

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

DIEGO AUGUSTO FRIZO

SOLUÇÕES DA ELETRODINÂMICA  
GENERALIZADA EM ESPAÇOS-TEMPO  
CURVOS

Poços de Caldas/MG  
2019

DIEGO AUGUSTO FRIZO

SOLUÇÕES DA ELETRODINÂMICA  
GENERALIZADA EM ESPAÇOS-TEMPO  
CURVOS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física de Partículas e Campos. Orientador: Prof. Dr. Cássius Anderson Miquelle de Melo.

Poços de Caldas/MG  
2019

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas  
Biblioteca campus Poços de Caldas

F919s Frizo, Diego Augusto.

Soluções da eletrodinâmica generalizada em espaços-tempo curvos. / Diego Augusto Frizo -- Poços de Caldas/MG, 2019.  
85 f. –

Orientador: Cássius Anderson Miquele de Melo.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alfenas, campus Poços de Caldas, 2019.

Bibliografia.

1. Relatividade geral. 2. Buracos negros. 3. Podolsky. I. Melo, Cássius Anderson Miquele de. II. Título.

CDD – 523.1

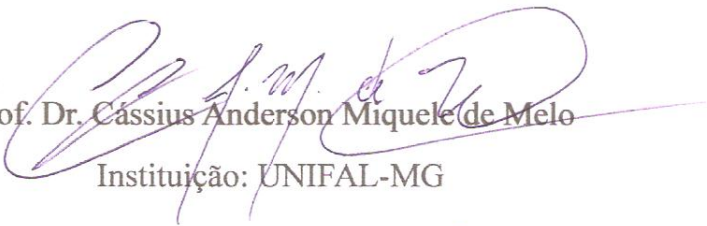
**DIEGO AUGUSTO FRIZO**

**SOLUÇÕES DA ELETRODINÂMICA GENERALIZADA EM ESPAÇOS-  
TEMPO CURVOS**

A banca examinadora abaixo-assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Física, pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas.

Área de Concentração: Partículas e Campos

Aprovada em: 28 de junho de 2019.



Prof. Dr. Cassius Anderson Miquele de Melo

Instituição: UNIFAL-MG



Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira

Instituição: UNICAMP



Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Instituição: UNIFAL-MG

Dedico este trabalho à minha mãe e irmã,  
que nunca mediram esforços para me ajudar  
a realizar esse sonho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família por todo apoio e compreensão ao longo desses anos de trabalho e estudo, pois sem eles não teria forças para continuar. Em especial a minha mãe, Luiza, guerreira, que mesmo enfrentando suas próprias dificuldades fez muito mais do que eu poderia imaginar. À minha irmã, Samira, pelas longas horas de conversas e desabafos, de mútua compreensão das necessidades e dificuldades por cada um enfrentadas e que juntos seguimos lutando.

Aos meus amigos da "Turma do Mé", que entenderam as minhas ausências mas que nunca se distanciaram quando precisei da ajuda deles.

Aos colegas de estudos do mestrado da Unifal, Maria Helena, Lucas, Pablo, Farley, Gabriel e tantos outros pelo companheirismo. Aos colegas da Unicamp, em especial Dany, Rafael e Juliana, que mesmo distantes, sempre se propunham a ajudar de alguma forma.

Agradeço também minha psicóloga Raquel Grillo, por me fazer enxergar caminhos e perspectivas que jamais poderia ter feito sozinho.

À minha prima Raquel Pan, por entender exatamente como me senti durante todos esses anos.

Aos colegas do Colégio Ultra, pelo apoio e compreensão em minhas aulas durante todo esse tempo, um agradecimento especial à Patrícia Braga, Patrícia Inhasz, Ana Luísa, Eduardo, Karen, Duda, José Ricardo, Juliana, Luís Otávio e Gustavo.

Aos guerreiros de jiu-jitsu da equipe Pedro Moreira por minhas ausências nos treinos, pelo apoio e motivação para continuar buscando minha evolução. OSS!

Agradeço também ao PitStop Poços de Caldas e todos os seus funcionários, que por muitas vezes nos serviu como escritório.

Agradeço por todos os professores pelos ensinamentos, broncas e motivação. Saibam que são exemplos a serem seguidos. Em especial ao Cássius, Enrique, Gardim e Pamplona pelos seus ensinamentos.

Ao Samuel, pela longa ausência que tive em outros estudos e por sua compreensão e apoio.

Um agradecimento também a CAPES, pelo apoio financeiro ao programa de pós-graduação em física da Unifal-MG.

Por fim, agradeço ao meu orientador Cássius, pelas tantas horas de dedicação e comprometimento com meu trabalho, que mesmo nas horas vagas não mediu esforços para me ajudar a realizar este sonho.

À todos vocês, muito obrigado!

*"O estado de pensamento que permite que o homem faça um trabalho desse tipo é semelhante à adoração religiosa ou de um amante; o esforço diário não vem da intenção deliberada, mas direto do coração."*

*(Albert Einstein, 1918)*



## RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo investigar a eletrodinâmica generalizada em espaços-tempo curvos. A partir das soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström para as equações de Einstein com simetria esférica e com independência temporal, deseja-se encontrar soluções que levem em consideração a eletrodinâmica generalizada. Para isso, deseja-se encontrar uma expressão para o campo elétrico da eletrodinâmica generalizada no espaço-tempo plano e então utilizar esse campo elétrico para encontrar as componentes da métrica do espaço-tempo curvo. Por fim, será feita uma análise dos resultados obtidos tais como o comportamento dos horizontes de eventos, o desvio da trajetória de um raio de luz e o atraso temporal de um raio de luz.

**Palavras-chave:** Schwarzschild. Podolsky. Buracos negros. Relatividade geral.

## ABSTRACT

This work aims to investigate the generalized electrodynamics in curved space-time. From the Schwarzschild and Reissner-Nordström solutions for the Einstein equations with spherical symmetry and with temporal independence, it is desired to find solutions that take into account the generalized electrodynamics. For this, we want to find an expression for the electric field of generalized electrodynamics in the flat space-time and then use this electric field to find the components of the metric of the curved space-time. Finally, an analysis will be made of the results obtained such as the behavior of the horizons of events, the deviation of the trajectory of a ray of light and the temporal delay of a ray of light.

**Keywords:** Schwarzschild. Podolsky. Black holes. General relativity.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	1
2	ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO E SEM CARGA ELÉTRICA . . . . .	3
2.1	A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD . . . . .	3
2.2	A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD EM COORDENADAS ISO- TRÓPICAS . . . . .	6
2.3	O PROBLEMA DE KEPLER DA RELATIVIDADE GERAL E O DESVIO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO . . . . .	8
2.4	MOMENTO QUADRUPOLAR DO SOL E O MOVIMENTO PE- RIÉLICO . . . . .	14
2.5	A TRAJETÓRIA DO RAIOS DE LUZ EM UM CAMPO DE SCHWARZS- CHILD . . . . .	15
2.6	O TEMPO DE VIAGEM DA LUZ EM UM CAMPO DE SCHWARZS- CHILD . . . . .	19
3	O CAMPO DE UMA MASSA PONTUAL CARREGADA . . . . .	22
3.1	A SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM . . . . .	22
3.2	ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY . . . . .	26
3.3	BURACO NEGRO NA ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY . . . . .	31
4	O CAMPO ELÉTRICO DA ELETRODINÂMICA GENERALIZADA	37
4.1	CAMPO ELÉTRICO DE PODOLSKY NO ESPAÇO-TEMPO DE REISSNER-NORDSTRÖM . . . . .	37
4.2	CAMPO ELÉTRICO DE PODOLSKY NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI . . . . .	37
4.2.1	Campo elétrico de Podolsky via teoria de perturbação singular . . . . .	46
4.3	OBTENDO $e^{(\nu+\lambda)}$ PARA O CAMPO ELÉTRICO DE PODOLSKY NO ESPAÇO-TEMPO PLANO . . . . .	49
4.3.1	Densidade de energia . . . . .	53
4.3.2	Obtendo $\lambda(r)$ . . . . .	54

4.3.3	Obtendo $\nu(r)$ . . . . .	55
5	CONSEQUÊNCIAS DA MÉTRICA DE PODOLSKY . . . . .	57
5.1	HORIZONTES PERTURBADOS . . . . .	57
5.2	A TRAJETÓRIA DE UM RAIOS DE LUZ EM UM CAMPO DE PODOLSKY . . . . .	62
5.3	TEMPO DE VIAGEM DA LUZ EM UM CAMPO DE PODOLSKY	71
6	CONCLUSÃO . . . . .	75
	REFERÊNCIAS . . . . .	78
	APÊNDICE A – TEORIA DE PERTURBAÇÕES SINGULARES	80

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1915, Albert Einstein publica a Teoria da Relatividade Geral, onde propõe que o espaço-tempo é curvo e que sofre essa deformação através da ação da gravidade. Suas equações mostram como se dá a interação entre gravidade, matéria, movimento e energia (ISAACSON et al., 2007).

Sua teoria foi responsável por grandes avanços na ciência e explicação de fenômenos físicos, por exemplo, o desvio do periélio de Mercúrio que intrigava astrônomos da época, que propuseram a existência de um planeta ainda não observado próximo a órbita de Mercúrio, batizado de Vulcano (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975). Esse planeta seria capaz de produzir uma perturbação na órbita de Mercúrio que explicaria o desvio sofrido. Porém, esse suposto planeta nunca foi observado. Utilizando de sua teoria, Einstein mostrou que não era necessário a existência de um planeta para tal desvio, pois seus cálculos conferiram exatamente com os dados observados.

Uma segunda prova (ou teste) para sua teoria foi que a luz poderia sofrer um desvio de sua trajetória se estivesse próxima o suficiente de um campo gravitacional muito forte. Assim, para verificar essa hipótese, grupos de cientistas se propuseram a observar as estrelas durante a noite e comparar as suas posições quando houvesse um eclipse solar. Assim, o Sol iria desviar a luz proveniente de uma dessas estrelas. Várias equipes de cientistas foram formadas para tentar essa observação e uma em especial, foi para Sobral-CE (ISAACSON et al., 2007), onde puderam comprovar o efeito em 1919.

Outro teste bem sucedido foi o desvio da luz para o vermelho, que gera uma diferença nas frequências emitidas pela luz caso os emissores não estejam em repouso absoluto. Em 2016, o consórcio formado pelos laboratórios LIGO e VIRGO anunciou a primeira detecção de ondas gravitacionais de maneira direta, ondas essas já previstas na teoria de Einstein (SAA, 2016).

Mas foi logo após Einstein publicar sua teoria que em 1916 Karl Schwarzschild publica um artigo com a solução exata para a equação de Einstein (SAA, 2016). A solução de Schwarzschild leva em consideração um espaço-tempo de simetria esférica e estático, que abordaremos nesse trabalho. Dessa solução têm-se a primeira ideia de buraco negro.

Buscando outras soluções para a equação de Einstein, Reissner e Nordström utilizaram de simetria esférica para um espaço-tempo estático, mas que possui carga elétrica e assim temos o buraco negro de Reissner-Nordström, que se diferencia do buraco negro de Schwarzschild por possuir um campo elétrico (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975).

A solução de Reissner-Nordström leva em consideração a teoria eletromagnética de Maxwell para o tensor energia-momento nas equações de Einstein. Aqui, pretendemos analisar uma solução com simetria esférica e estática mas utilizando uma teoria eletromagnética mais geral, a Eletrodinâmica de Podolsky em espaços-tempo curvos. Para isso, vamos resolver as equações para o campo elétrico em espaço-tempo curvo disponível em (CUZINATTO et al., 2018). A Eletrodinâmica de Podolsky possui lagrangiana única no espaço-tempo plano, mas em espaços-tempo curvos é preciso acrescentar um novo parâmetro para que a lagrangiana seja única (CUZINATTO; MELO; POMPEIA, 2007).

A escolha por abordar o problema utilizando a eletrodinâmica generalizada de Podolsky vem do fato de que a mesma não possui a divergência para o campo elétrico próximo a origem como a teria de Maxwell (GRATUS; PERLICK; TUCKER, 2015). Embora esta última seja amplamente aceita no meio científico e muito contribuiu para o desenvolvimento da ciência e tecnologia, a eletrodinâmica de Podolsky também possui diversas aplicações e apresenta grandes possibilidades de investigação em Cromodinâmica Quântica para uma teoria de segunda ordem, e para ordens superiores, uma generalização para teoria Eletrofraca (ORTEGA, 2014).

## 2 ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO E SEM CARGA ELÉTRICA

Neste capítulo mostraremos como Schwarzschild obteve sua solução para as equações de Einstein, assim como as consequências dos seus resultados. Schwarzschild publica sua solução em 1916, enquanto servia o exército alemão durante a I Guerra Mundial (SAA, 2016). Os cálculos envolvidos nesse capítulo estão em (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975) com ligeira modificação na notação para uma versão atualizada.

### 2.1 A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

A equação de Einstein para a relatividade geral  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ , com a assinatura  $(+,-,-,-)$  é na verdade um conjunto de dez equações diferenciais, que relaciona a curvatura do espaço-tempo com a matéria.

A solução encontrada por Schwarzschild para resolver as equações leva em consideração uma simetria esférica e um corpo estático num campo livre de matéria e energia. Levando em consideração essas peculiaridades, o tensor energia-momento é  $T^{\mu\nu} = 0$  e assim, o tensor de Einstein fica na forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

o que reduz o problema a encontrar uma métrica que satisfaça  $R_{\mu\nu} = 0$ , (basta aplicar  $g^{\mu\nu}$  em (2.1) e o resultado segue).

Como estamos interessados em uma simetria esférica, vamos escrever o elemento de linha  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  da seguinte forma no espaço-tempo de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2).$$

Para um espaço-tempo curvo, precisamos encontrar funções  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  tais que o elemento de linha possua a seguinte estrutura

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2.$$

e como estamos utilizando um sistema de coordenadas esféricas, temos

$$ds^2 = Ac^2 dt^2 - (Bdr^2 + Cr^2 d\theta^2 + Dr^2 \sin^2\theta d\phi^2).$$

Como nesse caso tem-se uma simetria esférica, não há dependência angular, de modo que as funções  $C$  e  $D$  devem ser iguais.

De fato, tomando um deslocamento  $\varepsilon$  ao longo de um meridiano, temos que  $\varepsilon = r d\theta$  partindo do polo norte, o que implica que  $ds^2 = -C\varepsilon^2$ . Tomando um deslocamento  $\varepsilon$  no equador, temos que  $\varepsilon = r d\phi$ , o que implica que  $ds^2 = -D\varepsilon^2$ . Logo,  $C \equiv D$ .

Assim, podemos escrever o elemento de linha como

$$ds^2 = Ac^2 dt^2 - Bdr^2 - C(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

É possível simplificar ainda mais se escolhermos uma coordenada radial conveniente  $\hat{r}$  tal que  $\hat{r} = \sqrt{C(r)}r$ . Sendo assim, temos  $\hat{r}^2 = Cr^2$  e substituindo no elemento de linha temos

$$ds^2 = Ac^2 dt^2 - \hat{B}d\hat{r}^2 - (\hat{r}^2 d\theta^2 + \hat{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

que podemos fazer, por comodidade

$$ds^2 = Ac^2 dt^2 - Bdr^2 - (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Assim, restam apenas duas funções  $A$ ,  $B$  a serem determinadas. Para manter a assinatura da métrica, as funções  $A$  e  $B$  devem ser funções positivas, então sejam  $A = e^{\nu(r)}$  e  $B = e^{\lambda(r)}$ , onde  $\lambda(r)$  e  $\nu(r)$  são funções a serem determinadas. Voltando ao elemento de linha, temos

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Para encontrar essas funções, vamos voltar à equação (2.1), resolver

$$R_{\mu\nu} = \partial_\delta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + \Gamma_{\tau\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\tau - \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\tau = 0.$$

e encontrar os símbolos de Christoffel não nulos. Aqui, supondo que esse campo gravitacional descreve uma geodésica e aplicando o princípio da mínima ação, podemos encontrar os símbolos de Christoffel não nulos:

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}\nu' & \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} & \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}\lambda' \\ \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda} & \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot \theta & \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \end{array}$$



Lembrando que  $\Gamma_{ih}^i = \frac{\partial}{\partial x^h} \log \sqrt{-g}$  e  $g = \det g_{\mu\nu}$ , onde índices latinos vão de 1 a 3 e índices gregos vão de 0 a 3. Então o tensor de Riemann fica na forma

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu (\log \sqrt{-g}) - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\tau - \Gamma_{\mu\nu}^\tau \partial_\tau (\log \sqrt{-g}) = 0.$$

Escrevendo  $g_{\mu\nu}$  na forma matricial para encontrar o determinante da métrica temos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \Rightarrow \det g_{\mu\nu} = -e^{\nu(r)+\lambda(r)} r^4 \sin^2 \theta.$$

Então,  $\log \sqrt{-g} = \frac{\nu(r)+\lambda(r)}{2} + 2 \log r + \log |\sin \theta|$ . Assim, podemos encontrar as componentes do tensor de Riemann resolvendo quatro equações diferenciais, as duas primeiras são:

$$R_{00} = \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{2\nu'}{r} = 0. \quad (2.2)$$

$$R_{11} = \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{2} - \frac{2\lambda'}{r} = 0. \quad (2.3)$$

Resolvendo o sistema de 2.2 e 2.3, encontramos

$$\nu' + \lambda' = 0 \Rightarrow \nu + \lambda = k, \text{ com } k \text{ constante.}$$

Se fizermos uma troca na coordenada temporal de  $t$  por  $te^{k/2}$ , podemos tomar  $k = 0$ , de modo que no elemento de linha isso é equivalente a trocar  $\nu$  por  $\nu + k$ . Então temos  $\nu = -\lambda$ . Voltando a equação diferencial (2.3), temos:

$$\lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} = 0 \Rightarrow (re^{-\lambda})'' = 0.$$

$$(re^{-\lambda})' = C \text{ com } C \text{ constante.}$$

Para  $R_{22}$  temos:

$$(e^{-\lambda} r)' = 1.$$

Integrando essa equação, tem-se  $e^{-\lambda} r = r - 2m$ , onde  $2m$  é uma constante arbitrária.

Sendo assim,

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \quad \text{e} \quad e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}.$$

Para  $R_{33}$  obtemos  $(e^{-\lambda}r)' = 1$ , que já foi resolvida. Isso nos mostra que as soluções são consistentes.

Sendo assim o elemento de linha fica na forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.4)$$

Esse é o elemento de linha de um espaço-tempo de Schwarzschild onde a constante  $m$  é definida como *massa geométrica do corpo central*, dado por  $m = \frac{GM}{c^2}$ . Vamos analisar alguns limites importantes.

Para  $r \rightarrow \infty$ , ou seja, longe o suficiente da massa pontual, o espaço-tempo se torna assintoticamente plano. A medida de tempo de um observador longe o suficiente da origem é dada por  $t$ .

Além disso, para  $r = 2m$ , o coeficiente da coordenada temporal no elemento de linha se torna nulo e o coeficiente da coordenada radial tende a infinito. O raio  $r = 2m$  é chamado de *Raio de Schwarzschild*. Isso mostra que para um objeto cujo  $r \rightarrow 2m$ , o tempo para esse objeto é diferente daquele medido quando  $r \rightarrow \infty$ . Quanto mais próximo dessa singularidade, mais devagar o tempo passar em relação aquele que está assintótico.

## 2.2 A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD EM COORDENADAS ISOTRÓPICAS

A solução de Schwarzschild como foi construída na seção anterior levou em consideração coordenadas esféricas, mas é possível mostrar que a solução não depende deste sistema de coordenadas escolhido. Buscamos então um elemento de linha na forma

$$ds^2 = A(r)(dx^0)^2 - B(r)d\sigma^2.$$

onde  $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  ou  $d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ , e as funções  $A(r)$  e  $B(r)$  devem preservar o elemento de linha para qualquer escolha de coordenadas.

**Definição:** Coordenadas isotrópicas são aquelas cujo elemento de linha toma a forma

$$ds^2 = A(r)(dx^0)^2 - B(r)d\sigma^2.$$

Nesse tipo de coordenada,  $t$ ,  $\phi$ , e  $\theta$  não sofrem variação, enquanto que  $r \rightarrow \rho(r)$ .

