. São Paulo: EDUSP, 2008.
- [5] CHANDRASEKHAR, S. **The mathematical theory of black holes**. New York: Oxford University Press, 1983.
- [6] BOAS, M.L. **Mathematical methods in the physical sciences**. 3rd ed. Danvers: John Wiley and Sons, 2006.
- [7] **Programa mínimo de cosmologia**. Rio de Janeiro, Jauá, 2010.
- [8] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity**. New York: Oxford University Press Inc., 1992.
- [9] MISNER, C.; THORNE, K.; WHEELER, J. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [10] HUANG, K. **Statistical mechanics**. 2nd ed.. New York: John Wiley and Sons, 1987.
- [11] SCHWARZSCHILD, K. On the Gravitational Fields of a Point-Mass, According to Einstein's Theory. **Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin**, p. 831-839, 1916.
- [12] CUZINATTO, R.R.; et al. Non-linear effects on radiation propagation around a charged compact object. **Astrophysics and Space Science**, v.59, p.359, 2015.
- [13] HEISENBERG, W.; EULER, H. Consequences of Dirac's Theory of the Positron. **Zeitschrift für Physik**, v. 98, p. 714-732, 1936.
- [14] SCHWINGER, J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. **American Physical Society**, v.82, p.664, 1951.
- [15] WEISSKOPF, V. The electrodynamics of the vacuum based on the quantum theory of the electron. **Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.**, p.1-39, 1936.

- [16] BEKENSTEIN, J.D. Black holes and entropy. **Physical Review D**, v. 7, p. 2333–2346, 1973.
- [17] KRUGLOV, S.I. Nonlinear electrodynamics and magnetic black holes. **Annalen der Physik**, n. 8, p. 529-543, 2017.
- [18] KRUGLOV, S.I. Magnetized black holes and nonlinear electrodynamics. **International Journal of Modern Physics**, A32, 2017.
- [19] YAJIMA, H.; TAMAKI, T. Black holes solutions in Euler-Heisenberg theory. **Physical Review D**, p.63-71, 2000.
- [20] BARDEEN, J.M.; CARTER, B.; HAWKING, S.W. The four laws of black hole mechanics. **Communications in Mathematical Physics**, v. 31, p. 161-170, 1973.
- [21] NOVELLO, M.; GOULART, E.; SALIM, J.M. Cosmological Effects of Nonlinear Electrodynamics. **Classical and Quantum Gravity**, v. 24, n. 11, 2007.
- [22] BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the New Field Theory. In: PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON. Series A, 1934, Londres. **Proceedings...** London: Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1934, v. 144, p. 425-451.
- [23] PIRES, A.S.T. **Evolução das ideias da Física**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- [24] Einstein, A.; Minkowski, H.; Weyl, H.; Lorentz, H.A. **The principle of relativity. A collection of original papers on the special and general theory of relativity**. Reprint edition. Dover: Publications, 1952.

APÊNDICE A - Campo Elétrico até segunda ordem de correção

Os cálculos das correções para o campo elétrico devido a eletrodinâmica não-linear de Euler-Heisenberg são apresentados a seguir. Sendo $E_0 = \frac{q}{r^2}$ e

$$E_n = \frac{q}{r^2} - \frac{a_+}{2} E_{n-1}^3, \quad (255)$$

logo

$$\begin{aligned} E_1 &\simeq \frac{q}{r^2} - \frac{a_+}{2} E_0^3 \\ E_1 &\simeq \frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2 r^6}. \\ E_2 &\simeq \frac{q}{r^2} - \frac{a_+}{2} E_1^3, \end{aligned} \quad (256)$$

$$\begin{aligned} E_2 &\simeq \frac{q}{r^2} - \frac{a_+}{2} \left(\frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2 r^6} \right)^2 \left(\frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2 r^6} \right), \\ E_2 &\simeq \frac{q}{r^2} - \left(\frac{a_+ q}{2 r^2} - \frac{a_+^2 q^3}{4 r^6} \right) \left(\frac{q^2}{r^4} - \frac{q^4 a_+}{r^8} + \frac{a_+^2 q^6}{4 r^{12}} \right) \\ E_2 &\simeq \frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2 r^6} + \frac{3 a_+^2 q^5}{4 r^{10}}. \end{aligned} \quad (257)$$