O elemento de linha de Schwarzschild na forma isotrópica é definido por

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \lambda^2(\rho) [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \lambda^2(\rho) d\sigma^2 \end{aligned}$$

Comparando o elemento de linha em coordenadas esféricas com o elemento de linha em coordenadas isotrópicas, temos que  $r^2 = \lambda^2 \rho^2$  e  $\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} = \lambda^2 d\rho^2$ , o que implica que

$$\frac{\pm dr}{\sqrt{r^2 - 2mr}} = \frac{d\rho}{\rho}$$

Integrando, temos:

$$\pm \log \left[ (r^2 - 2mr)^{1/2} + (r - m) \right] = \log \rho + C, \text{ com } C \text{ constante.}$$

Vamos analisar alguns limites. Considere agora um observador longe o suficiente tal que  $r \gg m$

$$\pm \log 2r = \log \rho + C.$$

Então, tomando o sinal positivo e  $C = \log 2$ , para que no infinito  $r = \rho$ ,

$$\sqrt{r^2 - 2mr} + (r - m) = 2\rho.$$

Veja que

$$\left[ (r - m) + \sqrt{r^2 - 2mr} \right] \left[ (r - m) - \sqrt{r^2 - 2mr} \right] = m^2.$$

Dividindo pela equação acima e depois somando, obtemos  $r - m = \rho + \frac{m^2}{4\rho}$ , o que implica em

$$r = \rho + \frac{m^2}{4\rho} + m = \rho \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^2.$$

Como  $\lambda = \frac{r}{\rho}$ , temos  $\lambda(\rho) = \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^2$ . Assim, o coeficiente da coordenada temporal fica:

$$\left( 1 - \frac{2m}{r} \right) = 1 - \frac{2m}{\rho \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^2} = \frac{(1 - m/2\rho)^2}{(1 + m/2\rho)^2}.$$

Voltando ao elemento de linha,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{(1 - m/2\rho)^2}{(1 + m/2\rho)^2} c^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi^2). \\ ds^2 &= \frac{(1 - m/2\rho)^2}{(1 + m/2\rho)^2} c^2 dt^2 - \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^4 d\sigma^2. \end{aligned}$$

Agora, pondo  $m = 0$ , veja que temos o elemento de linha do espaço-tempo plano  $ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2$ . Para um campo gravitacional fraco, esperamos que  $\frac{m}{\rho} \ll 1$ , então fazemos uma expansão de 1ª ordem em  $\frac{m}{\rho}$ .

$$\begin{aligned} ds^2 &\cong = \left(1 - \frac{m}{\rho}\right) \left(1 - \frac{m}{\rho}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{\rho}\right) d\sigma^2. \\ &\cong \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{\rho}\right) d\sigma^2. \end{aligned}$$

Comparando com o potencial clássico  $\left(\varphi = -\frac{GM}{r}\right)$ , (D'INVERNO, 1992), temos que

$$g_{00} \cong \left(1 + \frac{2m}{\rho}\right) \cong \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{2kM}{c^2\rho}\right).$$

o que nos dá o mesmo valor para  $m$ , ou seja,  $m = \frac{GM}{c^2}$ . Isso nos mostra que a solução de Schwarzschild é válida para qualquer sistema de coordenadas.

### 2.3 O PROBLEMA DE KEPLER DA RELATIVIDADE GERAL E O DESVIO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

Um dos testes da Teoria da Relatividade Geral proposto pelo próprio Einstein era que sua teoria é capaz de resolver o problema do desvio do periélio de Mercúrio.

De acordo com Kepler, a órbita dos planetas em torno do Sol é uma elipse fechada, com o Sol em um dos focos. Mas a influência gravitacional dos outros planetas afeta essa órbita, que não será precisamente elíptica. Na verdade, a trajetória do planeta é uma elipse na qual o semi-eixo maior rotaciona em torno do foco onde se localiza o Sol. Assim, o periélio não acontece sempre no mesmo ponto. A mecânica Newtoniana já previa que um pequeno desvio poderia ocorrer na órbita, mas que seria possível obter esse desvio.

Algumas hipóteses que tentaram explicar esse desvio: (1) deveriam haver erros nos cálculos e uma análise rigorosa poderia encontrá-los, mas mesmo com uma revisão dos cálculos, o erro persistia. (2) Deveria existir um planeta na órbita de Mercúrio produzindo essa perturbação. O suposto planeta foi batizado de Vulcano e várias tentativas de observação foram feitas, todas sem êxito.

Vamos analisar o problema do ponto de vista da relatividade geral. Para isso tomamos o elemento de linha de Schwarzschild (2.4), e lembrando que a órbita deve

seguir uma linha geodésica, temos que  $\delta \int ds = 0$ . Assim

$$\delta \int \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2\right) \right] ds = 0. \quad (2.5)$$

As equações de movimento para  $\theta$ ,  $\phi$ , e  $t$  seguem abaixo:

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \text{sen} \theta \cos \theta \dot{\phi}^2. \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \text{sen}^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (2.8)$$

Para  $r$ , vamos dividir o elemento de linha por  $ds^2$ , obtendo a quarta equação diferencial e assim podemos resolver para  $t, r, \theta, \phi$ .

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2 \theta \dot{\phi}^2\right). \quad (2.9)$$

Na mecânica clássica, a órbita de um corpo está sobre um plano. Nesse caso, tome  $\theta = \pi/2$  e  $\dot{\theta} = 0$  para algum  $s$  inicial.

Na primeira equação de Euler-Lagrange (2.6) assumimos que  $\theta = \pi/2$ . Substituindo na segunda equação de Euler-Lagrange, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (r^2 \dot{\phi}) &= 0 \\ r^2 \dot{\phi} &= h, \text{ com } h \text{ constante} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Integrando a última das equações de Euler-Lagrange, temos

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l \text{ com } l \text{ constante}$$

Vamos substituir esses resultados em (2.9), o que nos dá

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \quad (2.11)$$

Fazendo uma mudança de variável para deixar  $r$  como função de  $\phi$ , onde  $(\cdot)$  significa derivada com respeito a  $\phi$

$$r' = \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}}$$

Da equação (2.10) temos que

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \dot{\phi} r' \\ \dot{r} &= \frac{h}{r^2} r'\end{aligned}\tag{2.12}$$

Então a equação (2.11) fica

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\tag{2.13}$$

Agora, seja  $r = \frac{1}{u}$ . Isso implica que  $r' = \frac{-u'}{u^2}$ . Substituindo, temos

$$\begin{aligned}(1 - 2mu) &= c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu) \\ u'^2 &= \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2}\right) + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\phi = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{du}{\left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} - u^2 + 2mu^3\right)^{1/2}}\tag{2.15}$$

A equação (2.15) é a solução exata do problema, porém, perdemos a visão geométrica da elipse. Para contornar essa situação, diferenciamos (2.14) em  $\phi$  e obtemos

$$2u'u'' = \frac{2m}{h^2} u' - 2uu' + 6mu^2 u'.\tag{2.16}$$

Uma solução é tomar  $u' = 0 \Rightarrow u = \text{constante}, \Rightarrow r = \text{constante}$ . Ou seja, temos nesse caso um movimento circular.

Para  $u' \neq 0$ , podemos fazer

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2,\tag{2.17}$$

que possui estrutura similar para a equação da órbita do problema clássico de Kepler.

Vamos comparar com a derivação da fórmula de Binet para o movimento de uma partícula de massa  $m$  no centro de um campo de força com uma função potencial  $mf(r)$ , (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975), que segue abaixo.

Assumindo que o movimento está no plano, temos que  $\theta = 0$ . A Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] - f(r)\tag{2.18}$$

nos dá as equações de movimento

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - f'(r), \quad (2.19)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = H, \quad H \text{ constante} \quad (2.20)$$

onde  $f'(r) = \frac{df}{dr}$ .

Considere a equação da trajetória  $r = r(\phi)$  e a função  $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$ . Então das equações (2.20) e (2.19) temos, respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = r'(\phi) \frac{H}{r^2} = -Hu'(\phi), \text{ onde } u'(\phi) = \frac{du}{d\phi} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= -H^2 u''(\phi) u^2 = H^2 u^3(\phi) - f'(r) \\ u'' + u &= \frac{1}{H^2} \frac{f'(r)}{u^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

que é a Fórmula de Binet para o caso geral.

Para o caso Newtoniano,  $f(r) = \frac{GM}{r}$  implica que

$$u'' + u = -\frac{GM}{H^2}, \quad (2.22)$$

$$H = r^2 \frac{d\phi}{dt} = \text{constante} \quad (2.23)$$

Comparando com (2.17), temos

$$\frac{m}{h^2} = \frac{kM}{c^2 r^4 (d\phi/ds)^2} = \frac{kM}{c^2 r^4 (d\phi/dt)^2 (dt/ds)^2}. \quad (2.24)$$

Para movimentos lentos em campos gravitacionais fracos,  $(dt/ds)^2 = \frac{1}{c^2}$ . Então

$$\frac{m}{h^2} \approx \frac{kM}{r^4 (d\phi/dt)^2} = \frac{kM}{H^2}. \quad (2.25)$$

Veja que a equação clássica (2.22) é diferente da relativística (2.17) pela adição do termo  $3mu^2$ . Esperamos que o termo  $3mu^2$  seja pequeno em relação ao termo constante  $\frac{m}{h^2}$ , cuja razão é  $3h^2u^2$ . Substituindo (2.10) temos

$$3r^2 \dot{\phi}^2 \cong 3 \left[ r \frac{d\phi}{dt} \right]^2 \frac{1}{c^2}. \quad (2.26)$$

onde  $r(d\phi/dt)$  é a velocidade lateral (velocidade perpendicular a  $r$ ). Temos então para Mercúrio o valor numérico de

$$3v_{lateral}^2/c^2 = 7,7 \times 10^{-8}.$$

A equação (2.17) pode ser interpretada como a equação de Binet com potencial  $f(r) = \frac{-kM}{r} - \frac{\gamma}{r^3}$ , com  $\gamma = mH^2 = kMh^2$

$$f(r) = \frac{-kM}{r} \left( 1 + \frac{h^2}{r^2} \right).$$

Se  $v_l$  é a velocidade lateral,  $u^2 h^2 = (1/r^2) h^2 \cong (v_l/c)^2$ , então

$$f(r) \cong \frac{-kM}{r} \left( 1 + \left( \frac{v_l}{c} \right)^2 \right).$$

Se o movimento for aproximadamente circular,  $v_l = \frac{2\pi r}{T}$ . Da 3ª Lei de Kepler,  $\frac{r^3}{T^3}$  é constante, então  $r(v/c)^2 = C$  e

$$f(r) \cong \frac{-kM}{r} \left( 1 + \frac{C}{r} \right),$$

sem a velocidade angular. Ou seja, temos aqui uma correspondência entre mecânica clássica e relatividade geral.

Sendo assim, vamos aplicar a equação (2.17) para o caso do periélio de Mercúrio. Seja  $A = \frac{m}{h^2} \cong \frac{kM}{H^2}$  e  $\varepsilon = 2mA \cong \frac{3k^2 M^2}{c^2 H^2}$  adimensional. A equação (2.17) se torna

$$u'' + u = A + \frac{\varepsilon u^2}{A} \quad (2.27)$$

cuja solução é do tipo

$$u(\phi) = u_0(\phi) + \varepsilon v(\phi) + O(\varepsilon^2). \quad (2.28)$$

Substituindo, temos:

$$u_0'' + \varepsilon v' + u_0 + \varepsilon v = A + \varepsilon \frac{u_0^2}{A} + O(\varepsilon^2). \quad (2.29)$$

Tomando os termos sem  $\varepsilon$ , temos

$$u_0'' + u_0 = A \quad (2.30)$$

cuja solução é

$$u_0 = A + B \cos(\phi + \delta), \text{ com } B \text{ e } \delta \text{ constantes arbitrárias.} \quad (2.31)$$

E assim, chegamos em

$$u_0 = A + B \cos(\phi), \text{ equação da elipse.} \quad (2.32)$$



Tomando os termos de  $\varepsilon$  em (2.29)

$$\begin{aligned} v'' + v &= A + 2B \cos(\phi) + \frac{B^2}{A} \cos^2(\phi) \\ &= \left(A + \frac{B}{2A}\right)^2 + 2B \cos(\phi) + \frac{B^2}{2A} \cos(2\phi). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Precisamos apenas da solução homogênea e como (2.33) é linear em  $v$ , podemos escrever  $v = v_a + v_b + v_c$ , onde  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  são soluções das equações

$$\begin{aligned} v_a'' + v_a &= A + \frac{B^2}{2A}, \\ v_b'' + v_b &= 2B \cos(\phi), \\ v_c'' + v_c &= \frac{B^2 \cos(2\phi)}{2A}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} v_a &= A + \frac{B^2}{2A}, \\ v_b &= B\phi \operatorname{sen}(\phi) \\ v_c &= \frac{-B^2}{6A} \cos(2\phi), \end{aligned} \quad (2.35)$$

e então a solução é  $v = v_a + v_b + v_c$ :

$$v = A + \frac{B^2}{2A} + B\phi \operatorname{sen}(\phi) - \frac{B^2}{6A} \cos(2\phi).$$

Então, para  $u = u_0 + \varepsilon v$  temos

$$u = \left(A + \varepsilon A + \frac{\varepsilon B^2}{2A}\right) + \left(B \cos(\phi) - \frac{\varepsilon B^2}{6A} \cos(2\phi)\right) + \varepsilon B\phi \operatorname{sen}(\phi). \quad (2.36)$$

Com essa solução, podemos calcular o desvio do periélio. Como o único termo não periódico é  $\varepsilon B\phi \operatorname{sen}(\phi)$ , a irregularidade ocorre por esse termo. Veja que para uma primeira ordem de  $\varepsilon$

$$\cos(\phi - \varepsilon\phi) = \cos(\phi) \cos(\varepsilon\phi) + \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\varepsilon\phi) = \cos(\phi) + \varepsilon\phi \operatorname{sen}(\phi) \quad (2.37)$$

e a solução pode ser escrita como segue

$$u = A + B \cos(\phi - \varepsilon\phi) + \varepsilon \left(A + \frac{b^2}{2A} - \frac{B^2}{6A} \cos(2\phi)\right). \quad (2.38)$$

Aqui,  $A + B \cos(\phi)$  fornece uma base elíptica, e  $\varepsilon \left(A + \frac{b^2}{2A} - \frac{B^2}{6A} \cos(2\phi)\right)$  fornece variações periódicas na distância radial. A solução então é do tipo

$$u = A + B \cos(\phi - \varepsilon\phi) + (\text{termos periódicos de ordem } \varepsilon). \quad (2.39)$$

O periélio ocorre quando  $r$  é mínimo (ou  $u$  é máximo). Derivando  $u$  com respeito a  $\phi$  e igualando a zero

$$\phi(1 - \varepsilon) = 2\pi n \quad \text{ou} \quad \phi = 2\pi n(1 + \varepsilon). \quad (2.40)$$

Então periélios sucessivos ocorrem em intervalos de

$$\Delta\phi = 2\pi(1 + \varepsilon).$$

O desvio do periélio por revolução é dado por

$$\delta\phi = 2\pi\varepsilon = 2\pi \left( \frac{3k^2 M^2}{c^2 H^2} \right) \quad (2.41)$$

que está em concordância com a observação do periélio de Mercúrio. Esse resultado foi o primeiro grande teste da Relatividade Geral.

## 2.4 MOMENTO QUADRUPOLAR DO SOL E O MOVIMENTO PERIÉLICO

Além da hipótese do planeta Vulcano para o desvio do periélio de Mercúrio, outra hipótese é que esse desvio seria explicado pelo momento quadrupolar do Sol.

Sendo assim, vamos agora analisar o potencial criado por uma esfera um pouco alargada no equador. O potencial depende apenas de  $r$  e  $\theta$  e não deve mudar em qualquer ponto do plano equatorial. Seja  $f(r, \theta)$  o potencial em harmônicos esféricos (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975)

$$f(r, \theta) = -\frac{kM}{r} \left[ 1 + D \frac{3 \cos^2(\theta) - 1}{r^2} \right] + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (2.42)$$

O potencial usual da esfera foi corrigido adicionando o termo quadrupolo. Assumindo que os planetas tem suas órbitas no plano elíptico onde  $\theta = \pi/2$  o potencial fica

$$f(r) = -\frac{kM}{r} - \frac{B}{r^3}. \quad (2.43)$$

Da fórmula de Binet (2.21), temos a equação diferencial para a função  $u(\phi) = r(\phi)^{-1}$

$$u'' + u = \frac{1}{u^2 H^2} f'(r) = \frac{1}{H^2} (kM + 3Bu^2) = A + \frac{\varepsilon}{A} u^2, \quad (2.44)$$

onde  $H = r^2(d\phi/dt)$ ,  $A = \frac{kM}{H^2}$  e  $\varepsilon = \frac{3kM}{H^4} B$ .

Aqui,  $\varepsilon$  é muito pequeno pois  $B$  depende da deformação da esfera, que também é muito pequena. Como  $\delta\phi = 2\pi\varepsilon \Rightarrow \delta\phi = \frac{6\pi kM}{h^4}B$ . Assim, o desvio da órbita é

$$S = \frac{\delta\phi}{T} = \frac{6\pi kM}{H^4 T} B. \quad (2.45)$$

Agora, se  $r$  é a principal distância do planeta ao Sol, integrando  $r^2 \frac{d\phi}{dt} = H$  temos  $2\pi r^2 = HT$ , o que implica em

$$S = 6\pi kMB \frac{T^3}{(2\pi)^4 r^8}. \quad (2.46)$$

Da 3ª Lei de Kepler,  $T^2/r^3 = C$  constante, então

$$S = \left( \frac{3kMBC^{3/2}}{(2\pi)^3} \right) r^{-7/2}. \quad (2.47)$$

Como apenas  $r$  muda de planeta para planeta, o quadrupolo deve variar como  $r^{-7/2}$ . Vamos comparar com a relatividade geral. Lembrando que  $\delta\phi = 2\pi \left( \frac{3k^2 M^2}{c^2 H^2} \right)$ , temos

$$S = \frac{6\pi k^2 M^2}{c^2} \frac{1}{H^2 T} = \frac{3k^2 M^2 C^{1/2}}{2\pi c^2} r^{-5/2}.$$

Ou seja, o periélio deve variar com  $r^{-5/2}$  na relatividade geral. Devemos então levar em consideração os dois efeitos para a fazer medições

$$S = \frac{3\lambda k^2 M^2 C^{1/2}}{2\pi c^2} r^{-5/2} + \frac{3kMBC^{3/2}}{(2\pi)^3} r^{-7/2} \quad (2.48)$$

onde  $\lambda$  e  $B$  devem ser obtidos experimentalmente de dois planetas.

A dependência de  $r$  nos efeitos relativísticos é diferente dos efeitos do quadrupolo. A separação dos efeitos relativísticos e dos efeitos do quadrupolo nas medições ainda não é possível, mas medições cada vez mais precisas serão possíveis com o radar planetário de reflexão (SHAPIRO, 1966).

## 2.5 A TRAJETÓRIA DO RAIOS DE LUZ EM UM CAMPO DE SCHWARZSCHILD

Continuando nossos estudos sobre a solução de Schwarzschild, vamos considerar agora a trajetória de uma raio de luz sobre esse campo. Nesse caso, assumimos que a trajetória é uma geodésica nula e assim  $ds^2 = 0$ , ou seja, não podemos utilizar o parâmetro  $s$ . Para contornar esse problema, usaremos o conceito de transporte paralelo, ou seja, que

um vetor  $dx^\alpha/dq$  seja deslocado paralelamente de um parâmetro  $q$  de acordo com a lei geral

$$\frac{d}{dq} \left( \frac{dx^\alpha}{dq} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dq} \frac{dx^\gamma}{dq} = 0, \quad (2.49)$$

em que no deslocamento paralelo esse vetor deve conservar seu comprimento.

A equação diferencial para geodésicas nulas é equivalente ao problema variacional (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975)

$$\delta \int g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dq} \frac{dx^\beta}{dq} dq = 0. \quad (2.50)$$

Fazendo uma variação em  $q$ , temos as equações do movimento na métrica de Schwarzschild.

$$r^2 \dot{\phi} = \tilde{h} = \text{constante} \quad \text{e} \quad \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} = \dot{l} = \text{constante}. \quad (2.51)$$

Assumindo  $\theta = \pi/2$  e como  $ds^2 = 0$ , temos

$$0 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} c^2 \dot{l}^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\tilde{h}^2}{r^2}. \quad (2.52)$$

Fazendo  $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$ ,

$$0 = c^2 \dot{l}^2 - \tilde{h}^2 u'^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - 2mu). \quad (2.53)$$

Diferenciando com respeito a  $\phi$

$$u'(u'' + u - 3mu^2) = 0. \quad (2.54)$$

Descartando a solução  $u = \text{constante}$ , temos

$$u'' + u = 3mu^2, \quad (2.55)$$

que é a equação da trajetória do raio de luz.

Pode-se deduzir a equação (2.55) a partir da equação  $u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2$ . De fato, substituindo  $m$  e o valor exato de  $m/h^2$

$$u'' + u = \frac{kM}{c^2 r^4} \left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 + \frac{3kMu^2}{c^2}.$$

Essa equação para a geodésica segue direto do problema variacional (2.5). Tomando  $ds^2 = 0$  e que  $d\phi$  em geral é não nulo

$$\frac{m}{h^2} = \frac{kM}{c^2 r^4} \left( \frac{ds}{d\phi} \right)^2 = 0$$

o que implica em  $u'' + u = 3mu^2$ . Além disso,  $3mu^2$  é muito pequeno comparado com os outros termos. Veja que considerando  $3mu$  e usando  $r_s = 2m$ , temos  $\frac{3}{2} \left( \frac{r_s}{r} \right)$ . Como  $r_s$  para o Sol é da ordem de quilômetros, para fora do Sol, a razão acima é muito pequena,  $3m = \varepsilon$

$$u'' + u = \varepsilon u^2. \quad (2.56)$$

Suponha uma solução para a equação acima na forma

$$u = u_0 + \varepsilon v + O(\varepsilon^2) \quad \varepsilon = 3m. \quad (2.57)$$

Substituindo temos

$$u_0'' + u_0 + \varepsilon v'' + \varepsilon v = \varepsilon u_0 + O(\varepsilon^2). \quad (2.58)$$

Os termos sem  $\varepsilon$  nos dão

$$\begin{aligned} u_0'' + u_0 &= 0, \\ u_0 &= A \operatorname{sen}(\phi - \phi_0) \end{aligned}$$

que podemos ajustar os eixos das coordenadas para termos

$$u_0 = A \operatorname{sen}(\phi) \quad (2.59)$$

ou na forma radial

$$r \operatorname{sen}(\phi) = \frac{1}{A}. \quad (2.60)$$

Veja que  $r \operatorname{sen}(\phi) = y$ , ou seja, para a 1ª aproximação não há desvio do raio de luz. Veja também que por (2.60) temos que  $\frac{1}{A}$  é a distância mais próxima da origem (o Sol).

$$u_0 = \frac{1}{r_0} \operatorname{sen}(\phi) \quad \text{com} \quad r_0 = \frac{1}{A}. \quad (2.61)$$

Agora, analisando os termos em  $\varepsilon$

$$v'' + v = u_0^2 = \frac{1}{r_0^2} \operatorname{sen}^2(\phi) = \frac{1}{2r_0^2} (1 - \cos(2\phi)). \quad (2.62)$$

Vamos usar como solução

$$v = \alpha + \beta \cos(2\phi). \quad (2.63)$$

Diferenciando, temos

$$v'' = -4\beta \cos(2\phi) \Rightarrow \quad (2.64)$$

$$v'' + v = \alpha - 3\beta \cos(2\phi) \quad (2.65)$$

Comparando com os termos em (2.62), a equação (2.65) é solução se

$$\alpha = \frac{1}{2r_0^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{6r_0^2}. \quad (2.66)$$

Logo

$$v = \frac{1}{2r_0^2} + \frac{1}{6r_0^2} \cos(2\phi), \quad (2.67)$$

$$u = \frac{1}{r_0} \sin(\phi) + \frac{\varepsilon}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) \right) \quad (2.68)$$

Aqui podemos ver que a trajetória sofre uma perturbação de ordem  $\varepsilon$ , o que provoca o desvio. A trajetória é assíntota longe o suficiente do campo, quando se aproxima sofre um desvio e depois volta a ser assíntota. Isso implica que  $\phi = \pi$  ou  $0$ .

Seja agora  $\phi$  muito pequeno tal que  $\phi \rightarrow 0$  numa distância muito grande, ou seja,  $u = 0$ . Seja  $\delta$  o ângulo com o eixo  $x$ . Então podemos aproximar  $\sin(\phi)$  por  $\delta$  e  $\cos(2\phi)$  por  $1$ . Substituindo em (2.68) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r_0} \delta + \frac{4}{3} \frac{\varepsilon}{2r_0^2} \quad \text{ou} \\ \delta &= \frac{-2\varepsilon}{3r_0} = \frac{-2m}{r_0} \end{aligned} \quad (2.69)$$

O sinal de (-) indica que a trajetória foi dobrada em direção ao Sol. Tomando  $\phi = \pi - \delta$ , temos  $\delta = \frac{-2m}{r_0}$ . A deflexão total será

$$\Delta = \frac{4m}{r_0} = \frac{4GM}{c^2 r_0} \quad (2.70)$$

Assim, a Relatividade Geral mostra que a luz sofre um desvio no campo gravitacional. Uma maneira de observar o efeito previsto foi de analisar as posições das estrelas durante a noite e comparar com as suas posições durante um eclipse, onde o Sol causaria o desvio dos raios provenientes de algumas estrelas. Em 1919, uma equipe de observadores veio para o Brasil, mais precisamente na cidade de Sobral-CE, onde puderam fotografar o eclipse e após a análise das imagens, confirmaram o desvio previsto pela Relatividade Geral (ISAACSON et al., 2007).

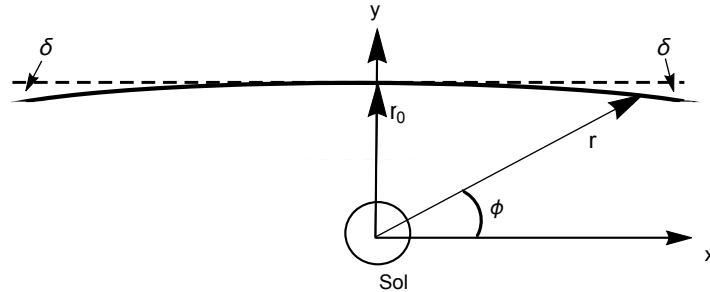


Figura 1 – Desvio do raio de luz causado pela curvatura que o Sol causa no espaço-tempo.

## 2.6 O TEMPO DE VIAGEM DA LUZ EM UM CAMPO DE SCHWARZSCHILD

O desvio sofrido pela luz como mostrado anteriormente provoca um atraso no seu tempo de viagem. Se considerarmos a viagem de um planeta a outro, a curvatura da trajetória não contribui para um atraso pois será praticamente retilínea. Para ter esse atraso no tempo é necessário um objeto capaz de fazer uma curvatura considerável no espaço-tempo.

Vamos colocar um raio de luz que passe perto o suficiente do Sol para sofrer os efeitos da curvatura. Vamos colocar também essa trajetória paralela ao eixo  $x$  :  $r \sin(\phi) = r_0$  e  $\theta = \pi/2$ . Veja que  $r_0$  é a distância mais próxima do Sol.

Para um elemento de linha tipo luz temos

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\phi^2. \quad (2.71)$$

Da equação  $r \sin\phi = r_0$  podemos escrever

$$r^2 d\phi^2 = \frac{r_0^2 dr^2}{r^2 - r_0^2}.$$

Extraindo a raiz e expandindo até a primeira ordem de  $m$ .

$$\begin{aligned}
 c^2 dt^2 &= \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} + \frac{r_0^2 dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (r^2 - r_0^2)} \\
 &= \frac{dr^2 (1 - 2mr_0^2/r^3)}{\left(1 - r_0^2/r^2\right) \left(1 - 2m/r\right)^2} \\
 c dt &= \frac{dr}{\sqrt{1 - r_0^2/r^2}} \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{mr_0^2}{r^3}\right). \tag{2.72}
 \end{aligned}$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned}
 ct &= \left(\sqrt{r_p^2 - r_0^2} + \sqrt{r_e^2 - r_0^2}\right) + 2m \ln \frac{\left(\sqrt{r_p^2 - r_0^2} + r_p\right) \left(\sqrt{r_e^2 - r_0^2} + r_e\right)}{r_0^2} \\
 &\quad - m \left(\frac{\sqrt{r_p^2 - r_0^2}}{r_p} - \frac{\sqrt{r_e^2 - r_0^2}}{r_e}\right). \tag{2.73}
 \end{aligned}$$

Onde a integral vai de  $r = r_0$  a  $r_p$  (raio do planeta) e  $r = r_0$  a  $r_e$  (raio da Terra (Earth)), ou seja, do ponto da trajetória mais próximo do Sol até o planeta e depois novamente do ponto da trajetória mais próxima do Sol até a Terra. O primeiro termo corresponde ao espaço plano, e os dois últimos no aumento da distância.

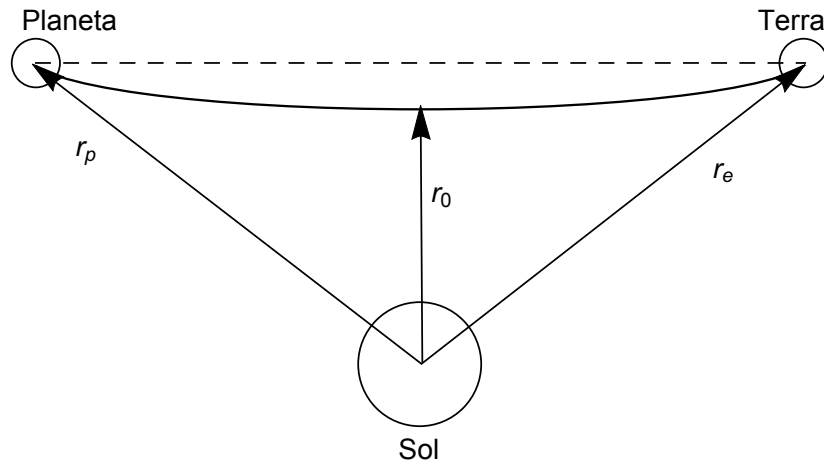


Figura 2 – O aumento da trajetória do raio de luz implica num tempo maior para a recepção do sinal.

No sistema solar podemos tomar  $r$  como coordenada radial e  $t$  como tempo físico. A principal contribuição no tempo da viagem vem da trajetória próxima ao Sol, onde há maior desvio no caminho.



Assim, mostramos que um campo gravitacional altera a trajetória de corpos e também da luz. Como  $c$  é a maior velocidade possível, uma trajetória maior implica que a luz levará mais tempo para chegar ao seu destino, dentro de um espaço-tempo curvo. Este foi um dos testes da relatividade geral discutido por (SHAPIRO, 1972).

### 3 O CAMPO DE UMA MASSA PONTUAL CARREGADA

#### 3.1 A SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Depois de toda a análise anterior feita em um campo de Schwarzschild, vamos investigar agora como é um espaço tempo onde além da massa, o objeto possui carga elétrica. Vamos considerar que existe uma simetria esférica e que não há rotação como anteriormente. Assim, não há campo magnético envolvido, apenas o campo elétrico. Nesse caso, o tensor energia-momento não é mais nulo e o tensor de Einstein fica na forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2}T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Agora, lembrando que devido a anti-simetria o traço do tensor eletromagnético é nulo, (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975),  $T = 0$ , vamos fazer uma manipulação no tensor de Einstein.

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) &= g^{\mu\nu} \left( -\frac{8\pi k}{c^2} \right) T_{\mu\nu} \\ R - 2R &= -\frac{8\pi k}{c^2}T \\ R &= \frac{8\pi k}{c^2}T. \end{aligned}$$

Substituindo no tensor, temos que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= -\frac{8\pi k}{c^2}T_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \frac{8\pi k}{c^2} g_{\mu\nu} T - \frac{8\pi k}{c^2} T_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= \frac{8\pi k}{c^2} \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Como  $T = 0$  e as equações de  $R_{\mu\nu}$  já foram encontradas, resta agora encontrar as equações para  $T_{\mu\nu}$ . Assim, nosso trabalho se resume a resolver (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975)

$$R_{\mu\nu} = CT_{\mu\nu} = \frac{C}{c^2} \left[ F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] \quad (3.2)$$

onde  $C$  é uma constante.

Da relatividade especial (JACKSON, 1999), temos que

$$F_{\mu\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_z & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Como estamos trabalhando com simetria esférica, dependemos apenas de  $r$ , e como estamos supondo que nesse caso não há movimento da carga pontual, temos que  $\vec{B} = 0$ , ou seja:

$$F_{\mu\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -E_r & 0 & 0 \\ E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Temos também que a métrica nesse caso é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

e sua inversa é

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Como queremos  $F^{\mu\tau}$ , vamos subir os índices de  $F_{\mu\tau}$  utilizando a métrica e sua inversa, ou seja, resolver  $F^{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\beta\tau} F_{\mu\tau}$ , o que nos dá

$$F^{\mu\tau} = e^{-(\nu+\lambda)} E \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Agora, da definição do tensor de força de campo duplo,  $\mathcal{F}^{\mu\tau} = \sqrt{-g}F^{\mu\tau}$ , e como  $\sqrt{-g} = (e^{\nu+\lambda}r^4 \text{sen}^2(\theta))^{1/2}$ , então

$$\mathcal{F}^{\mu\tau} = e^{-(\nu+\lambda)/2}r^2 \text{sen}(\theta)E \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Ainda nas equações de Maxwell,  $\partial_\tau(F^{\mu\tau}) = \partial_\tau(\sqrt{-g}F^{\mu\tau}) = 0$ , e como  $E$  nesse caso depende apenas de  $r$ , tomamos  $\tau = 1$ , assim

$$\partial_1 \mathcal{F}^{01} = [e^{-(\nu+\lambda)/2}r^2 E \text{sen}(\theta)]' = 0 \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow e^{-(\nu+\lambda)/2}r^2 E \text{sen}(\theta) = \text{constante} = \varepsilon$$

$$E = e^{(\nu+\lambda)/2} \frac{\varepsilon}{r^2}. \quad (3.10)$$

Para um observador longe o suficiente tal que  $r$  tende a infinito, temos que  $\nu, \lambda \rightarrow 0$  e aí o campo elétrico é o do espaço-tempo plano. Sendo assim a equação (3.10) possui a forma usual, com  $\varepsilon = \frac{Q}{4\pi}$ , onde  $Q$  é a carga da partícula.

Agora resta encontrar  $F_\tau^\alpha = g^{\alpha\mu}F_{\mu\tau}$

$$F_\tau^\alpha = E \begin{bmatrix} 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Podemos assim calcular  $T_{\mu\tau} = \frac{1}{c^2} [F_{\mu\alpha}F_\tau^\alpha + \frac{1}{4}g_{\mu\tau}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}]$  Temos

$$F_{\mu\alpha}F_\tau^\alpha = e^{(\nu+\lambda)/2} \frac{\varepsilon^2}{r^4} \begin{bmatrix} -e^{(\nu-\lambda)/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\nu-\lambda)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = Tr \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon^2}{r^4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{2\varepsilon^2}{r^4}$$

e

$$T_{\mu\tau} = \frac{\varepsilon^2}{2c^2 r^4} \begin{bmatrix} -e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, vamos igualar os termos  $R_{ii}$  com os termos  $T_{ii}$  e resolver as equações.

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[ \frac{-\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{4} \right] \quad (3.12)$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \quad (3.13)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r\nu'}{2} - \frac{r\lambda'}{2} \right] - 1 \quad (3.14)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta) \quad (3.15)$$

$$R_{\mu\tau} = 0, \text{ para } \mu \neq \tau$$

Multiplicando a equação (3.12) por  $e^{-(\nu-\lambda)}$  e somando com (3.13), temos

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + \nu = \text{constante}. \quad (3.16)$$

Para  $r \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  e  $\nu \rightarrow 0$ , logo,  $\lambda = -\nu$ . Substituindo na equação (3.14), temos

$$\begin{aligned} e^\nu [1 + r\nu'] &= 1 + \frac{C\varepsilon^2}{2c^2 r^2} \\ (re^\nu)' &= 1 + \frac{C\varepsilon^2}{2c^2 r^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow e^\nu = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{C\varepsilon^2}{2c^2 r^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{kQ^2}{4\pi c^4 r^2}. \quad (3.18)$$

Onde a constante de integração é  $2m$  pois caso tivéssemos  $\varepsilon = 0$ , então  $R_{\mu\nu} = 0$  e assim teríamos o caso de Schwarzschild. A equação (3.15) nos dá o mesmo resultado, mostrando que a solução é consistente. Portanto, na teoria eletromagnética de Maxwell, levando em consideração as simetrias esféricas para o caso estático o elemento de linha é

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{C\varepsilon^2}{2c^2 r^2} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{C\varepsilon^2}{2c^2 r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \quad (3.19)$$

onde  $m = \frac{kM}{c^2}$  e  $C = \frac{-8\pi k}{c^2}$ .

### 3.2 ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

A equação (3.19) nos dá o elemento de linha para um Buraco Negro sem rotação com carga elétrica, chamado de Buraco Negro de Reissner-Nordström, que utiliza a eletrodinâmica de Maxwell. Como sabemos, a teoria Maxwelliana possui uma divergência na origem para um potencial de Coulomb clássico (JACKSON, 1999), (SOUZA et al., 2016).

A eletrodinâmica de Podolsky é uma teoria que leva em consideração um modo massivo para fóton e também possui a simetria de Lorentz, a qual chamamos de Eletrodinâmica Generalizada (PODOLSKY, 1942), (PODOLSKY; KIKUCHI, 1944), (PODOLSKY; SCHWED, 1948). O modo massivo dado pelo parâmetro  $a$ , que é inversamente proporcional a  $m$ , ou seja, a massa do fóton. Esperamos que a eletrodinâmica de Podolsky corrija a divergência do campo elétrico de Maxwell próximo a origem, o que se mostrará muito útil adiante.

Vamos desenvolver agora os conceitos da eletrodinâmica de Podolsky para que possamos aplicar depois como fundo em um espaço-tempo com carga elétrica e sem rotação. Os cálculos aqui mostrados podem ser encontrados em (SOUZA et al., 2016).

A lagrangiana de Podolsky é dada por

$$L \equiv L_P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\xi F_\nu^\xi, \quad (3.20)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Aplicando o princípio da mínima ação para  $L_P = L(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu)$ .

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\partial\Omega} \delta L(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, \partial_\rho \partial_\nu A_\mu) d^4x \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu) \right] d^4x \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu(\delta A_\mu) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \partial_\rho \partial_\nu(\delta A_\mu) \right] d^4x. \end{aligned}$$

Usando a regra do produto no segundo e terceiro termos do integrando, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right) - \partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \delta A_\mu \right. \\ &\quad \left. + \partial_\rho \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu(\delta A_\mu) \right] - \partial_\rho \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right) \partial_\nu(\delta A_\mu) \right] d^4x. \end{aligned}$$

Usando a regra do produto no último termo do integrando e substituindo na la-

grangiana, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta A_\mu - \partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \delta A_\mu + \partial_\nu \left[ \partial_\rho \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right) \right] (\delta A_\mu) \right] d^4x \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[ \partial_\nu \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right) + \partial_\rho \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu (\delta A_\mu) \right] - \partial_\nu \left[ \partial_\rho \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho \partial_\nu A_\mu)} \right) (\delta A_\mu) \right] \right] d^4x. \end{aligned}$$

A segunda integral se refere aos termos de superfície. Assim, do princípio variacional obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial A_\lambda} - \partial_\gamma \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma A_\lambda)} \right) + \partial_\sigma \left[ \partial_\rho \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \partial_\rho A_\lambda)} \right) \right] = 0. \quad (3.21)$$

Para melhor visualização, vamos reescrever a Lagrangiana tomando o cuidado de não misturar os índices

$$\begin{aligned} L = L_P &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\psi} (\partial_\xi A_\psi - \partial_\psi A_\xi) \\ &+ \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\phi} (\partial_\alpha \partial_\delta A_\phi - \partial_\alpha \partial_\phi A_\delta) \eta^{\theta\tau} (\partial_\tau \partial_\theta A_\beta - \partial_\tau \partial_\beta A_\theta). \end{aligned}$$

Analisando os termos, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\lambda} = \frac{\partial}{\partial A_\lambda} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} \partial_\theta F_\beta^\theta \right) = 0, \quad (3.22)$$

pois não há dependência de  $A_\lambda$  em  $L_p$ . Analisando o segundo termo temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma A_\lambda)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\gamma A_\lambda)} \left( -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\psi} (\partial_\xi A_\psi - \partial_\psi A_\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\phi} (\partial_\alpha \partial_\delta A_\phi - \partial_\alpha \partial_\phi A_\delta) \eta^{\theta\tau} (\partial_\tau \partial_\theta A_\beta - \partial_\tau \partial_\beta A_\theta) \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\lambda - \delta_\nu^\gamma \delta_\mu^\lambda) \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\psi} (\partial_\xi A_\psi - \partial_\psi A_\xi) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \eta^{\mu\xi} \eta^{\nu\psi} (\delta_\xi^\gamma \delta_\xi^\lambda - \delta_\psi^\gamma \delta_\psi^\lambda) \\ &= -\frac{1}{4} (F^{\gamma\lambda} - F^{\lambda\gamma}) - \frac{1}{4} (F^{\gamma\lambda} - F^{\lambda\gamma}) \\ &= -F^{\gamma\lambda}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\gamma A_\lambda)} = -F^{\gamma\lambda} \quad (3.23)$$