Os termos de até segunda ordem de correção para com campo elétrico ao quadrado,

$$E_2^2 = \left(\frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2 r^6} + \frac{3 a_+^2 q^5}{4 r^{10}} \right) \left(\frac{q}{r^2} - \frac{a_+ q^3}{2 r^6} + \frac{3 a_+^2 q^5}{4 r^{10}} \right), \quad (258)$$

$$E_2^2 = \frac{q^2}{r^4} - \frac{a_+ q^4}{2 r^8} + \frac{3 a_+^2 q^6}{4 r^{12}} - \frac{a_+ q^4}{2 r^8} + \frac{a_+^2 q^6}{4 r^{12}} + \frac{3 a_+^2 q^6}{4 r^{12}}. \quad (259)$$

$$E_2^2 = \frac{q^2}{r^4} - \frac{a_+ q^4}{r^8} + \frac{7 a_+^2 q^6}{4 r^{12}}. \quad (260)$$

E finalmente a quarta potência do campo elétrico com correções de até segunda ordem,

$$E_2^4 = \left(\frac{q^2}{r^4} - \frac{a_+ q^4}{r^8} + \frac{7 a_+^2 q^6}{4 r^{12}} \right) \left(\frac{q^2}{r^4} - \frac{a_+ q^4}{r^8} + \frac{7 a_+^2 q^6}{4 r^{12}} \right), \quad (261)$$

$$E_2^4 = \frac{q^4}{r^8} - \frac{a_+ q^6}{r^{12}} - \frac{a_+ q^6}{r^{12}} + \frac{9 a_+^2 q^8}{2 r^{16}}, \quad (262)$$

$$E_2^4 = \frac{q^4}{r^8} - \frac{2 a_+ q^6}{r^{12}} + \frac{9 a_+^2 q^8}{2 r^{16}}. \quad (263)$$

APÊNDICE B - Correção aos horizontes de Reissner-Nordström

Escrevendo a equação $g_{00} = 0$ na sua forma adimensional,

$$\rho^4 \left[\rho^4 (\rho - R_1)(\rho - R_2) - \frac{\alpha Q^4}{20} \right] = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36} \quad (264)$$

Sendo $R_1 = 1 + \sqrt{1 - Q^2}$ e $R_2 = 1 - \sqrt{1 - Q^2}$ os raios de Reissner-Nordström adimensionais. Usaremos estes raios de Reissner-Nordström R_1 e R_2 e a teoria perturbativa com correções de até segunda ordem para encontrar os raios de horizonte devido a teoria não linear da eletrodinâmica estudada. Expressão para o raio externo

$$\rho_1 = R_1 + \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc}. \quad (265)$$

E expressão para o raio interno

$$\rho_2 = R_2 + \alpha \rho_{-c} + \alpha^2 \rho_{-cc}. \quad (266)$$

Primeiro calculamos a correções para o raio externo adimensional ρ_1 ,

$$\rho_1 = R_1 + \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc}, \quad (267)$$

$$\rho_1^4 = (R_1 + \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc})^4, \quad (268)$$

$$\rho_1^4 = R_1^4 + 4R_1^3(\alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc}) + 6R_1^2(\alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc})^2, \quad (269)$$

os outros termos não entram no cálculo pois a correção é calculada apenas até a ordem quadrática em α .

$$\rho_1^4 = R_1^4 + 4\alpha R_1^3 \rho_{+c} + \alpha^2 (4R_1^3 \rho_{+cc} + 6R_1^2 \rho_{+c}^2). \quad (270)$$

$$(\rho_1 - R_1) = \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc} \quad (271)$$

$$(\rho_1 - R_2) = 2\omega + \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc} \quad (272)$$

Substituindo as expressões eq.(270), eq.(271) e eq.(272) em eq.(196),

$$-\frac{\alpha^2 Q^6}{36} = \left[R_1^4 + 4\alpha R_1^3 \rho_{+c} + \alpha^2 (4R_1^3 \rho_{+cc} + 6R_1^2 \rho_{+c}^2) \right] \times \left[(R_1^4 + 4\alpha R_1^3 \rho_{+c} + \alpha^2 (4R_1^3 \rho_{+cc} + 6R_1^2 \rho_{+c}^2)) (\alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc}) (2\omega + \alpha \rho_{+c} + \alpha^2 \rho_{+cc}) - \frac{\alpha Q^4}{20} \right].$$

$$(R_1^4 + 4\alpha R_1^3 \rho_{+c}) \left[(R_1^4 + 4\alpha R_1^3 \rho_{+c})(2\alpha\omega\rho_{+c} + \alpha^2\rho_{+c}^2 + \alpha^2 2\omega\rho_{+cc}) - \frac{\alpha Q^4}{20} \right] = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}.$$