Para o terceiro termo temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial(\partial_\rho\partial_\nu A_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho\partial_\nu A_\mu)} \left( -\frac{1}{4} (\partial_\zeta A_\omega - \partial_\omega A_\zeta) \eta^{\zeta\xi} \eta^{\omega\psi} (\partial_\xi A_\psi - \partial_\psi A_\xi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\phi} (\partial_\alpha \partial_\delta A_\phi - \partial_\alpha \partial_\phi A_\delta) \eta^{\theta\tau} (\partial_\tau \partial_\theta A_\beta - \partial_\tau \partial_\beta A_\theta) \right) \\
&= \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\theta} \eta^{\theta\tau} \partial_\tau F_{\theta\beta} (\delta_\alpha^\rho \delta_\delta^\nu \delta_\phi^\mu - \delta_\alpha^\rho \delta_\phi^\nu \delta_\delta^\mu) + \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\theta} \eta^{\theta\tau} \partial_\alpha F_{\delta\phi} (\delta_\tau^\rho \delta_\theta^\nu \delta_\beta^\mu - \delta_\tau^\rho \delta_\beta^\nu \delta_\theta^\mu) \\
&= \frac{a^2}{2} \eta^{\alpha\delta} \eta^{\beta\theta} \eta^{\theta\tau} [\partial_\tau F_{\theta\beta} \delta_\alpha^\rho \delta_\delta^\nu \delta_\phi^\mu - \partial_\tau F_{\theta\beta} \delta_\alpha^\rho \delta_\phi^\nu \delta_\delta^\mu + \partial_\alpha F_{\delta\phi} \delta_\tau^\rho \delta_\theta^\nu \delta_\beta^\mu - \partial_\alpha F_{\delta\phi} \delta_\tau^\rho \delta_\beta^\nu \delta_\theta^\mu] \\
&= \frac{a^2}{2} [\eta^{\rho\nu} (\partial_\tau F^{\tau\mu} + \partial_\alpha F^{\alpha\mu}) - \eta^{\rho\mu} (\partial_\tau F^{\tau\nu} + \partial_\alpha F^{\alpha\nu})] \\
&= a^2 [\eta^{\rho\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\mu} - \eta^{\rho\mu} \partial_\alpha F^{\alpha\nu}].
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma\partial_\rho A_\lambda)} = a^2 [\eta^{\sigma\rho} \partial_\alpha F^{\alpha\lambda} - \eta^{\sigma\lambda} \partial_\alpha F^{\alpha\rho}]. \quad (3.24)$$

Voltando à equação de Euler-Lagrange, substituindo as equações (3.22), (3.23) e (3.24) em (3.21), e ainda lembrando que o segundo termo de (3.24) se anula

*Demonstração.* Tomando as derivadas na equação (3.21)

$$\partial_\sigma \partial_\rho \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma\partial_\rho A_\lambda)} \right] = a^2 \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\lambda} - a^2 \eta^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho}$$

temos que

$$\partial_\sigma \partial_\rho \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma\partial_\rho A_\lambda)} \right] = a^2 \square \partial_\alpha F^{\alpha\lambda} - a^2 \partial^\lambda (\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho})$$

onde  $\square$  é o operador D'Alambertiano definido como  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$  e

$$a^2 \partial^\lambda (\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho}) = 0$$

De fato, dado que  $\partial_\rho \partial_\alpha = \partial_\alpha \partial_\rho$  e  $F^{\alpha\rho} = -F^{\rho\alpha}$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho} &= \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\alpha + \partial_\alpha \partial_\rho) F^{\alpha\rho} \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho} + \partial_\alpha \partial_\rho F^{\alpha\rho}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho} + \partial_\rho \partial_\alpha F^{\rho\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho} - \partial_\rho \partial_\alpha F^{\alpha\rho}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□



Temos então

$$-\partial_\gamma (-F^{\gamma\lambda}) + a^2 \square \partial_\alpha F^{\alpha\lambda} = 0, \quad (3.25)$$

que podemos escrever como

$$(1 + a^2 \square) \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (3.26)$$

Essa é umas das equações de movimento da eletrodinâmica de Podolsky. A segunda dessas equações é

$$\partial_{[\mu} F_{\rho\sigma]} = \partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} = 0. \quad (3.27)$$

Da equação (3.26), e da condição de gauge de Lorentz generalizada (GALVAO; PIMENTEL, 1988)  $(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu = 0$  temos

$$\begin{aligned} (1 + a^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} &= (1 + a^2 \square) \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= (1 + a^2 \square) \square A^\nu - (1 + a^2 \square) \partial_\mu \partial^\nu A^\mu \\ &= (1 + a^2 \square) \square A^\nu - \partial^\nu [(1 + a^2 \square) \partial_\mu A^\mu] \\ &= (1 + a^2 \square) \square A^\nu. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na equação (3.26), obtemos a seguinte equação a ser resolvida.

$$(1 + a^2 \square) \square A^\nu = 0. \quad (3.28)$$

Vamos aplicar a transformada de Fourier de  $A^\mu$  para resolver essa equação

$$\begin{aligned} A^\nu(x^\mu) &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} d^4 p \\ \partial_\rho A^\nu(x^\mu) &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\rho} (-ip_\lambda x^\lambda) d^4 p \\ &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} (-ip_\rho) d^4 p \\ \partial^\rho \partial_\rho A^\nu(x^\mu) &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} \eta^{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (-ip_\lambda x^\lambda) (-ip_\rho) d^4 p \\ &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} \eta^{\rho\nu} (-ip_\nu) (-ip_\rho) d^4 p \\ &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} (-ip^\rho) (-ip_\rho) d^4 p \\ &= \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} (-p^2) d^4 p \end{aligned}$$

Repetindo os passos anteriores e substituindo os resultados na equação (3.28) teremos

$$\int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} (-p^2) d^4p + a^2 \int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} (-p^2) (-p^2) d^4p = 0 \quad (3.29)$$

ou

$$\int \tilde{A}^\nu(p^\mu) e^{-ip_\lambda x^\lambda} [p^2 (1 - a^2 p^2)] d^4p = 0. \quad (3.30)$$

Para satisfazer a integral acima, queremos que

$$p^2 (1 - a^2 p^2) = 0 \quad (3.31)$$

onde uma solução é

$$p^2 = 0. \quad (3.32)$$

A equação (3.32) é chamada de Relação de Dispersão de Maxwell. Lembrando a definição do quadrimomento da relatividade especial  $p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (\epsilon, \vec{p})$ , com a energia  $\epsilon$  e o *momentum*  $\vec{p}$ , então

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p^0 p^0 - p^1 p^1 - p^2 p^2 - p^3 p^3 = \epsilon^2 - \vec{p}^2. \quad (3.33)$$

E então  $p^2 = 0$  nos dá  $\epsilon^2 = \vec{p}^2$ . Comparando com a relatividade especial,  $\epsilon^2 = \vec{p}^2 + m^2$  só é possível se  $m = 0$ , ou seja, na eletrodinâmica de Maxwell, o fóton tem massa nula.

A outra solução de (3.31) é

$$1 - a^2 p^2 = 0 \quad (3.34)$$

que substituindo (3.33) em (3.34) nos dá um modo massivo para o fóton. De fato:

$$\begin{aligned} 1 - a^2(\epsilon^2 - \vec{p}^2) &= 0 \\ a^2(\epsilon^2 - \vec{p}^2) &= 1 \\ \epsilon^2 - \vec{p}^2 &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\epsilon^2 = \vec{p}^2 + \frac{1}{a^2} \quad (3.35)$$

e comparando com a relatividade especial, temos que  $m^2 = \frac{1}{a^2}$ .

Portanto, na teoria eletromagnética de Podolsky, temos um termo  $a$  que nos fornece um modo com massa e um modo sem massa para o fóton.

### 3.3 BURACO NEGRO NA ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

Aqui, vamos investigar melhor a lagrangiana de Podolsky e suas soluções para que possamos aplicá-la em um buraco negro. Mais detalhes dos cálculos apresentados estão disponíveis em (CUZINATTO et al., 2018). Para começar, a lagrangiana de Podolsky é construída sobre as hipóteses:

- 1- Deve ser invariante sobre transformações de Lorentz;
- 2- Deve ser invariante sobre transformações de gauge  $U(1)$  do grupo de simetria  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ ;
- 3- Deve resultar em equações de campo lineares;
- 4- É dependente no campo de gauge e suas duas primeiras derivadas.

A lagrangiana de Podolsky no espaço-tempo plano ( $L_m$ ) é uma combinação dos termos de Maxwell e termos de  $\partial \cdot F \cdot \partial \cdot F$  em Minkowski. Analisando as possibilidades, as não nulas são:

$$\begin{aligned} L_m^{(1)} &= \partial_\beta F^{\alpha\beta} \partial_\gamma F_\alpha^\gamma \\ L_m^{(2)} &= \partial_\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta \\ L_m^{(3)} &= \partial_\beta F^{\alpha\gamma} \partial^\beta F_{\alpha\gamma} \end{aligned}$$

Veja que  $L_m^{(2)} = L_m^{(1)} +$  termos de superfície e  $L_m^{(3)}$  pode ser obtido de  $L_m^{(2)}$  quando a identidade de Bianchi é levada em conta.

*Demonstração.*  $L_m^{(2)} = L_m^{(1)} +$  termos de superfície . De fato,

$$L_m^{(2)} = \partial_\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta$$

mas

$$\partial_\beta (F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta) = \partial_\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta + F^{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma F_\alpha^\beta$$

então

$$\partial_\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta = \partial_\beta (F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta) - F^{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma F_\alpha^\beta$$

o que implica em

$$L_m^{(2)} = \partial_\beta (F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta) - F^{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\gamma F_\alpha^\beta$$

mas

$$\partial_\gamma (F^{\alpha\gamma} \partial_\beta F_\alpha^\beta) = \partial_\gamma F^{\alpha\gamma} \partial_\beta F_\alpha^\beta + F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \partial_\beta F_\alpha^\beta$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} L_m^{(2)} &= \partial_\beta (F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_\alpha^\beta) - \partial_\gamma (F^{\alpha\gamma} \partial_\beta F_\alpha^\beta) + \partial_\gamma F^{\alpha\gamma} \partial_\beta F_\alpha^\beta \\ L_m^{(2)} &= L_m^{(1)} + \text{termos de superfície} \end{aligned}$$

□

E agora para  $L_m^{(3)} = 2L_m^{(2)}$ .

*Demonstração.* Seja

$$\partial_\beta F_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha F_{\gamma\beta} + \partial_\gamma F_{\beta\alpha} = 0$$

que podemos escrever

$$\partial_\beta F_{\alpha\gamma} = -(\partial_\alpha F_{\gamma\beta} + \partial_\gamma F_{\beta\alpha})$$

Como

$$L_m^{(3)} = \partial^\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\beta F_{\alpha\gamma}$$

temos

$$\begin{aligned} L_m^{(3)} &= -(\partial_\alpha F_{\gamma\beta} + \partial_\gamma F_{\beta\alpha}) \partial^\beta F^{\alpha\gamma} \\ &= -(\partial^\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\alpha F_{\gamma\beta} + \partial^\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_{\beta\alpha}) \end{aligned}$$

que pela antissimetria

$$\begin{aligned} L_m^{(3)} &= \partial_\beta F^{\gamma\alpha} \partial_\alpha F_\gamma^\beta + \partial^\beta F^{\alpha\gamma} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \\ L_m^{(3)} &= 2L_m^{(2)} \end{aligned}$$

□

Assim, mostramos que a lagrangiana de Podolsky é única no espaço-tempo plano, dada por

$$L_m = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial_\gamma F_\mu^\gamma \quad (3.36)$$

onde  $\frac{1}{a}$  é um parâmetro de massa.

Vamos agora fazer o acoplamento com o campo gravitacional  $\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$ ,  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ . Como consequência a Lagrangiana fica na forma  $L_m(A, \nabla A, \nabla\nabla A)$ . Agora impomos a simetria

$$\frac{\partial L_m}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial L_m}{\partial (\nabla_\nu A_\mu)} \nabla_\nu (\delta A_\mu) + \frac{\partial L_m}{\partial (\nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu)} \nabla_\lambda \nabla_\nu (\delta A_\mu) = 0 \quad (3.37)$$

onde  $\delta A_\mu = \nabla_\mu \alpha$ . Considerando a independência funcional de  $\alpha$ , temos

$$\frac{L_m}{\partial A_\mu} \nabla_\mu \alpha = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial L_m}{\partial(\nabla_\nu A_\mu)} \nabla_\nu \nabla_\mu \alpha = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial L_m}{\partial(\nabla_\lambda \nabla_\nu A_\mu)} \nabla_\lambda \nabla_\nu \nabla_\mu \alpha = 0 \quad (3.40)$$

Analogamente, para que ocorra no espaço plano, a Equação (3.38) acima mostra que  $L_m$  não depende explicitamente de  $A_\mu$ . De (3.39) nós vemos que  $L_m$  depende de  $\nabla_\mu A_\mu$  apenas numa anti-simetria  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$  e derivadas de  $F_{\mu\nu}$ .

Substituindo as equações (3.38), (3.39) e (3.40) em (3.37), temos que esta equação é satisfeita para todos os termos. Vamos checar agora se  $L_m^{(1)}$ ,  $L_m^{(2)}$ ,  $L_m^{(3)}$  são equivalentes. Pela versão covariante da identidade de Bianchi

$$\nabla_\beta F_{\alpha\gamma} + \nabla_\alpha F_{\gamma\beta} + \nabla_\gamma F_{\beta\alpha} = 0 \quad (3.41)$$

é possível mostrar que  $L_m^{(3)} = 2L_m^{(2)}$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} L_m^{(2)} &= \nabla_\gamma (F_\alpha^\beta \nabla_\beta F^{\alpha\gamma}) - \nabla_\beta (F_\alpha^\beta \nabla_\gamma F^{\alpha\gamma}) \\ &\quad + R_{\sigma\beta} F^{\sigma\alpha} F_\alpha^\beta + R_{\alpha\sigma\beta\gamma} F^{\sigma\gamma} F^{\alpha\beta} + L_m^{(1)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Os dois primeiros termos são de superfície. A não comutatividade das derivadas covariantes implica na presença de dois termos extras.

$$L_m = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{a^2}{2} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} \nabla_\gamma F_\alpha^\gamma + \frac{b^2}{2} \nabla_\beta F^{\alpha\gamma} \nabla^\beta F_{\alpha\gamma} \quad (3.43)$$

e então podemos escrever

$$L_m = -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{(a^2 + 2b^2)}{2} \nabla_\beta F^{\alpha\beta} \nabla_\gamma F_\alpha^\gamma + b^2 (R_{\sigma\beta} F^{\sigma\alpha} F_\alpha^\beta + R_{\alpha\sigma\beta\gamma} F^{\sigma\gamma} F^{\alpha\beta}) \quad (3.44)$$

Essa expressão mostra que a eletrodinâmica de Podolsky obtida pela técnica de Utiyama apresenta dois termos devido ao acoplamento não mínimo em adição ao termo usual obtido em (3.36). Temos então dois casos, com  $b = 0$  e  $b \neq 0$ .

Vamos levar em consideração agora a Ação de Einstein-Podolsky, dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (-R + 4L_m) \quad (3.45)$$

onde  $L_m$  é dado por (3.43). As equações de campo correspondentes são obtidas da variação de  $S$  com respeito ao campo  $A_\mu$  e  $g^{\mu\nu}$ . Variando com respeito a  $A_\mu$  temos

$$\nabla_\nu [F^{\mu\nu} - (a^2 + 2b^2) H^{\mu\nu} + 2b^2 S^{\mu\nu}] = 0 \quad (3.46)$$

onde  $H^{\mu\nu} \equiv \nabla^\mu K^\nu - \nabla^\nu K^\mu$  e  $S^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\sigma} R_\sigma^\nu - F^{\nu\sigma} R_\sigma^\mu + 2R_{\sigma\beta}^{\mu\nu} F^{\beta\sigma}$ , são tensores anti-simétricos, com  $K^\nu = \nabla_\gamma F^{\mu\gamma}$ .

Variando com respeito a  $g^{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^a + T_{\mu\nu}^b) \quad (3.47)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^M = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^a &= \frac{a^2}{4\pi} \left[ g_{\mu\nu} F_\beta^\gamma \nabla_\gamma K^\beta + \frac{g_{\mu\nu}}{2} K^\beta K_\beta \right. \\ &\quad \left. + 2F_{(\mu}^\alpha \nabla_{\nu)} K_\alpha - F_{(\mu}^\alpha \nabla_\alpha K_{\nu)} - K_\mu K_\nu \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^b &= \frac{b^2}{2\pi} \left[ -\frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^\beta F^{\alpha\gamma} \nabla_\beta F_{\alpha\gamma} + F_{(\mu}^\gamma \nabla^\beta \nabla_\beta F_{\nu)\gamma} \right. \\ &\quad \left. + F_{\gamma(\mu} \nabla_\beta \nabla_{\nu)} F^{\beta\gamma} - \nabla_\beta \left( F_\gamma^\beta \nabla_{(\mu} F_{\nu)}^\gamma \right) \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

e a notação (...) representa simetrização com os índices  $\mu\nu$ .

O traço do tensor energia momento é:

$$T = \left( \frac{a^2 + 2b^2}{4\pi} \right) K^\beta K_\beta + \frac{b^2}{4\pi} [2\nabla_\beta (F^{\gamma\alpha} \nabla^\beta F_{\alpha\gamma}) + F^{\gamma\mu} S_{\mu\gamma}] \quad (3.51)$$

Considere agora o caso onde há simetria esférica e o campo é estático. O elemento de linha é:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{-\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.52)$$

enquanto o campo eletromagnético é dado por:

$$F_{\mu\nu} = E(r) [\delta_\mu^1 \delta_\nu^0 - \delta_\mu^0 \delta_\nu^1] \quad (3.53)$$

e assim o campo é caracterizado completamente por três funções:  $E(r)$ , e as componentes gravitacionais  $\nu(r)$  e  $\lambda(r)$ . Assim, a equação (3.46) pode ser escrita como

$$E - (a^2 + 2b^2) \partial_1 K_0 + 2b^2 S_{10} = C \frac{e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2} \quad (3.54)$$

onde  $C$  é uma constante de integração,

$$K_0 = \frac{e^{\frac{\nu-\lambda}{2}}}{r^2} \partial_1 \left( r^2 e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}} E \right)$$

e

$$S_{10} = E e^{-\lambda} \left( \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right)$$

onde  $\nu' \equiv \partial_r \nu \equiv \partial_1 \nu$

Os componentes não nulos de (3.47) são

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0 \quad (3.55)$$

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1 \quad (3.56)$$

$$-\frac{1}{4r} e^{-\lambda} [(\nu' - \lambda')(2 + r\nu') + 2r\nu''] = 8\pi T_2^2 \quad (3.57)$$

onde

$$T_0^0 = -\frac{g^{00}g^{11}}{8\pi} \left\{ E [E - 2(a^2 + 2b^2) \partial_1 K_0 + 4b^2 S_{10}] + \frac{a^2 K_0^2}{g^{11}} + 2b^2 g^{11} \left[ \left( \frac{K_0}{g^{11}} + \frac{2E}{r} \right)^2 + \frac{2E^2}{r^2} \right] \right\} \quad (3.58)$$

$$T_1^1 = -\frac{g^{00}g^{11}}{8\pi} \left\{ E [E - 2(a^2 + 2b^2) \partial_1 K_0 + 4b^2 S_{10}] - \frac{a^2 K_0^2}{g^{11}} - 2b^2 g^{11} \left[ \left( \frac{K_0}{g^{11}} + \frac{2E}{r} \right)^2 + \frac{2E^2}{r^2} \right] \right\} \quad (3.59)$$

$$T_2^2 = \frac{g^{00}g^{11}}{8\pi} \left\{ E^2 - a^2 \left[ 2E \partial_1 K_0 - \frac{K_0^2}{g^{11}} \right] + \frac{2b^2 K_0^2}{g^{11}} - 4b^2 g^{11} \left[ \left( \frac{K_0}{g^{11}} + \frac{2E}{r} \right)^2 + \frac{ES_{10}}{2g^{11}} + \frac{2E^2}{r^2} \right] \right\} \quad (3.60)$$

A simetria esférica faz com que o traço do tensor energia-momento seja

$$T = \frac{(a^2 - 2b^2)}{4\pi} g^{00} K_0^2 + \frac{b^2}{\pi} g^{00} g^{11} E \left( \partial_1 K_0 - \frac{4K_0}{r} \right) + \frac{b^2}{\pi} g^{00} (g^{11} E)^2 \left[ \frac{3}{2} \frac{\nu - \lambda'}{r} - \frac{6}{r^2} \right] \quad (3.61)$$

Subtraindo (3.55) de (3.56), temos a relação

$$\frac{\lambda' + \nu'}{2r} = g^{00} g^{11} \left[ a^2 \left( \frac{K_0}{g^{11}} \right)^2 + 2b^2 \left( \left( \frac{K_0}{g^{11}} + \frac{2E}{r} \right)^2 + \frac{2E^2}{r^2} \right) \right] \quad (3.62)$$

que nos será útil para encontrar uma métrica para o espaço-tempo com a eletrodinâmica de Podolsky.

A eletrodinâmica generalizada de Podolsky em espaços curvos apresenta uma única lagrangiana, que possui o termo  $b$  adicional. Aqui, o que queremos é encontrar soluções para o campo elétrico (3.54) quando temos um espaço-tempo com simetria esférica e estático, tal como Reissner-Nordström, como feito em (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975) mas utilizando a eletrodinâmica generalizada de Podolsky ao invés da eletrodinâmica de Maxwell.



## 4 O CAMPO ELÉTRICO DA ELETRODINÂMICA GENERALIZADA

Como vimos anteriormente, temos a equação que descreve o espaço-tempo esfericamente simétrico e estático dada por Schwarzschild. Reissner e Nordström acrescentaram carga elétrica e assim temos um espaço-tempo com as mesmas características de Schwarzschild, mas agora com um campo elétrico, com a mesma simetria e estático. O que estamos propondo é encontrar o campo elétrico para esse espaço-tempo de Reissner-Nordström, mas utilizando a teoria da eletrodinâmica generalizada de Podolsky.

### 4.1 CAMPO ELÉTRICO DE PODOLSKY NO ESPAÇO-TEMPO DE REISSNER-NORDSTRÖM

Aqui vamos usar a equação (3.54) para encontrar o campo elétrico da eletrodinâmica de Podolsky. Assim, dado a equação

$$E - (a^2 + 2b^2) \partial_1 \left( \frac{e^{-\lambda}}{r^2} \partial_1 (r^2 E) \right) + 4b^2 \frac{E}{r} (e^{-\lambda})' = \frac{q}{r^2} \quad (4.1)$$

vamos tomar  $e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)$ , pois desejamos que a métrica que será obtida futuramente seja uma aproximação da métrica de Reissner-Nordström.

Substituindo temos

$$\begin{aligned} & - (a^2 + 2b^2) (r^2 - 2mr + q^2) E'' - (a^2 + 2b^2) (2r - 2m) E' \\ & - \left[ a^2 \left( -2 + \frac{8m}{r} - \frac{6q^2}{r^2} \right) + 4b^2 \left( -1 + \frac{2m}{r} - \frac{5q^2}{r^2} \right) - r^2 \right] E = q \end{aligned} \quad (4.2)$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem, cuja solução nos fornecerá o campo elétrico de Podolsky com o espaço-tempo de Reissner-Nordström como fundo.

Porém, devido a complexidade proveniente dos coeficientes da EDO, vamos aqui solucionar para um caso particular mais simples, tomando como fundo o espaço-tempo plano.

### 4.2 CAMPO ELÉTRICO DE PODOLSKY NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Para o espaço-tempo plano ( $m = 0$ ) sem fontes temos a equação

$$- (a^2 + 2b^2) r^2 E'' - (a^2 + 2b^2) 2r E' + (2a^2 + 4b^2 + r^2) E = -q. \quad (4.3)$$

Dividindo todos os membros por  $-(a^2 + 2b^2)$ , podemos escrever

$$r^2 E'' + 2rE' + \left(-2 - \frac{r^2}{(a^2 + 2b^2)}\right) E = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}.$$

Essa equação nos fornece o campo elétrico de Podolsky no espaço de Minkowski. Vale lembrar que no espaço-tempo plano a lagrangiana de Podolsky é única, onde temos a presença do modo massivo do campo dado pelo parâmetro  $a$ . O parâmetro  $b$  corresponde ao termo de acoplamento não mínimo da lagrangiana de Podolsky, o que faz que ela seja única no espaço-tempo curvo. Como desejamos encontrar soluções dessa eletrodinâmica em espaços-tempo curvos, vamos preservar esses termos.

Para solucionar a EDO acima, vamos fazer uma troca de variável

$$x = \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}}.$$

Isso implica que as derivadas terão as formas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} &= \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = \frac{i}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \frac{d}{dx}, \\ \frac{d^2}{dr^2} &= \frac{-1}{(a^2 + 2b^2)} \frac{d^2}{dx^2}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo as trocas na equação, obtemos a EDO

$$x^2 \ddot{E} + 2x \dot{E} + (x^2 - 2) E = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}. \quad (4.4)$$

onde “ponto” significa derivada em relação a  $x$ .

Analisando a equação homogênea associada

$$x^2 \ddot{E}_h + 2x \dot{E}_h + (x^2 - 2) E_h = 0, \quad (4.5)$$

percebemos que ela pode ser escrita como uma equação de Bessel esférica, tomando  $n = 1$ :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n(n+1)) y = 0. \quad (4.6)$$

Assim, sabemos que a solução homogênea será

$$E_h \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) = A j_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) + B y_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right),$$

onde  $j_1(x)$  e  $y_1(x)$  são as funções esféricas de Bessel, escritas como

$$\begin{aligned} j_1(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{\text{sen}x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \\ y_1(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-\frac{3}{2}}(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x}. \end{aligned}$$

De posse da solução homogênea, precisamos agora determinar a solução não-homogênea. Para tanto, vamos utilizar o Método de Variação dos Parâmetros. Seja  $E_p(x)$  uma solução particular dada por

$$E_p(x) = \alpha(x) j_1(x) + \beta(x) y_1(x)$$

e suas derivadas

$$\begin{aligned} \dot{E}_p(x) &= \dot{\alpha}(x) j_1(x) + \dot{\beta}(x) y_1(x) + \alpha(x) \frac{dj_1}{dx} + \beta(x) \dot{y}_1(x), \\ \ddot{E}_p(x) &= \ddot{\alpha}(x) j_1(x) + \ddot{\beta}(x) y_1(x) + \dot{\alpha}(x) \frac{dj_1}{dx} + \dot{\beta}(x) \dot{y}_1(x) \\ &\quad + \dot{\alpha}(x) \frac{dj_1}{dx} + \alpha(x) \frac{d^2 j_1}{dx^2} + \dot{\beta}(x) \dot{y}_1(x) + \beta(x) \ddot{y}_1(x). \end{aligned}$$

Substituindo na equação não-homogênea, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} &= (x^2 - 2) (\alpha(x) j_1(x) + \beta(x) y_1(x)) \\ &\quad + 2x \left( \dot{\alpha}(x) j_1(x) + \dot{\beta}(x) y_1(x) + \alpha(x) \frac{dj_1}{dx} + \beta(x) \dot{y}_1(x) \right) \\ &\quad + x^2 \left( \ddot{\alpha}(x) j_1(x) + \ddot{\beta}(x) y_1(x) + 2\dot{\alpha}(x) \frac{dj_1}{dx} + 2\dot{\beta}(x) \dot{y}_1(x) + \alpha(x) \frac{d^2 j_1}{dx^2} + \beta(x) \ddot{y}_1(x) \right) \end{aligned}$$

onde podemos escrever organizando os parâmetros do seguinte modo

$$\begin{aligned} &\alpha(x) \left( x^2 \frac{d^2 j_1}{dx^2} + 2x \frac{dj_1}{dx} + (x^2 - 2) j_1(x) \right) \\ &\quad + \beta(x) \left( x^2 \ddot{y}_1(x) + 2x \dot{y}_1(x) + (x^2 - 2) y_1(x) \right) \\ &+ x^2 \left( \ddot{\alpha}(x) j_1(x) + \ddot{\beta}(x) y_1(x) + 2\dot{\alpha}(x) \frac{dj_1}{dx} + 2\dot{\beta}(x) \dot{y}_1(x) \right) \\ &\quad + 2x \left( \dot{\alpha}(x) j_1(x) + \dot{\beta}(x) y_1(x) \right) = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}. \end{aligned}$$

Usando a solução homogênea isto se reduz para

$$\begin{aligned} &x^2 \left( \ddot{\alpha}(x) j_1(x) + \ddot{\beta}(x) y_1(x) + 2\dot{\alpha}(x) \frac{dj_1}{dx} + 2\dot{\beta}(x) \dot{y}_1(x) \right) \\ &\quad + 2x \left( \dot{\alpha}(x) j_1(x) + \dot{\beta}(x) y_1(x) \right) = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}. \end{aligned}$$

O método exige que se imponha a condição de integração:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(x)j_1(x) + \dot{\beta}(x)y_1(x) &= 0 \rightarrow \dot{\alpha}(x) = -\dot{\beta}(x)\frac{y_1(x)}{j_1(x)}, \\ \ddot{\alpha}(x) &= -\ddot{\beta}(x)\frac{y_1(x)}{j_1(x)} - \dot{\beta}(x)\left(-\frac{y_1(x)}{[j_1(x)]^2}\frac{dj_1}{dx} + \frac{\dot{y}_1(x)}{j_1(x)}\right)\end{aligned}$$

e assim encontramos

$$\begin{aligned}x^2\left(\left[-\ddot{\beta}(x)\frac{y_1(x)}{j_1(x)} - \dot{\beta}(x)\left(-\frac{y_1(x)}{[j_1(x)]^2}\frac{dj_1}{dx} + \frac{\dot{y}_1(x)}{j_1(x)}\right)j_1(x)\right]\right. \\ \left.+\ddot{\beta}(x)y_1(x) + 2\left[-\dot{\beta}(x)\frac{y_1(x)}{j_1(x)}\right]\frac{dj_1}{dx} + 2\dot{\beta}(x)\dot{y}_1(x)\right) = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}.\end{aligned}$$

Fazendo as distributivas e simplificações chegamos em

$$x^2\left(\dot{y}_1(x) - \frac{y_1(x)}{j_1(x)}\frac{dj_1}{dx}\right)\dot{\beta}(x) = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}.$$

Isolando  $\dot{\beta}(x)$ , finalmente chegamos em duas equações:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(x) &= \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}\frac{j_1(x)}{x^2\left(j_1(x)\dot{y}_1(x) - \frac{dj_1}{dx}y_1(x)\right)}, \\ \dot{\alpha}(x) &= -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)}\frac{y_1(x)}{x^2\left(j_1(x)\dot{y}_1(x) - \frac{dj_1}{dx}y_1(x)\right)}.\end{aligned}$$

Lembrando da definição de Wronskiano

$$W(x) = j_1(x)\dot{y}_1(x) - \frac{dj_1}{dx}y_1(x)$$

podemos escrever as equações como segue:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(x) &= \frac{q}{(a^2 + 2b^2)}\frac{j_1(x)}{x^2W(x)}, \\ \dot{\alpha}(x) &= -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)}\frac{y_1(x)}{x^2W(x)}.\end{aligned}$$

Vamos calcular o Wronskiano:

$$\begin{aligned}W(x) &= \left(\frac{\text{sen}x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right)\left(-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x}\right) \\ &= \left(\frac{\text{sen}x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}\right)\frac{1}{x^3}(2\cos x - x^2\cos x + 2x\text{sen}x) \\ &\quad - \frac{1}{x^3}(x^2\text{sen}x - 2\text{sen}x + 2x\cos x)\left(-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

e assim temos expressões para  $\dot{\beta}(x)$  e  $\dot{\alpha}(x)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(x) &= \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{j_1(x)}{x^2 W(x)} = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} j_1(x); \\ \dot{\alpha}(x) &= -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{y_1(x)}{x^2 W(x)} = -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} y_1(x).\end{aligned}$$

Fazendo uma integração simples, encontramos os coeficientes  $\beta(x)$  e  $\alpha(x)$

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int j_1(x) dx = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int \left( \frac{\text{sen}x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \right) dx, \\ \alpha(x) &= -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int y_1(x) dx = -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int \left( -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\text{sen}x}{x} \right) dx.\end{aligned}$$

Agora, dada a fórmula de Rayleigh para as funções esféricas de Bessel

$$\begin{aligned}j_n(x) &= (-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\text{sen}x}{x}, \\ y_n(x) &= -(-x)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x},\end{aligned}$$

podemos tomar o caso particular onde  $n = 1$

$$\begin{aligned}j_1(x) &= -x \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{\text{sen}x}{x} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\text{sen}x}{x} \right), \\ y_1(x) &= -(-x) \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \frac{\cos x}{x} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{x} \right).\end{aligned}$$

E assim obtemos:

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int j_1(x) dx = \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int -\frac{d}{dx} \left( \frac{\text{sen}x}{x} \right) dx = -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{\text{sen}x}{x}; \\ \alpha(x) &= -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int y_1(x) dx = -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \int \frac{d}{dx} \left( \frac{\cos x}{x} \right) dx = -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{\cos x}{x}.\end{aligned}$$

Dessa forma, a solução particular será:

$$\begin{aligned}E_p(x) &= \alpha(x) j_1(x) + \beta(x) y_1(x) \\ &= -\frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{\cos x}{x} j_1(x) - \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{\text{sen}x}{x} y_1(x).\end{aligned}$$

Logo, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned}
 E(r) &= E_h \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) + E_p \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) \\
 &= A j_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) + B y_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) \\
 &\quad - \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{\cos \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right)}{\frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}}} j_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) \\
 &\quad - \frac{q}{(a^2 + 2b^2)} \frac{\text{sen} \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right)}{\frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}}} y_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right),
 \end{aligned}$$

onde podemos organizar de tal maneira que fique da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 E(r) &= \left[ A - \frac{q}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \frac{1}{ir} \cos \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) \right] j_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) \\
 &\quad + \left[ B - \frac{q}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \frac{1}{ir} \text{sen} \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right) \right] y_1 \left( \frac{ir}{\sqrt{(a^2 + 2b^2)}} \right)
 \end{aligned}$$

Vamos definir aqui

$$r_P = \sqrt{(a^2 + 2b^2)}$$

e

$$u = \frac{r}{r_P},$$

onde  $r_P = \sqrt{(a^2 + 2b^2)}$  é chamado de raio de Podolsky.

Assim, o campo elétrico é dado por

$$E(u) = \left[ A - \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{iu} \cos(iu) \right] j_1(iu) + \left[ B - \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{iu} \text{sen}(iu) \right] y_1(iu).$$

Lembrando que as funções esféricas de Bessel com argumentos complexos são dadas por

$$\begin{aligned}
 j_1(iu) &= \frac{\text{sen}(iu)}{(iu)^2} - \frac{\cos(iu)}{(iu)}, \\
 y_1(iu) &= -\frac{\cos(iu)}{(iu)^2} - \frac{\text{sen}(iu)}{(iu)}
 \end{aligned}$$

e usando a identidade

$$\sinh u = -i \text{sen}(iu),$$

$$\cosh u = \cos(iu)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} j_1(iu) &= \frac{\sinh(u)}{(-i)(iu)^2} - \frac{\cosh(u)}{(iu)}, \\ y_1(iu) &= -\frac{\cosh(u)}{(iu)^2} - \frac{\sinh(u)}{(-i)(iu)}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação do campo elétrico, temos

$$\begin{aligned} E(u) &= \left[ A - \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{iu} \cosh(u) \right] \left( \frac{\sinh(u)}{(-i)(iu)^2} - \frac{\cosh(u)}{(iu)} \right) \\ &+ \left[ B - \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{iu(-i)} \sinh(u) \right] \left( -\frac{\cosh(u)}{(iu)^2} - \frac{\sinh(u)}{(-i)(iu)} \right). \end{aligned}$$

Aqui pretendemos separar a parte real e imaginária fazendo algumas manipulações usando a paridade de algumas das funções acima, obtendo

$$\begin{aligned} E(u) &= iA \left( -\frac{\sinh(u)}{u^2} + \frac{\cosh(u)}{u} \right) - \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{u^2} \\ &+ B \left( \frac{\cosh(u)}{u^2} - \frac{\sinh(u)}{u} \right). \end{aligned}$$

Agora, usando a identidade

$$\begin{aligned} \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \\ \sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2} \end{aligned}$$

e substituindo, obtemos

$$\begin{aligned} E(u) &= iA \left( -\frac{1}{u^2} \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) + \frac{1}{u} \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) \right) \\ &+ B \left( \frac{1}{u^2} \left( \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) - \frac{1}{u} \left( \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right) \right) - \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{u^2}. \end{aligned}$$

Separando os termos com exponenciais negativas e positivas temos

$$\begin{aligned} E(u) &= (B + iA) \frac{1}{2u} \left( 1 + \frac{1}{u} \right) e^{-u} + (B - iA) \frac{1}{2u} \left( \frac{1}{u} - 1 \right) e^u \\ &- \frac{q}{r_P^2} \frac{1}{u^2}. \end{aligned}$$

Que é o campo elétrico de Podolsky. Para que a solução seja convergente para  $r \rightarrow 0$ , devemos ter

$$B - iA = 0$$

logo,

$$E(u) = -\frac{q}{r_P^2} \frac{1}{u^2} + \frac{B}{u} \left(1 + \frac{1}{u}\right) e^{-u}$$

que na variável  $r$  é

$$E(r) = -\frac{q}{r^2} + B \frac{r_P}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}}.$$

Por outro lado, sabemos que no espaço-tempo plano a eletrodinâmica de Podolsky é única, e a solução do potencial eletrostático, (ORTEGA, 2014), é dada por

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{q}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{r_P}}\right), \\ \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{q}{r^2} - \frac{q}{r^2} e^{-\frac{r}{r_P}} + \frac{q}{r} \left(-\frac{1}{r_P}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \\ &= \frac{q}{r^2} - \frac{q}{r_P^2} \frac{r_P}{r} \left(\frac{r_P}{r} + 1\right) e^{-\frac{r}{r_P}}. \end{aligned}$$

Como

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr},$$

comparando as equações concluímos que

$$B = \frac{q}{r_P^2}.$$

E assim obtemos o campo elétrico de Podolsky no espaço-tempo plano

$$E(r) = -\frac{q}{r^2} + \frac{1}{r_P} \frac{q}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}}. \quad (4.7)$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar  $q \rightarrow -q$ , de tal maneira que quando  $r_P \rightarrow 0$ , o campo elétrico de Coulomb seja o limite do campo elétrico de Podolsky. Sendo assim temos

$$E(r) = \frac{q}{r^2} \left(1 - \left(\frac{r}{r_P} + 1\right) e^{-\frac{r}{r_P}}\right)$$



Vamos comparar o campo elétrico de Podolsky  $E_P(r) = -\frac{q}{r^2} + \frac{1}{r_P} \frac{q}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}}$  para alguns valores de  $r_P$  com o campo de Coulomb  $E_C(r) = \frac{q}{r^2}$ , através do gráfico abaixo.

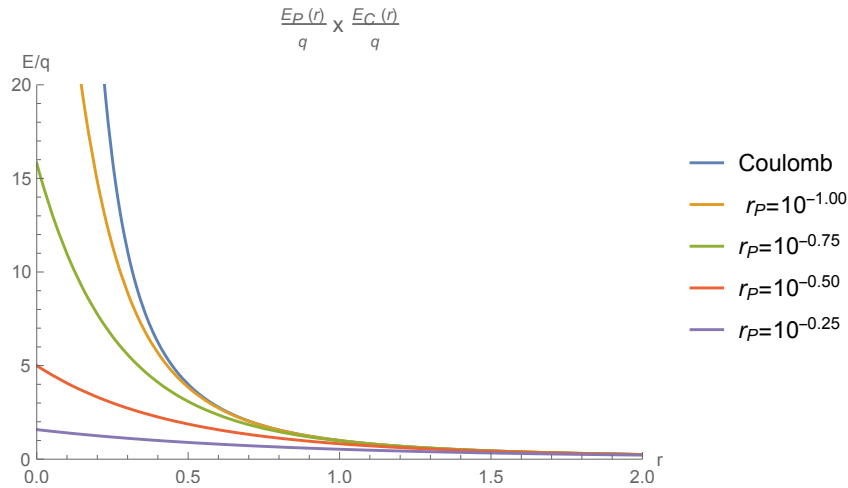


Figura 3 – Campo de Coulomb x Campo de Podolsky para alguns valores de  $r_P$ .

Agora, vamos ver como é o comportamento do campo elétrico em variáveis adimensionais. Assim, seja  $u = \frac{r}{r_P}$  e vamos comparar o campo de Podolsky  $E_P(u)$  com o campo de Coulomb  $E_C(u)$ . Para isso, vamos definir

$$\varepsilon_C(u) = \frac{r_P^2 E_C(u)}{q},$$

$$\varepsilon_P(u) = \frac{r_P^2 E_P(u)}{q}$$

e assim temos

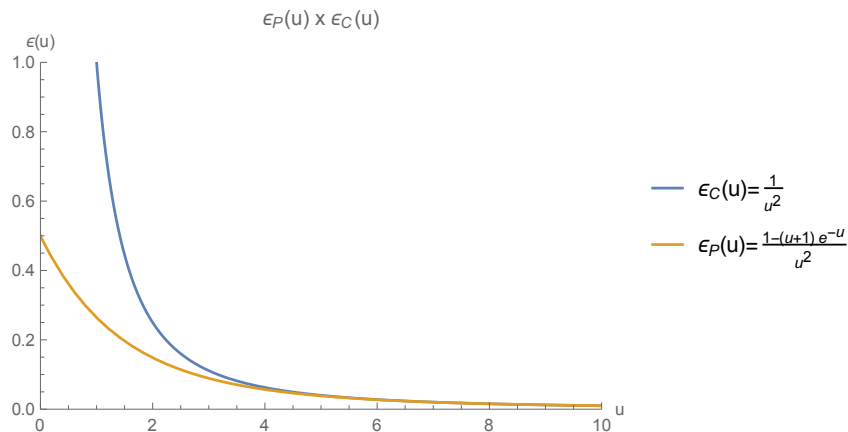


Figura 4 – Campo de Coulomb x Campo de Podolsky em variáveis adimensionais.