$$(R_1^4 + 4\alpha R_1^3 \rho_{+c}) \left[\alpha 2\omega R_1^4 \rho_{+c} + \alpha^2 R_1^4 (\rho_{+c}^2 + 2\omega\rho_{+cc}) + \alpha^2 8R_1^3 \omega \rho_{+c}^2 - \frac{\alpha Q^4}{20} \right] = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}.$$

$$\begin{aligned} & \alpha \left(2\omega R_1^4 \rho_{+c} - \frac{Q^4}{20} \right) R_1^4 + \alpha^2 [R_1^4 (\rho_{+c}^2 + 2\omega\rho_{+cc}) + 8R_1^3 \omega \rho_{+c}^2] R_1^4 + \\ & + \alpha^2 4 \left(2\omega R_1^4 \rho_{+c} - \frac{Q^4}{20} \right) R_1^3 \rho_{+c} = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} & \alpha \left(2\omega R_1^4 \rho_{+c} - \frac{Q^4}{20} \right) R_1^4 + \\ & + \alpha^2 \left[[R_1^4 (\rho_{+c}^2 + 2\omega\rho_{+cc}) + 8R_1^3 \omega \rho_{+c}^2] R_1^4 + \frac{Q^6}{36} + 4 \left(2\omega R_1^4 \rho_{+c} - \frac{Q^4}{20} \right) R_1^3 \rho_{+c} \right] = 0. \end{aligned}$$

Por independência linear chegamos ao resultado para a primeira correção,

$$2\omega R_1^4 \rho_{+c} - \frac{Q^4}{20} = 0 \quad (273)$$

$$\rho_{+c} = \frac{Q^4}{40\omega R_1^4}. \quad (274)$$

E a segunda correção pela independência linear é

$$[R_1^4 (\rho_{+c}^2 + 2\omega\rho_{+cc}) + 8R_1^3 \omega \rho_{+c}^2] R_1^4 + \frac{Q^6}{36} = 0 \quad (275)$$

$$R_1^4 (\rho_{+c}^2 + 2\omega\rho_{+cc}) = -\frac{Q^6}{36R_1^4} - 8R_1^3 \omega \rho_{+c}^2 \quad (276)$$

$$\rho_{+c}^2 + 2\omega\rho_{+cc} = -\frac{Q^6}{36R_1^8} - \frac{8\omega\rho_{+c}^2}{R_1} \quad (277)$$

$$2\omega\rho_{+cc} = -\rho_{+c}^2 - \frac{Q^6}{36R_1^8} - \frac{8\omega\rho_{+c}^2}{R_1} \quad (278)$$

$$\rho_{+cc} = \frac{-\rho_{+c}^2}{2\omega} - \frac{Q^6}{72\omega R_1^8} - \frac{4\rho_{+c}^2}{R_1} \quad (279)$$

$$\rho_{+cc} = -\rho_{+c}^2 \left(\frac{1}{2\omega} - \frac{4}{R_1} \right) - \frac{Q^6}{72\omega R_1^8}. \quad (280)$$

$$\rho_{+cc} = -\frac{Q^8}{4^2 \times 10^2 \omega^2 R_1^8} \left(\frac{1}{2\omega} - \frac{4}{R_1} \right) - \frac{Q^6}{72\omega R_1^8}. \quad (281)$$

Repetindo estes mesmos cálculos, mas agora para encontrar as correções para o raio interno de Euler-Heisenberg,

$$\rho_2 = R_2 + \alpha\rho_{-c} + \alpha^2\rho_{-cc}, \quad (282)$$

$$\rho_2^4 = R_2^4 + 4R_2^3(\alpha\rho_{-c} + \alpha^2\rho_{-cc}) + 6R_2^2(\alpha^2\rho_{-c}^2), \quad (283)$$

sendo os outros termos com ordens maiores que quadráticas em α .

$$\rho_2^4 = R_2^4 + \alpha 4R_2^3\rho_{-c} + \alpha^2(4R_2^3\rho_{-cc} + 6R_2^2\rho_{-c}^2), \quad (284)$$

$$(\rho_2 - R_1) = -2\omega + \alpha\rho_{-c} + \alpha^2\rho_{-cc}. \quad (285)$$