Perceba que próximo a origem, o campo elétrico de Podolsky  $E_P(r)$  possui um limite, enquanto que o campo de Coulomb tende ao infinito. O campo elétrico de Po-

dolsky como foi encontrado acima levou em consideração uma aproximação para um espaço-tempo plano para a equação (3.54). Na subseção seguinte, utilizaremos um método matemático para resolução de equações diferenciais que apresentem um coeficiente de perturbação de magnitude pequena comparada aos outros coeficientes. A Teoria de Perturbação Regular não é suficiente para resolver tais EDO's, sendo necessário aplicar a Teoria de Perturbação Singular, (maiores detalhes estão disponíveis no Apêndice).

#### 4.2.1 Campo elétrico de Podolsky via teoria de perturbação singular

A teoria de perturbação singular surge como uma proposta para resolver equações diferenciais que possuem um termo de magnitude muito pequena na derivada de maior ordem quando comparado à magnitude dos outros termos da equação. Aplicamos a seguir os procedimentos para resolver uma equação via teoria de perturbações singulares onde o mesmo se encontra com maiores detalhes no Apêndice. Por ser uma teoria ainda em desenvolvimento, decidimos aplicar o método para a equação (3.54) considerando a métrica de Minkowski a fim de contribuir com o desenvolvimento dessa teoria.

A equação do campo elétrico de uma carga pontual na eletrodinâmica de Podolsky, tomando a métrica de Minkowski em (4.1) é

$$E - r_P^2 \partial_1 \left[ \frac{1}{r^2} \partial_1 (r^2 E) \right] = \frac{q}{r^2}. \quad (4.8)$$

Esta equação tem como solução

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{q}{r^2} + \frac{q}{r^2} \left( \frac{r}{r_P} + 1 \right) e^{-\frac{r}{r_P}} \\ E(r) &= \frac{q}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_P} + 1 \right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right] \end{aligned}$$

Para  $\frac{r}{r_P} \gg 1$  (correspondente a  $r_P$  pequeno) temos

$$E(r) \simeq \frac{q}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{r_P} e^{-\frac{r}{r_P}} \right].$$

Vamos tentar agora implementar o procedimento de perturbação singular para a eq. (4.8). Com base na solução exata (4.7), vamos impor as seguintes condições de contorno para (4.8):

$$\lim_{r \rightarrow 0} E(r) = \frac{q}{r_P^2} \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} E(r) \simeq 0. \quad (4.9)$$

Com o intuito de transformar (4.8) em uma equação homogênea vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$X = E - \frac{q}{r^2}.$$

Neste caso,

$$X - r_P^2 \partial_1 \left[ \frac{1}{r^2} \partial_1 (r^2 X) \right] = 0 \quad (4.10)$$

com

$$\lim_{r \rightarrow 0} X(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ E(r) - \frac{q}{r^2} \right] \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} X(r) \simeq 0.$$

Observe que apesar de  $\lim_{r \rightarrow 0} X(r)$  divergir,  $\lim_{r \rightarrow 0} E(r)$  permanece finito.

**1º) Encontrar a solução externa:** Seguindo o procedimento de perturbação singular vamos supor que a camada limite se encontra próximo da fronteira  $r = 0$ . Neste caso, a solução exterior é obtida de (4.10) excluindo o termo contendo  $r_P$  i.e.

$$X_{out}(r) \simeq 0$$

Note que  $X_{out}$  satisfaz a condição  $\lim_{r \rightarrow \infty} X_{out} \simeq 0$ .

**2º) Fazer a mudança de variável:** O próximo passo é introduzir a variável da camada limite

$$\xi = \frac{r - 0}{\delta} = \frac{r}{\delta}$$

onde  $\delta$  representa a magnitude da espessura da camada limite. Assim,  $\delta \rightarrow 0$  quando  $r_P \rightarrow 0$ . Utilizando esta nova variável (4.10) se torna

$$X - \frac{r_P^2}{\delta^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 X) \right] = 0.$$

A Teoria de Perturbação Singular exige que haja compensação entre os termos da derivada de ordem 2 com os outros termos da equação, então devemos ter  $\delta = r_P$ .

**3º) Encontrar a solução interna:** Neste caso, a equação a ser resolvida é da forma

$$X - \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 X) \right] = 0$$

cuja solução interior é

$$X_{in} = C_1 \frac{e^\xi}{\xi} \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) + C_2 \frac{e^{-\xi}}{\xi} \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right).$$

Voltando para a variável original  $E$  temos

$$E_{out}(r) = \frac{q}{r^2}$$

e

$$\begin{aligned} E_{in}(r) &= C_1 \frac{e^{\frac{r}{r_P}}}{r} \left(1 - \frac{r_P}{r}\right) + C_2 \frac{e^{-\frac{r}{r_P}}}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) + \frac{q}{r^2} \\ \Rightarrow E_{in}(r) &= C_1 \frac{e^{\frac{r}{r_P}}}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_P}\right) + C_2 \frac{e^{-\frac{r}{r_P}}}{r^2} \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) + \frac{q}{r^2} \end{aligned}$$

Utilizando a condição  $\lim_{r \rightarrow 0} E(r) = \frac{q}{r_P^2}$  temos:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left[ C_1 \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) \left(1 - \frac{r}{r_P}\right) + C_2 \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_P}\right) \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) + \frac{q}{r^2} \right] &= \frac{q}{r_P^2} \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \left[ (C_1 + C_2) \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_P^2} \right) + \frac{q}{r^2} \right] &= \frac{q}{r_P^2} \\ \Rightarrow C_1 + C_2 &= -q. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} E_{in}(r) &= C_1 \frac{e^{\frac{r}{r_P}}}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_P}\right) - C_1 \frac{e^{-\frac{r}{r_P}}}{r^2} \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) - q \frac{e^{-\frac{r}{r_P}}}{r^2} \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) + \frac{q}{r^2} \\ \Rightarrow E_{in}(r) &= \frac{C_1}{r^2} \left[ e^{\frac{r}{r_P}} \left(1 - \frac{r}{r_P}\right) - e^{-\frac{r}{r_P}} \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) \right] + \frac{q}{r^2} \left[ 1 - \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right] \end{aligned}$$

**4º) Introduzir a variável intermediária:** Para determinar  $C_1$  escolhemos uma região intermediária ( $r_{int}$ ) entre a parte interior (contida na camada limite) e a região exterior tal que

$$\lim_{r_P \rightarrow 0} \frac{r_{int}}{\delta} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{r_P \rightarrow 0} r_{int} = 0$$

O próximo passo é impor que as duas soluções (*in* e *out*) devem coincidir quando  $r_P \rightarrow 0$ . Assim,

$$\lim_{r_P \rightarrow 0} E_{in}(r_{int}) = \lim_{r_P \rightarrow 0} E_{out}(r_{int}).$$

Logo, eliminando o fator comum  $1/r^2$  presente em todos os termos de  $E_{in}$  e  $E_{out}$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{r_P \rightarrow 0} \left[ C_1 \left[ e^{\frac{r_{int}}{r_P}} \left(1 - \frac{r_{int}}{r_P}\right) - e^{-\frac{r_{int}}{r_P}} \left(1 + \frac{r_{int}}{r_P}\right) \right] + q \left[ 1 - \left(1 + \frac{r_{int}}{r_P}\right) e^{-\frac{r_{int}}{r_P}} \right] \right] &= \lim_{r_P \rightarrow 0} q \\ \Rightarrow \lim_{r_P \rightarrow 0} \left[ C_1 e^{\frac{r_{int}}{r_P}} \left(1 - \frac{r_{int}}{r_P}\right) + q \right] &= q \Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a solução interna é da forma

$$E_{in}(r) = \frac{q}{r^2} \left[ 1 - \left(1 + \frac{r}{r_P}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right].$$

5º) **Fazer a aproximação uniforme:** Por fim, para obter uma aproximação uniforme válida em todo o intervalo  $[0, \infty[$  somamos  $E_{in}$  com  $E_{out}$  e subtraímos a parte comum a ambas

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{q}{r^2} + \frac{q}{r^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{r_P} \right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right] - \frac{q}{r^2} \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{q}{r^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{r_P} \right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right]. \end{aligned}$$

O resultado que obtivemos via teoria de perturbação singular é o resultado exato de (4.8) com as condições de contorno (4.9).

Na teoria de perturbação singular, através de um redimensionamento, obtemos um termo perturbativo que dentro da camada limite possui a mesma magnitude do termo de ordem zero. Neste sentido, esta perturbação não respeita a hierarquia da teoria de perturbações usual, onde termos perturbativos são sempre muito menores do que os termos de ordem zero.

#### 4.3 OBTENDO $e^{(\nu+\lambda)}$ PARA O CAMPO ELÉTRICO DE PODOLSKY NO ESPAÇO-TEMPO PLANO

Com a posse do campo elétrico da eletrodinâmica de Podolsky, vamos investigar como esse campo curva o espaço-tempo. Assim, desejamos encontrar as funções  $\nu$  e  $\lambda$  da métrica. Para isso usaremos a equação (3.62) para encontrar as componentes  $e^\nu$  e  $e^\lambda$  da métrica.

$$\frac{\lambda' + \nu'}{2r} = -e^{-\nu} e^{-\lambda} \left[ a^2 \left( \frac{K_0}{-e^{-\lambda}} \right)^2 + 2b^2 \left( \left( \frac{K_0}{-e^{-\lambda}} + \frac{2E}{r} \right)^2 + 2\frac{E^2}{r^2} \right) \right]$$

Fazendo as simplificações chegamos em

$$\frac{d}{dr} e^{(\nu+\lambda)} = -2r \left[ r_P^2 \left( e^{\bar{\lambda}} K_0 \right)^2 + 2b^2 \left( -e^{\bar{\lambda}} K_0 \frac{4E}{r} + 6 \left( \frac{E}{r} \right)^2 \right) \right] \quad (4.11)$$

Vamos começar supondo que, do lado direito dessa expressão, temos uma métrica tal que  $\bar{\lambda} = -\bar{\nu}$ , que é compatível com Minkowski, Schwarzschild e Reissner-Nordström. Isso implica que

$$e^{\bar{\nu}+\bar{\lambda}} = 1$$

e de

$$K_0 = \frac{e^{\left(\frac{\bar{\nu}-\bar{\lambda}}{2}\right)}}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 e^{-\left(\frac{\bar{\nu}+\bar{\lambda}}{2}\right)} E \right)$$

temos

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{e^{-\bar{\lambda}}}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \\ e^{\bar{\lambda}} K_0 &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \end{aligned}$$

Agora, vamos supor que o campo elétrico do lado direito da equação possa ser aproximado pelo campo de espaço-tempo plano, portanto

$$\begin{aligned} E &= -\frac{q}{r^2} + \frac{q}{r_P} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \\ r^2 E &= -q + \frac{q}{r_P} r \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \\ \frac{d}{dr} (r^2 E) &= -\frac{q}{r_P^2} r e^{-\frac{r}{r_P}} \end{aligned}$$

Então, substituindo no lado direito de (4.11)

$$\begin{aligned} &-2r \left[ r_P^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \right)^2 + 2b^2 \left( -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \frac{4E}{r} + 6 \left( \frac{E}{r} \right)^2 \right) \right] = \\ &-2r r_P^2 \left( \frac{1}{r^2} \left( -\frac{q}{r_P^2} r e^{-\frac{r}{r_P}} \right) \right)^2 - 2r 2b^2 \left( -\frac{1}{r^2} \left( -\frac{q}{r_P^2} r e^{-\frac{r}{r_P}} \right) \frac{4}{r} \left( -\frac{q}{r^2} + \frac{q}{r_P} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{r^2} \left( -\frac{q}{r^2} + \frac{q}{r_P} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_P}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

que simplificando fica na forma

$$\begin{aligned} &-2r \left[ r_P^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \right)^2 + 2b^2 \left( -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \frac{4E}{r} + 6 \left( \frac{E}{r} \right)^2 \right) \right] = -\frac{1}{r_P^2} \frac{2q^2}{r} e^{-\frac{2r}{r_P}} \\ &-\frac{b^2}{r_P^3} \frac{16q^2}{r^2} e^{-\frac{2r}{r_P}} - \frac{b^2}{r_P^2} \left( 5e^{-\frac{r}{r_P}} - 2 \right) \frac{8q^2}{r^3} e^{-\frac{r}{r_P}} - \frac{b^2}{r_P} \left( e^{-\frac{r}{r_P}} - 1 \right) \frac{48q^2}{r^4} e^{-\frac{r}{r_P}} - b^2 \frac{24q^2}{r^5} \left( 1 - e^{-\frac{r}{r_P}} \right)^2 \end{aligned}$$

Sendo assim, basta integrar a equação

$$\frac{d}{dr} e^{(\nu+\lambda)} = -2r \left[ r_P^2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \right)^2 + 2b^2 \left( -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \frac{4E}{r} + 6 \left( \frac{E}{r} \right)^2 \right) \right]$$

que obtemos uma expressão para  $e^{(\nu+\lambda)}$ , dada por

$$e^{(\nu+\lambda)} = C + \frac{1}{r_P^2} f_1(r) + \frac{b^2}{r_P^3} f_2(r) + \frac{b^2}{r_P^2} f_3(r) + \frac{b^2}{r_P} f_4(r) + b^2 f_5(r)$$

onde as funções  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ , e  $f_5$  são

$$\begin{aligned}
f_1 &= -2q^2 \int \frac{e^{-\frac{2r}{r_P}}}{r} dr = -2q^2 Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right), \\
f_2 &= -16q^2 \int \frac{e^{-\frac{2r}{r_P}}}{r^2} dr = 16q^2 \left( \frac{2Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right)}{r_P} + \frac{e^{-\frac{2r}{r_P}}}{r} \right), \\
f_3 &= -8q^2 \int \left( 5e^{-\frac{r}{r_P}} - 2 \right) \frac{e^{-\frac{r}{r_P}}}{r^3} dr \\
&= -8q^2 \left( \frac{10Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right)}{r_P^2} - \frac{Ei \left( -\frac{r}{r_P} \right)}{r_P^2} + e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( 5\frac{1}{r_P} \frac{1}{r} - \frac{5}{2r^2} \right) + e^{-\frac{r}{r_P}} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_P} \frac{1}{r} \right) \right), \\
f_4 &= -48q^2 \int \left( e^{-\frac{r}{r_P}} - 1 \right) \frac{e^{-\frac{r}{r_P}}}{r^4} dr \\
&= -48q^2 \left( \frac{Ei \left( -\frac{r}{r_P} \right)}{6r_P^3} - \frac{4Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right)}{3r_P^3} - e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( \frac{1}{3r^3} - \frac{1}{3r^2 r_P} + \frac{2}{3r_P^2 r} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-\frac{r}{r_P}} \left( -\frac{1}{3r^3} + \frac{1}{6r^2 r_P} - \frac{1}{6r_P^2 r} \right) \right), \\
f_5 &= -2 \frac{q^2}{r_P^2 r_P^2} \left( -Ei \left( -\frac{r}{r_P} \right) + 8Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right) + e^{-\frac{r}{r_P}} \left( \frac{r_P^2}{r^2} - \frac{r_P}{r} + 6\frac{r_P^4}{r^4} - 2\frac{r_P^3}{r^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( 4\frac{r_P}{r} - 2\frac{r_P^2}{r^2} - 3\frac{r_P^4}{r^4} + 2\frac{r_P^3}{r^3} \right) e^{-\frac{2r}{r_P}} - 3\frac{r_P^4}{r^4} \right)
\end{aligned}$$

e a função especial Exponencial Integral é definida como

$$Ei(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Usando as funções acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}
e^{(\nu+\lambda)} &= C + \frac{1}{r_P^2} f_1(r) + \frac{b^2}{r_P^3} f_2(r) + \frac{b^2}{r_P^2} f_3(r) + \frac{b^2}{r_P} f_4(r) + b^2 f_5(r) \\
&= 1 - 2 \frac{q^2}{r_P^2} Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right) + 16 \frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} \left( 2Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right) + \frac{r_P}{r} e^{-\frac{2r}{r_P}} \right) \\
&\quad - 8 \frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} \left( 10Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right) - Ei \left( -\frac{r}{r_P} \right) + 5e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( \frac{r_P}{r} - \frac{r_P^2}{2r^2} \right) + e^{-\frac{r}{r_P}} \left( \frac{r_P^2}{r^2} - \frac{r_P}{r} \right) \right) \\
&\quad - 8 \frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} \left( Ei \left( -\frac{r}{r_P} \right) - 8Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right) - 2e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( \frac{r_P^3}{r^3} - \frac{r_P^2}{r^2} + \frac{2r_P}{r} \right) \right) \\
&\quad - 8 \frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} e^{-\frac{r}{r_P}} \left( 2\frac{r_P^3}{r^3} - \frac{r_P^2}{r^2} + \frac{r_P}{r} \right) \\
&\quad - 2 \frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} \left( -Ei \left( -\frac{r}{r_P} \right) + 8Ei \left( -\frac{2r}{r_P} \right) + \left( 4\frac{r_P}{r} - 2\frac{r_P^2}{r^2} - 3\frac{r_P^4}{r^4} + 2\frac{r_P^3}{r^3} \right) e^{-\frac{2r}{r_P}} \right. \\
&\quad \left. - 2\frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} - \left( \frac{r_P}{r} - \frac{r_P^2}{r^2} - 6\frac{r_P^4}{r^4} + 2\frac{r_P^3}{r^3} \right) e^{-\frac{r}{r_P}} - 3\frac{r_P^4}{r^4} \right)
\end{aligned}$$

e fazendo as simplificações chegamos em

$$\begin{aligned}
e^{(\nu+\lambda)} &= C - 2\frac{q^2}{r_P^2} Ei\left(-\frac{2r}{r_P}\right) + 2\frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} Ei\left(-\frac{r}{r_P}\right) \\
&+ 2\frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} e^{-\frac{2r}{r_P}} \left(3\frac{r_P^4}{r^4} + 6\frac{r_P^3}{r^3} + 10\frac{r_P^2}{r^2}\right) - 2\frac{b^2 q^2}{r_P^2 r_P^2} e^{-\frac{r}{r_P}} \left(6\frac{r_P^4}{r^4} + 6\frac{r_P^3}{r^3} + \frac{r_P^2}{r^2} - \frac{r_P}{r}\right) \\
&+ 6\frac{b^2 q^2 r_P^4}{r_P^2 r_P^2 r^4}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Escrevendo de uma forma mais compacta, temos

$$e^{(\nu+\lambda)} = C - 2\frac{q^2}{r_P^2} F(r) \tag{4.13}$$

com  $F(r)$  definido por

$$F(r) = Ei\left(-\frac{2r}{r_P}\right) - \frac{b^2}{r_P^2} H(r)$$

e  $H(r)$  definido por

$$H(r) = Ei\left(-\frac{r}{r_P}\right) + e^{-\frac{2r}{r_P}} \left(3\frac{r_P^4}{r^4} + 6\frac{r_P^3}{r^3} + 14\frac{r_P^2}{2r^2}\right) - e^{-\frac{r}{r_P}} \left(6\frac{r_P^4}{r^4} + 6\frac{r_P^3}{r^3} + \frac{r_P^2}{r^2} - \frac{r_P}{r}\right) + 3\frac{r_P^4}{r^4}.$$

A constante de integração  $C$  pode ser determinada pela condição

$$\lim_{a,b \rightarrow 0} e^{(\nu+\lambda)} = e^{(\bar{\nu}+\bar{\lambda})} = 1 \rightarrow C = 1 \tag{4.14}$$

ou seja, quando  $a, b \rightarrow 0$ , o campo elétrico passa ser o campo de Maxwell e com isso a métrica se torna Reissner-Nordström.

Sendo assim, de (4.13) e de (4.14) obtemos uma relação importante entre as componentes da métrica  $\nu$  e  $\lambda$  dada por

$$e^{(\nu+\lambda)} = 1 - 2\frac{q^2}{r_P^2} F(r). \tag{4.15}$$

Agora, para determinar a métrica, devemos encontrar  $e^\nu$  e  $e^\lambda$ . Para isso devemos resolver a seguinte equação

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0$$

e assim, através de  $e^{(\nu+\lambda)}$  e  $e^{-\lambda}$ , podemos encontrar  $e^\nu$ , determinando assim as componentes da métrica. Para isso é necessário resolver a equação acima que faremos do seguinte modo. Seja a EDO proveniente de (3.55)

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-\lambda(r)}}{r} \right) + 2\frac{e^{-\lambda(r)}}{r^2} = \frac{1}{r^2} - 8\pi T_0^0$$



que definindo  $\sigma(r)$

$$\sigma(r) = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r}$$

pode ser reescrita na forma

$$\frac{d\sigma}{dr} + \frac{2}{r}\sigma = \frac{1}{r^2} - 8\pi T_0^0 = G(r)$$

cuja solução será

$$\sigma(r) = \frac{S}{r^2} + \frac{1}{r^2} \int G(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}$$

onde  $S$  é uma constante de integração, e portando

$$e^{-\lambda(r)} = \frac{S}{r} + \frac{1}{r} \int G(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}.$$

Sendo assim, o que faremos agora é substituir os resultados no tensor (3.58) para pode encontrar  $e^{-\lambda(r)}$ .

#### 4.3.1 Densidade de energia

A densidade de energia é dada por (CUZINATTO et al., 2018)

$$T_0^0 = -\frac{g^{00}g^{11}}{8\pi} \left\{ E [E - 2(a^2 + 2b^2) \partial_1 K_0 + 4b^2 S_{10}] + \frac{a^2 K_0^2}{g^{11}} + 2b^2 g^{11} \left[ \left( \frac{K_0}{g^{11}} + \frac{2E}{r} \right)^2 + \frac{2E^2}{r^2} \right] \right\}.$$

Aqui vamos tomar  $g^{00} = e^{-\nu}$  e  $g^{11} = -e^{-\lambda}$  do espaço-tempo plano e o campo elétrico  $E(r)$  é o campo elétrico de Podolsky obtido anteriormente. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} 8\pi T_0^0 &= \left( \frac{q}{r^2} \right)^2 - 12b^2 \frac{1}{r^2} \left( \frac{q}{r^2} \right)^2 + \left( \frac{q}{r_P^2} \right)^2 \frac{r_P^2}{r^2} e^{-2\frac{r}{r_P}} - r_P^2 \frac{1}{r^2} \left( \frac{q}{r_P^2} \right)^2 e^{-\frac{2r}{r_P}} - 8b^2 \frac{1}{r^2} \frac{q}{r_P^2} e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( -\frac{q}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{q}{r^2} 2r_P^2 \frac{1}{r} \frac{q}{r_P^2} e^{-\frac{r}{r_P}} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_P} \right) - 2 \frac{q}{r_P^2} \frac{r_P}{r} \frac{q}{r^2} \left( 1 + \frac{r_P}{r} \right) e^{-\frac{r}{r_P}}. \end{aligned}$$

Vamos multiplicar por  $\frac{r_P}{r_P}$  de tal maneira que o tensor fique na forma

$$\begin{aligned} 8\pi T_0^0 &= \left( \frac{1}{r_P} \frac{q}{r_P} \frac{r_P^2}{r^2} \right)^2 - 12 \frac{b^2}{r_P^2} \frac{r_P^2}{r^2} \left( \frac{1}{r_P} \frac{q}{r_P} \frac{r_P^2}{r^2} \right)^2 + \left( \frac{q}{r_P^2} \right)^2 \frac{r_P^2}{r^2} e^{-2\frac{r}{r_P}} - \frac{r_P^2}{r^2} \left( \frac{q}{r_P^2} \right)^2 e^{-\frac{2r}{r_P}} \\ &\quad - 8 \frac{b^2}{r_P^2} \frac{r_P^2}{r^2} \frac{q}{r_P^2} e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( -\frac{1}{r_P} \frac{q}{r_P} \frac{r_P^2}{r^2} \right) + \frac{1}{r_P} \frac{q}{r_P} \frac{r_P^2}{r^2} 2 \frac{r_P}{r} \frac{q}{r_P} e^{-\frac{r}{r_P}} \left( \frac{r_P}{r} + 1 \right) \frac{1}{r_P} \\ &\quad - 2 \frac{q}{r_P^2} \frac{r_P}{r} \frac{1}{r_P} \frac{q}{r_P} \frac{r_P^2}{r^2} \left( 1 + \frac{r_P}{r} \right) e^{-\frac{r}{r_P}}, \end{aligned}$$

utilizando  $u = \frac{r}{r_P}$ , definindo as grandezas adimensionais

$$\begin{aligned} \beta_{r_p} &= \frac{b^2}{r_P^2}, \\ Q_{r_p} &= \frac{q}{r_P} \end{aligned}$$

e substituindo temos

$$\begin{aligned}
8\pi T_0^0 &= \left(\frac{1}{r_P} Q_{r_P} \frac{1}{u^2}\right)^2 - 12\beta_{r_P} \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{r_P} Q_{r_P} \frac{1}{u^2}\right)^2 + \left(\frac{Q_{r_P}}{r_P}\right)^2 \frac{1}{u^2} e^{-2u} - \frac{1}{u^2} \left(\frac{Q_{r_P}}{r_P}\right)^2 e^{-2u} \\
&\quad - 8\beta_{r_P} \frac{1}{u^2} \frac{Q_{r_P}}{r_P} e^{-2u} \left(-\frac{1}{r_P} Q_{r_P} \frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{r_P} Q_{r_P} \frac{1}{u^3} 2Q_{r_P} e^{-u} (u+1) \frac{1}{r_P} \\
&\quad - 2\frac{Q_{r_P}}{r_P} \frac{1}{r_P} Q_{r_P} \frac{1}{u^3} (1+u) e^{-u}
\end{aligned}$$

e simplificando podemos obter

$$8\pi T_0^0 = \frac{Q_{r_P}^2}{r_P^2} \left( \frac{1}{u^4} - 12\beta_{r_P} \frac{1}{u^6} + 8\beta_{r_P} \frac{1}{u^4} e^{-2u} \right).$$

Agora multiplicando por  $r^2$

$$\begin{aligned}
8\pi T_0^0 r^2 &= \frac{Q_{r_P}^2}{r_P^2} r_P^2 u^2 \left( \frac{1}{u^4} - 12\beta_{r_P} \frac{1}{u^6} + 8\beta_{r_P} \frac{1}{u^4} e^{-2u} \right) \\
&= Q_{r_P}^2 \left( \frac{1}{u^2} - 12\beta_{r_P} \frac{1}{u^4} + 8\beta_{r_P} \frac{1}{u^2} e^{-2u} \right)
\end{aligned}$$

e integrando

$$\begin{aligned}
8\pi \int T_0^0 r^2 dr &= r_P^2 Q_{r_P}^2 \int \left( \frac{1}{u^2} - 12\beta_{r_P} \frac{1}{u^4} + 8\beta_{r_P} \frac{1}{u^2} e^{-2u} \right) du \\
&= r_P^2 Q_{r_P}^2 \left( -\frac{1}{u} + 4\beta_{r_P} \frac{1}{u^3} + 8\beta_{r_P} \int \frac{1}{u^2} e^{-2u} du \right)
\end{aligned}$$

onde da definição de Exponencial Integral temos

$$\int \frac{1}{u^2} e^{-2u} du = -2Ei(-2u) - \frac{e^{-2u}}{u}$$

e assim encontramos

$$\begin{aligned}
8\pi \int T_0^0 r^2 dr &= r_P Q_{r_P}^2 \left( -\frac{1}{u} + 4\beta_{r_P} \frac{1}{u^3} - 8\beta_{r_P} \left( 2Ei(-2u) + \frac{e^{-2u}}{u} \right) \right) + \bar{C} \\
&= r_P \left( \frac{q}{r_P} \right)^2 \left( -\frac{r_P}{r} + 4 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( \frac{r_P}{r} \right)^3 - 8 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( 2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}} \right) \right) + \bar{C} \\
&= -\frac{q^2}{r} + 4\frac{q^2}{r_P} \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( \frac{r_P}{r} \right)^3 - 8\frac{q^2}{r_P} \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( 2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}} \right) + \bar{C}
\end{aligned}$$

#### 4.3.2 Obtendo $\lambda(r)$

De posse de  $T_0^0$  podemos resolver a equação

$$e^{-\lambda(r)} = \frac{S}{r} + \frac{1}{r} \int G(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r} \quad (4.16)$$

para encontrar uma das componentes da métrica. Lembrando que

$$\begin{aligned}
\int G(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r} &= r - 8\pi \int T_0^0 r^2 dr \\
&= r - \left( -\frac{q^2}{r} + 4\frac{q^2}{r_P} \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^3 - 8\frac{q^2}{r_P} \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}}\right) + \bar{C} \right) \\
&= r + \frac{q^2}{r} - 4\frac{q^2}{r_P} \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^3 + 8\frac{q^2}{r_P} \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}}\right) - \bar{C}.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda(r)} &= \frac{S}{r} + \frac{1}{r} \left[ r + \frac{q^2}{r} - 4\frac{q^2}{r_P} \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^3 + 8\frac{q^2}{r_P} \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}}\right) - \bar{C} \right] \\
&= 1 + \frac{S}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^4 + 8\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \frac{r_P}{r} \left(2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}}\right) - \frac{\bar{C}}{r}
\end{aligned}$$

Como queremos que nossa métrica seja uma aproximação da métrica de Reissner-Nordström, tomando o limite  $b \rightarrow 0$  temos

$$\lim_{b \rightarrow 0} e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \quad (4.17)$$

e portanto,  $S = -2m$  e  $\bar{C} = 0$ , de modo que obtemos

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^4 + 8\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \frac{r_P}{r} \left(2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}}\right). \quad (4.18)$$

### 4.3.3 Obtendo $\nu(r)$

Agora é possível usar as duas soluções anteriores para encontrar  $e^{\nu(r)}$  combinando as equações (4.15) e (4.18) para obter

$$\begin{aligned}
e^{\nu(r)} &= e^{(\nu+\lambda)} e^{-\lambda(r)} \\
&= \left( 1 - 2\frac{q^2}{r_P^2} F(r) \right) \times \\
&\quad \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^4 + 8\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \frac{r_P}{r} \left(2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}}\right) \right]
\end{aligned} \quad (4.19)$$

e assim determinamos as duas componentes da métrica.

Observe que esta forma para a métrica nos permite estudar diferentes limites:

1.  $\frac{q}{r_P} \ll 1$  é o limite de pequenas cargas.
2.  $\frac{b}{r_P} \ll 1$  é o limite em que o acoplamento não-mínimo é pequeno em comparação com o termo de Podolsky puro.
3.  $\frac{r_P}{r} \ll 1$  é o limite de grandes distâncias.

## 5 CONSEQUÊNCIAS DA MÉTRICA DE PODOLSKY

### 5.1 HORIZONTES PERTURBADOS

No limite de grandes distâncias, i.e.,  $\frac{r}{r_P} \rightarrow \infty$ , a métrica se reduz a

$$e^{\nu(r)} = \left(1 - 2\frac{q^2}{r_P^2}F(r)\right) \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^4\right]$$

e a função  $F(r)$  se reduz para

$$F(r) = -3b^2\frac{r_P^2}{r^4}$$

Então, a componente  $g^{00}$  fica na forma

$$e^{\nu(r)} = \left(1 + 6\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \frac{r_P^4}{r^4}\right) \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4\left(\frac{q}{r_P}\right)^2 \left(\frac{b}{r_P}\right)^2 \left(\frac{r_P}{r}\right)^4\right] \quad (5.1)$$

Perceba que  $e^{\nu}$  se anula somente se  $e^{-\lambda}$  se anula, conforme foi provado por (VISHVESHWARA, 1968), que em um espaço-tempo estático com simetria esférica, os limites para os horizontes de eventos e para a superfície de *redshift* infinito coincidem.

Os horizontes são determinados pela condição  $e^{\nu(r)} = 0$ , (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975), que tomando a equação (5.1) devemos encontrar as raízes de

$$\frac{1}{r^4} [r^4 - 2mr^3 + q^2r^2 - 4q^2b^2] = 0$$

o que implica em

$$r^4 - 2mr^3 + q^2r^2 - 4q^2b^2 = 0. \quad (5.2)$$

Para  $b = 0$ , temos que

$$r^2 (r^2 - 2mr + q^2) = 0$$

cujas raízes são

$$r_0 = 0, \quad r_+ = m \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}\right), \quad r_- = m \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}\right) \quad (5.3)$$

Onde  $r_0$  é a singularidade essencial. As raízes  $r_+$  e  $r_-$  correspondem aos horizontes de eventos externo e interno de Reissner-Nordström, respectivamente, (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975).

Para  $b \neq 0$ , vamos determinar as correções a estes horizontes usando a teoria de perturbações. Utilizaremos  $b^2$  como parâmetro de perturbação, pois o mesmo está presente no polinômio (5.2). Sejam então as raízes perturbadas

$$\bar{r}_0 = r_0 + b^2 r_{0c} = b^2 r_{0c} \quad (5.4)$$

$$r_1 = r_+ + b^2 r_{+c} \quad (5.5)$$

$$r_2 = r_- + b^2 r_{-c} \quad (5.6)$$

Começemos lembrando que

$$\begin{aligned} r^4 - 2mr^3 + q^2 r^2 - 4q^2 b^2 &= r^2 (r^2 - 2mr + q^2) - 4q^2 b^2 \\ r^2 (r - r_+) (r - r_-) - 4q^2 b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Substituindo primeiro (5.4) em (5.7), e desprezando termos de  $O(b^3)$  e superiores, obtemos

$$\begin{aligned} -4q^2 b^2 &= 0 \\ \bar{r}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Isso nos permite concluir que não existe perturbação em  $r_0$  até uma ordem de  $b^2$ .

Substituindo agora (5.5) em (5.7)

$$\begin{aligned} r^2 (r - r_+) (r - r_-) - 4q^2 b^2 &= 0 \\ (r_+ + b^2 r_{+c})^2 (r_+ + b^2 r_{+c} - r_+) (r_+ + b^2 r_{+c} - r_-) - 4q^2 b^2 &= 0 \\ (r_+^2 + 2r_+ b^2 r_{+c}) (r_+ + b^2 r_{+c} - r_+) (r_+ + b^2 r_{+c} - r_-) - 4q^2 b^2 &= 0 \\ (r_+^2 + 2r_+ b^2 r_{+c}) (b^2 r_{+c}) (r_+ + b^2 r_{+c} - r_-) - 4q^2 b^2 &= 0 \\ (r_+^2 b^2 r_{+c}) (r_+ + b^2 r_{+c} - r_-) - 4q^2 b^2 &= 0 \\ r_+^3 b^2 r_{+c} - r_+^2 b^2 r_{+c} r_- - 4q^2 b^2 &= 0 \\ b^2 (r_{+c} r_+^2 (r_+ - r_-) - 4q^2) &= 0 \\ r_{+c} r_+^2 (r_+ - r_-) - 4q^2 &= 0 \end{aligned}$$

encontramos

$$r_{+c} = \frac{4q^2}{r_+^2 (r_+ - r_-)}. \quad (5.9)$$

Analogamente, substituindo (5.6) em (5.7) encontramos

$$r_{-c} = -\frac{4q^2}{r_-^2 (r_+ - r_-)}. \quad (5.10)$$

Veja que

$$\begin{aligned} r_+ - r_- &= m \left( 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right) - m \left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right) \\ &= 2m \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Então as raízes com uma primeira correção são dadas por

$$\begin{aligned} r_{+c} &= \frac{4q^2}{m^2 \left( 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right)^2 2m \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{m} \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{1}{\left( 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Fazendo

$$\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}, \quad (5.13)$$

$$\left(\frac{q}{m}\right)^2 = 1 - \omega^2, \quad (5.14)$$

obtemos

$$r_{+c} = \frac{2}{m} \frac{(1 - \omega^2)}{(1 + \omega)^2 \omega} = \frac{2}{m\omega} \frac{1 - \omega}{1 + \omega}. \quad (5.15)$$

Para a segunda raiz temos

$$\begin{aligned} r_{-c} &= -\frac{4q^2}{\left( m \left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right) \right)^2 \left( 2m \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right)} \\ &= -\frac{2}{m} \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{1}{\left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{q}{m}\right)^2}} \\ &= -\frac{2}{m} (1 - \omega^2) \frac{1}{(1 - \omega)^2 \omega} \\ &= -\frac{2}{m\omega} \frac{1 + \omega}{1 - \omega}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Substituindo (5.9) em (5.5) e (5.10) em (5.6)

$$r_1 = r_+ + b^2 \frac{4q^2}{r_+^2 (r_+ - r_-)}, \quad (5.17)$$

$$r_2 = r_- - b^2 \frac{4q^2}{r_-^2 (r_+ - r_-)}, \quad (5.18)$$

onde encontramos em função de  $\omega$

$$r_1 = m(1 + \omega) + b^2 \frac{2}{m\omega} \frac{1 - \omega}{1 + \omega}, \quad (5.19)$$

$$r_2 = m(1 - \omega) - b^2 \frac{2}{m\omega} \frac{1 + \omega}{1 - \omega}, \quad (5.20)$$

Escrevendo em variáveis adimensionais

$$\rho = \frac{r}{m}, \quad (5.21)$$

$$Q = \frac{q}{m}, \quad (5.22)$$

$$\beta = \frac{b^2}{m^2}, \quad (5.23)$$

e substituindo (5.21), (5.22) e (5.23) respectivamente em (5.8), (5.19) e (5.20)

$$\rho_0 = 0, \quad (5.24)$$

$$\rho_1 = 1 + \omega + \beta \frac{2}{\omega} \frac{1 - \omega}{1 + \omega}, \quad (5.25)$$

$$\rho_2 = 1 - \omega - \beta \frac{2}{\omega} \frac{1 + \omega}{1 - \omega}, \quad (5.26)$$

que são os raios adimensionais calculados numa primeira perturbação em Reissner-Nordström, onde  $\rho_1$  corresponde ao horizonte externo e  $\rho_2$  ao horizonte interno. Veja que quando  $q = 0$ , a relação carga-massa dada por (5.13) se resume a  $\omega = 1$ . De (5.17) e (5.18) temos que (5.17) é na verdade o raio de Schwarzschild e (5.18) é nulo devido ao parâmetro  $\beta$ .

Comparando nossos resultados com o espaço-tempo de Reissner-Nordström, temos para o horizonte exterior:

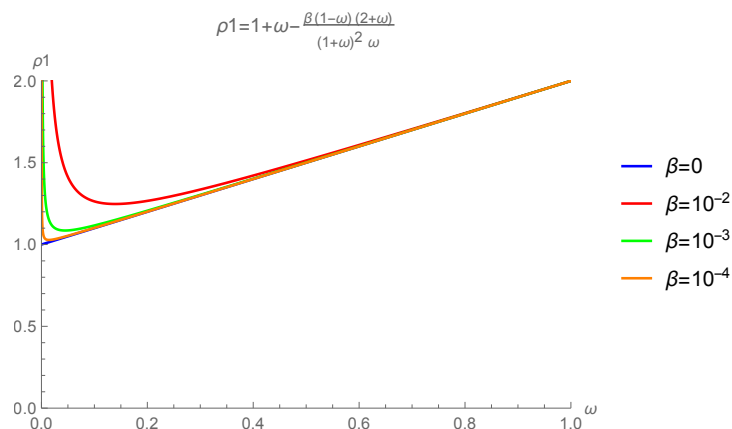


Figura 5 – Horizonte de eventos externo.

Perceba que para  $\beta \rightarrow 0$ , o horizonte exterior perturbado se aproxima do horizonte exterior de Reissner-Nordström. Para valores de  $\omega$  próximos de 1 praticamente não se



observa os efeitos do parâmetro  $b$  de Podolsky, enquanto que para  $\omega \rightarrow 0$ , a perturbação provoca uma divergência no horizonte externo, onde a teoria de perturbações deixa de ter validade.

Para o horizonte interior:

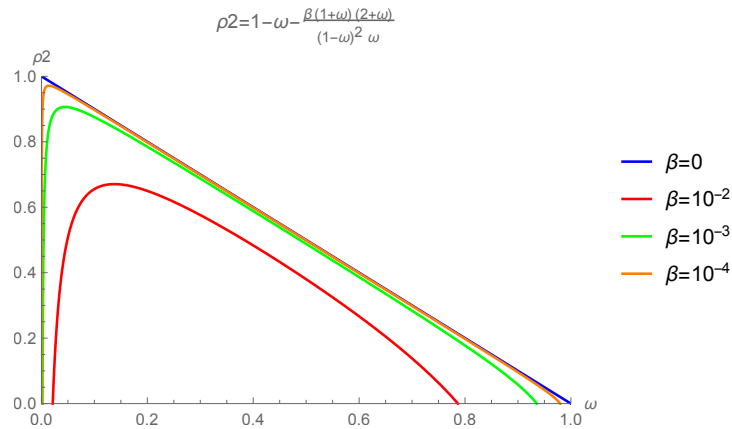


Figura 6 – Horizonte de eventos interno.

Aqui novamente, quando  $\beta \rightarrow 0$  o horizonte perturbado se aproxima do horizonte interno de Reissner-Nordström. Analisando os limites de  $\omega$ , vemos que quando  $\omega \rightarrow 1$  não temos horizonte interno, como foi discutido anteriormente. Mas mesmo com uma pequena presença de carga elétrica, podemos observar que para alguns valores de  $\beta$  fixo, não há presença do horizonte interno. Além disso, vemos que o parâmetro  $\beta$  contribui para a diminuição do tamanho do horizonte interno. Para o limite  $\omega \rightarrow 0$  também é possível que para alguns valores de  $\beta$  não haja horizonte interno.