$$(\rho_2 - R_2) = \alpha\rho_{-c} + \alpha^2\rho_{-cc}. \quad (286)$$

Substituindo eq.(284), eq.(285) e eq.(286) em eq.(196), temos

$$-\frac{\alpha^2 Q^6}{36} = [R_2^4 + \alpha 4R_2^3\rho_{-c} + \alpha^2(4R_2^3\rho_{-cc} + 6R_2^2\rho_{-c}^2)] \times \\ \times \left[[R_2^4 + \alpha 4R_2^3\rho_{-c} + \alpha^2(4R_2^3\rho_{-cc} + 6R_2^2\rho_{-c}^2)](-2\omega + \alpha\rho_{-c} + \alpha^2\rho_{-cc})(\alpha\rho_{-c} + \alpha^2\rho_{-cc}) - \frac{\alpha Q^4}{20} \right].$$

$$[R_2^4 + \alpha 4R_2^3\rho_{-c}] \left[(R_2^4 + \alpha 4R_2^3\rho_{-c})(-\alpha 2\omega\rho_{-c} - \alpha^2 2\omega\rho_{-cc} + \alpha^2\rho_{-c}^2) - \frac{\alpha Q^4}{20} \right] = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}.$$

$$[R_2^4 + \alpha 4R_2^3\rho_{-c}] \left[-\alpha(2\omega R_2^4\rho_{-c}) + \alpha^2(-2\omega\rho_{-cc} + \rho_{-c}^2)R_2^4 - \alpha^2 8\omega R_2^3\rho_{-c}^2 - \frac{\alpha Q^4}{20} \right] = -\frac{\alpha^2 Q^6}{36}.$$

$$-\alpha \left(2\omega R_2^4\rho_{-c} + \frac{Q^4}{20} \right) R_2^4 + \alpha^2 [(-2\omega\rho_{-cc} + \rho_{-c}^2)R_2^8 - 8\omega R_2^7\rho_{-c}^2] - \alpha^2 \left(8\omega R_2^7\rho_{-c}^2 + \frac{R_2^3\rho_{-c}Q^4}{5} \right) + \\ + \frac{\alpha^2 Q^6}{36} = 0.$$

$$-\alpha \left(2\omega R_2^4\rho_{-c} + \frac{Q^4}{20} \right) R_2^4 + \alpha^2 \left[(-2\omega\rho_{-cc} + \rho_{-c}^2)R_2^8 - 16\omega R_2^7\rho_{-c}^2 - \frac{R_2^3\rho_{-c}Q^4}{5} + \frac{Q^6}{36} \right] = 0. \quad (287)$$

De acordo com a dependência linear,

$$2\omega R_2^4\rho_{-c} + \frac{Q^4}{20} = 0, \quad (288)$$

logo a primeira correção é dada por

$$\rho_{-c} = -\frac{Q^4}{40\omega R_2^4}. \quad (289)$$

Calculando a segunda correção para o raio interno de Euler-Heisenberg,

$$(-2\omega\rho_{-cc} + \rho_{-c}^2)R_2^8 - 16\omega R_2^7\rho_{-c}^2 - \frac{R_2^3\rho_{-c}Q^4}{5} + \frac{Q^6}{36} = 0.$$

$$2\omega\rho_{-cc}R_2^8 = -16\omega R_2^7\rho_{-c}^2 - \frac{R_2^3\rho_{-c}Q^4}{5} + \frac{Q^6}{36} + \rho_{-c}^2R_2^8.$$

$$\rho_{-cc} = \frac{-8\rho_{-c}^2}{R_2} - \frac{\rho_{-c}Q^4}{10\omega R_2^5} + \frac{Q^6}{72\omega R_2^8} + \frac{\rho_{-c}^2}{2\omega}.$$

$$\rho_{-cc} = \frac{-8}{R_2} \left(-\frac{Q^4}{40\omega R_2^4} \right)^2 - \frac{Q^4}{10\omega R_2^5} \left(-\frac{Q^4}{40\omega R_2^4} \right) + \frac{Q^6}{72\omega R_2^8} + \frac{1}{2\omega} \left(-\frac{Q^4}{40\omega R_2^4} \right)^2.$$

Logo a segunda correção é dada por,

$$\rho_{-cc} = \frac{Q^6}{72\omega R_2^8} + \frac{Q^8}{2^4 \times 10^2 \omega^2 R_2^8} \left(\frac{-4}{R_2} + \frac{1}{2\omega} \right). \quad (290)$$

Escrevendo a expressão completa para o raio interno de Euler-Heisenberg,

$$\rho_2 = R_2 - \alpha \frac{Q^4}{40\omega R_2^4} + \alpha^2 \left[\frac{Q^6}{72\omega R_2^8} + \frac{Q^8}{2^4 \times 10^2 \omega^2 R_2^8} \left(\frac{-4}{R_2} + \frac{1}{2\omega} \right) \right]. \quad (291)$$