Por fim, analisando simultaneamente os dois horizontes, temos o gráfico abaixo:

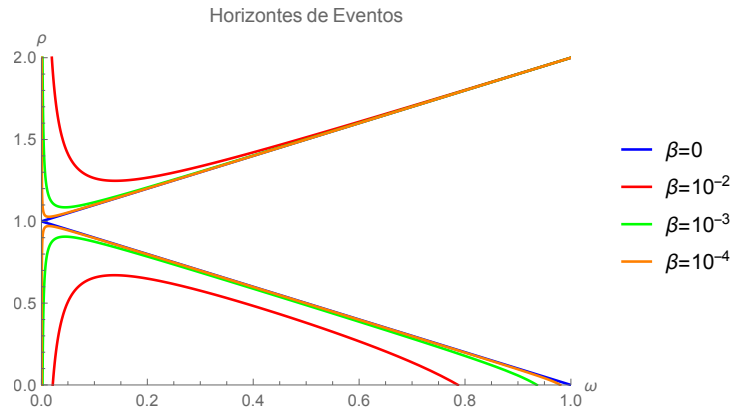


Figura 7 – Horizontes de eventos de Reissner-Nordström e horizontes perturbados de Podolsky

Então, para  $\beta \rightarrow 0$ , os horizontes da eletrodinâmica de Podolsky se aproximam dos horizontes de Reissner-Nordstrom.

O limite de validade das expressões (5.25) e (5.26) é determinado pelas condições:

$$\gamma_1 = \beta \frac{2}{\omega} \frac{1 - \omega}{(1 + \omega)^2} = 1 \quad (5.27)$$

$$\gamma_2 = \beta \frac{2}{\omega} \frac{1 + \omega}{(1 - \omega)^2} = 1 \quad (5.28)$$

onde

$$\omega^2 = 1 - Q^2$$

onde (5.27) e (5.28) são dados pela razão dos termos na série perturbativa.

É fácil verificar que o limite imposto por  $\gamma$  é válido para todo  $\rho$ . Para uma melhor visualização do comportamento dos horizontes de eventos, temos o gráfico abaixo:

## 5.2 A TRAJETÓRIA DE UM RAIOS DE LUZ EM UM CAMPO DE PODOLSKY

Vamos agora analisar a trajetória de um raio de luz em um campo de Podolsky. Para isso, vamos determinar as equações do movimento na métrica de Podolsky. Assim como feito na métrica de Schwarzschild, vamos assumir que a trajetória é uma geodésica nula e assim  $ds^2 = 0$ . Como não podemos diferenciar em relação a  $s$ , vamos utilizar do transporte paralelo. Assim, tomando um vetor  $dx^\alpha/dp$  deslocando paralelamente a um parâmetro  $p$  de acordo com

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{dx^\alpha}{dp} \right) + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dp} \frac{dx^\gamma}{dp} = 0$$

que no transporte paralelo deve preservar seu comprimento.

A equação diferencial para geodésicas nulas é equivalente ao problema variacional (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975)

$$\delta \int g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} dp = 0$$

Lembramos que na métrica de Podolsky

$$g^{11} = e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \left( \frac{q}{r_P} \right)^2 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( \frac{r_P}{r} \right)^4 + 8 \left( \frac{q}{r_P} \right)^2 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \frac{r_P}{r} \left( 2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}} \right)$$

$$g_{00} = e^{\nu(r)} = \left( 1 - 2\frac{q^2}{r_P^2} F(r) \right) \times \left[ 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \left( \frac{q}{r_P} \right)^2 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( \frac{r_P}{r} \right)^4 + 8 \left( \frac{q}{r_P} \right)^2 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \frac{r_P}{r} \left( 2Ei\left(-2\frac{r}{r_P}\right) + \frac{r_P}{r} e^{-2\frac{r}{r_P}} \right) \right]$$

onde

$$F(r) = Ei\left(-\frac{2r}{r_P}\right) - \frac{b^2}{r_P^2} H(r)$$

$$H(r) = Ei\left(-\frac{r}{r_P}\right) + e^{-\frac{2r}{r_P}} \left( 3\frac{r_P^4}{r^4} + 6\frac{r_P^3}{r^3} + 10\frac{r_P^2}{r^2} \right) - e^{-\frac{r}{r_P}} \left( 6\frac{r_P^4}{r^4} + 6\frac{r_P^3}{r^3} + \frac{r_P^2}{r^2} - \frac{r_P}{r} \right) + 3\frac{r_P^4}{r^4}$$

Então o problema variacional é dado por

$$\delta \int \left[ e^\nu c^2 \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right] dp = 0$$

onde “ponto” é variação com respeito a  $p$ .

Por se tratar de uma métrica com simetria esférica, a parte angular do elemento de linha é idêntica a Schwarzschild, de modo que as equações de Euler-Lagrange para  $\theta$ ,  $\phi$  e  $t$  são:

$$\frac{d}{dp} \left( r^2 \dot{\theta} \right) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (5.29)$$

$$\frac{d}{dp} \left( r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dp} \left( e^\nu \dot{t} \right) = 0 \quad (5.31)$$

Escolhendo um eixo de coordenadas apropriadamente orientado de tal maneira que podemos tomar  $\theta = \pi/2$ , e  $\dot{\theta} = 0$  para algum parâmetro inicial  $p$ , temos

$$r^2 \dot{\phi} = h = \text{constante} \quad (5.32)$$

Para (5.31) temos

$$e^\nu \dot{t} = l = \text{constante} \quad (5.33)$$

Agora, substituindo as equações (5.32) e (5.33) no elemento de linha

$$ds^2 = e^\nu c^2 \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (5.34)$$

temos

$$0 = e^{-\nu} c^2 \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}, \quad (5.35)$$

vamos multiplicar por  $e^\nu$

$$0 = c^2 \dot{t}^2 - e^{\nu+\lambda} \dot{r}^2 - e^\nu \frac{h^2}{r^2}.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \\ \dot{r} &= \dot{\phi} r' = \frac{h}{r^2} r' \end{aligned}$$

onde  $(\dot{\phantom{r}})$  significa derivada em relação a  $\phi$  temos

$$0 = c^2 \dot{t}^2 - e^{\nu+\lambda} \frac{h^2}{r^4} r'^2 - e^\nu \frac{h^2}{r^2}$$

Fazendo agora

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{z} \\ r' &= -\frac{z'}{z^2} \end{aligned}$$

e assim temos

$$\begin{aligned} 0 &= c^2 \dot{t}^2 - e^{\nu+\lambda} \frac{h^2}{r^4} r'^2 - e^\nu \frac{h^2}{r^2} \\ 0 &= c^2 \dot{t}^2 - e^{\nu+\lambda} h^2 z'^2 - e^\nu z^2 h^2 \end{aligned}$$

Em Schwarzschild, temos que  $\nu = -\lambda$ , e assim não há componentes da métrica no segundo termo do lado direito da equação acima.

Vamos substituir (4.18), (4.15) e (4.19), supondo que  $r \gg r_P$ , podemos aproximar para

$$\begin{aligned} e^{(\nu+\lambda)} &= 1 + 6 \frac{q^2}{r_P^2} \frac{b^2}{r_P^2} \frac{r_P^4}{r^4} = 1 + 6b^2 \frac{q^2}{r^4}, \\ e^{-\lambda(r)} &= 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \left( \frac{q}{r_P} \right)^2 \left( \frac{b}{r_P} \right)^2 \left( \frac{r_P}{r} \right)^4 = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \frac{q^2}{r^4} b^2, \end{aligned}$$

$$e^\nu = e^{(\nu+\lambda)} e^{-\lambda} = \left(1 + 6b^2 \frac{q^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \frac{q^2}{r^4} b^2\right).$$

Vamos definir

$$\varepsilon_1 = 2m, \quad \varepsilon_2 = 2q^2, \quad \varepsilon_3 = 6b^2 q^2. \quad (5.36)$$

Escrevendo em função de  $z$  e desprezando os termos de ordem superior a  $\varepsilon_1 = 3m, \varepsilon_2 = 2q^2, \varepsilon_3 = 6b^2 q^2$ .

$$\begin{aligned} e^{(\nu+\lambda)} &= 1 + 6b^2 q^2 z^4, \\ e^{-\lambda(r)} &= 1 - 2mz + q^2 z^2 - 4q^2 b^2 z^4, \\ e^\nu &= 1 - 2mz + q^2 z^2 + 2q^2 b^2 z^4. \end{aligned}$$

Então a equação fica

$$0 = c^2 l^2 - h^2 \left[ (1 + 6b^2 q^2 z^4) z'^2 + (1 - 2mz + q^2 z^2 + 2b^2 q^2 z^4) z^2 \right].$$

Diferenciando com respeito a  $\phi$

$$0 = z' (24b^2 q^2 z^3 z'^2 + 2z'' + 12b^2 q^2 z^4 z'' + 2z - 6mz^2 + 4q^2 z^3 + 12b^2 q^2 z^5).$$

Se  $z' = 0$ , temos  $r$  constante, ou seja, movimento circular. Para  $z' \neq 0$ , temos

$$z'' + z - 3mz^2 + 2q^2 z^3 + 6b^2 q^2 z^4 z'' + 12b^2 q^2 z^3 z'^2 + 6b^2 q^2 z^5 = 0.$$

Reescrevendo temos

$$z'' + z - \varepsilon_1 z^2 + \varepsilon_2 z^3 + \varepsilon_3 (z^4 z'' + 2z^3 z'^2 + z^5) = 0.$$

Veja que tomando  $q = 0$ , ou seja,  $\varepsilon_3 = 0$  e  $\varepsilon_2 = 0$ , temos o caso de Schwarzschild.

$$z'' + z - 3mz^2 = 0.$$

Supondo uma solução do tipo

$$z = z_0 + \varepsilon_1 v_1 + O(\varepsilon_1^2)$$

e separando os termo de ordem zero de  $\varepsilon_1$  dos termos de ordem 1, obtemos a solução de Schwarzschild

$$\begin{aligned} z_0'' + z_0 &= 0 \Rightarrow z_0 = \frac{1}{r_0} \text{sen}\phi, \\ \varepsilon_1 v_1'' + \varepsilon_1 v_1 &= \varepsilon_1 z_0^2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi\right). \end{aligned}$$

Agora, tomando  $b = 0$ , ou seja,  $\varepsilon_3 = 0$ , temos o caso de Reissner-Nordström, pois o parâmetro  $a$  de Podolsky faz parte de  $r_P$ , e como tomamos o limite  $r/r_P \rightarrow \infty$ , o parâmetro  $a$  desaparece com exponenciais.

$$z'' + z + z^2(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 z) = 0.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, supomos uma solução do tipo

$$z = z_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + O(\varepsilon_1^2) + O(\varepsilon_2^2).$$

Separando novamente os termos de ordem  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} z_0'' + z_0 &= 0, \\ \varepsilon_1 v_1'' + \varepsilon_1 v_1 &= \varepsilon_1 z_0^2, \\ \varepsilon_2 v_2'' + \varepsilon_2 v_2 &= -\varepsilon_2 z_0^3. \end{aligned}$$

Assim, buscamos uma solução para

$$v_2'' + v_2 = -z_0^3. \quad (5.37)$$

Finalmente, considerando que nenhum termo de ordem 1 de perturbação é desprezível, obtemos o caso de Podolsky

$$z'' + z - \varepsilon_1 z^2 + \varepsilon_2 z^3 + \varepsilon_3 (z^4 z'' + 2z^3 z'^2 + z^5) = 0$$

e novamente, supondo uma solução do tipo

$$z = z_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_3 v_3 + O(\varepsilon_1^2) + O(\varepsilon_2^2) + O(\varepsilon_3^2)$$

e separando os termos de ordem  $\varepsilon$  temos

$$\begin{aligned} z_0'' + z_0 &= 0, \\ \varepsilon_1 v_1'' + \varepsilon_1 v_1 &= \varepsilon_1 z_0^2, \\ \varepsilon_2 v_2'' + \varepsilon_2 v_2 &= -\varepsilon_2 z_0^3, \\ \varepsilon_3 v_3'' + \varepsilon_3 v_3 &= -\varepsilon_3 (z_0^4 z_0'' + 2z_0^3 z_0'^2 + z_0^5). \end{aligned}$$

Procuramos uma solução para

$$v_3'' + v_3 = - (z_0^4 z_0'' + 2z_0^3 z_0'^2 + z_0^5). \quad (5.38)$$

Como todas essas equações possuem solução homogênea idêntica e apresentam o mesmo operador diferencial, vamos encontrar a solução particular de cada uma através da função de Green.

As soluções das duas primeiras equações já são conhecidas (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975), sendo elas

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{r_0} \operatorname{sen} \phi, \\ v_1 &= \frac{1}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right). \end{aligned}$$

Queremos então encontrar uma solução particular para (5.37) e (5.38). Em contexto geral, essa solução é dada por (ARFKEN; WEBER, 2007)

$$y_p(x) = \int G(x, x') g(x') dx' \quad (5.39)$$

onde  $G(x, x')$  é a função de Green associada ao operador  $L[y] = g(x)$ . Essa função deve satisfazer

$$L[G(x, x')] = \delta(x - x').$$

No nosso caso, o operador é definido como  $L = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 1$ .

Sendo assim, dado o problema

$$\begin{aligned} Lu &= u'' + u = g(x), \\ u(0) &= 0 \text{ e } u(\pi/2) = \frac{1}{r_0}, \end{aligned}$$

ou seja, para  $\phi = 0$  a trajetória é assintótica e para  $\phi = \pi/2$  temos a maior aproximação da trajetória da luz em relação ao Sol. Sendo assim, vamos encontrar a função de Green, que é solução do problema

$$G''(x) + G(x) = \delta(x - s). \quad (5.40)$$

Se  $x \neq s$ , então a função delta é nula, e a solução geral é

$$G(x, s) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

Para  $x < s$ , a condição de contorno em  $x = 0$  implica que

$$\begin{aligned} G_1(0, s) &= c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = 0, \\ c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Para  $x > s$ , a condição de contorno em  $x = \pi/2$  implica que

$$\begin{aligned} G_2(\pi/2, s) &= c_3 \operatorname{sen} \pi/2 + c_4 \cos \pi/2 = 0, \\ c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Então a solução até agora é da forma

$$G(x, s) = \begin{cases} c_1 \operatorname{sen} x & \text{se } x < s \\ c_4 \cos x & \text{se } x > s \end{cases}$$

Para determinar as constantes  $c_1$  e  $c_4$ , vamos impor a condição de continuidade da função de Green em  $x = s$ , ou seja

$$c_1 \operatorname{sen} s = c_4 \cos s.$$

Pela condição de descontinuidade da derivada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G'(s + \varepsilon, s) - G'(s - \varepsilon, s) = 1$$

temos

$$c_1 \cos s + c_4 \operatorname{sen} s = 1.$$

Então, resolvendo o sistema encontramos

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(s), \\ c_4 &= \operatorname{sen}(s) \end{aligned}$$

e assim a função de Green para esse problema é

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \begin{cases} \cos(s) \operatorname{sen} x & \text{se } x < s \\ \operatorname{sen}(s) \cos x & \text{se } x > s \end{cases} \\ \text{ou } G(x, s) &= \theta(s - x) \cos(s) \operatorname{sen} x + \theta(x - s) \operatorname{sen}(s) \cos x. \end{aligned}$$

Onde  $\theta(x)$  é a função de Heaviside. Vamos testar a função de Green encontrada para a solução já conhecida da equação

$$v_1'' + v_1 = z_0^2 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right).$$

A solução homogênea é

$$z_0 = \frac{1}{r_0} \operatorname{sen} \phi. \tag{5.41}$$



Sendo o intervalo de integração entre 0 e  $\pi/2$  (maior proximidade ao Sol), e tomando  $s$  como um parâmetro de integração, a solução particular será dada por

$$\begin{aligned} v_{1p}(\phi) &= \int_0^{\pi/2} (\theta(s - \phi) \cos(s) \operatorname{sen}\phi + \theta(\phi - s) \operatorname{sen}(s) \cos\phi) \left(\frac{\operatorname{sen}(s)}{r_0}\right)^2 ds \\ v_{1p}(\phi) &= \int_0^\phi \cos(s) \operatorname{sen}(\phi) \left(\frac{\operatorname{sen}(s)}{r_0}\right)^2 ds + \int_\phi^{\pi/2} \operatorname{sen}(s) \cos(\phi) \left(\frac{\operatorname{sen}(s)}{r_0}\right)^2 ds \\ v_{1p}(\phi) &= \frac{1}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi\right). \end{aligned}$$

E então a solução geral é

$$\begin{aligned} z(\phi) &= z_0 + \varepsilon_1 v_1(\phi) \\ z(\phi) &= \frac{1}{r_0} \operatorname{sen}\phi + \varepsilon_1 \frac{1}{2r_0^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi\right). \end{aligned}$$

Que é a Solução encontrada por Schwarzschild, (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975). Com o resultado acima, podemos utilizar a função de Green para encontrar as soluções das equações restantes.

Então, tomando o caso de Reissner-Nordström, temos que resolver

$$v_2'' + v_2 = -z_0^3, \quad (5.42)$$

e substituindo (5.41) em (5.42) temos que encontrar a solução particular dada por

$$\begin{aligned} v_{2p}(\phi) &= - \int_0^\phi \cos(s) \operatorname{sen}(\phi) \left(\frac{\operatorname{sen}(s)}{r_0}\right)^3 ds - \int_\phi^{\pi/2} \operatorname{sen}(s) \cos(\phi) \left(\frac{\operatorname{sen}(s)}{r_0}\right)^3 ds \\ v_{2p}(\phi) &= -\frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{32r_0^3} - \frac{9 \operatorname{sen}(\phi)}{32r_0^3} - \frac{3\pi \cos(\phi)}{16r_0^3} + \frac{3\phi \cos(\phi)}{8r_0^3} \end{aligned}$$

E agora, tomando o caso de Podolsky, resta resolver a equação

$$v_3'' + v_3 = - (z_0^4 z_0'' + 2z_0^3 z_0'^2 + z_0^5), \quad (5.43)$$

substituindo (5.41) em (5.43), implica em encontrar uma solução particular para

$$v_3'' + v_3 = -\frac{2 \operatorname{sen}^3(\phi) \cos^2(\phi)}{r_0^5}.$$

Utilizando a função de Green

$$\begin{aligned} v_{3p}(\phi) &= \int_0^\phi \cos(s) \operatorname{sen}(\phi) \left(-\frac{2 \operatorname{sen}^3(s) \cos^2(s)}{r_0^5}\right) ds + \int_\phi^{\pi/2} \operatorname{sen}(s) \cos(\phi) \left(-\frac{2 \operatorname{sen}^3(s) \cos^2(s)}{r_0^5}\right) ds \\ v_{3p}(\phi) &= -\frac{\operatorname{sen}(5\phi)}{96r_0^5} + \frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{32r_0^5} - \frac{7 \operatorname{sen}(\phi)}{24r_0^5} - \frac{\pi \cos(\phi)}{8r_0^5} + \frac{\phi \cos(\phi)}{4r_0^5}, \end{aligned}$$

e assim a solução é

$$z(\phi) = \frac{1}{r_0} \operatorname{sen} \phi + \varepsilon_1 \frac{1}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) + \varepsilon_2 \left( -\frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{32r_0^3} - \frac{9 \operatorname{sen}(\phi)}{32r_0^3} - \frac{3\pi \cos(\phi)}{16r_0^3} + \frac{3\phi \cos(\phi)}{8r_0^3} \right) + \varepsilon_3 \left( -\frac{\operatorname{sen}(5\phi)}{96r_0^5} + \frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{32r_0^5} - \frac{7 \operatorname{sen}(\phi)}{24r_0^5} - \frac{\pi \cos(\phi)}{8r_0^5} + \frac{\phi \cos(\phi)}{4r_0^5} \right). \quad (5.44)$$

Agora, considere que a trajetória do raio de luz é assintoticamente paralela ao eixo  $x$ . Isso corresponde aos valores de  $\phi$  que tornam  $z = 0$ , ou seja,  $\phi \rightarrow 0$  ou  $\phi \rightarrow \pi$ . Considerando então  $\phi = 0$  e sendo  $\delta$  o menor ângulo entre a trajetória assintótica e o eixo  $x$ , podemos aproximar  $\phi \approx \operatorname{sen} \phi \approx \delta$  e  $\cos n\phi \approx 1$ . Tomando então  $z = 0$  e fazendo essas substituições em (5.44) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r_0} \delta \\ &+ \varepsilon_1 \frac{1}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \\ &+ \varepsilon_2 \left( -\frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{32r_0^3} - \frac{9\delta}{32r_0^3} - \frac{3\pi}{16r_0^3} + \frac{3\delta}{8r_0^3} \right) \\ &+ \varepsilon_3 \left( -\frac{\operatorname{sen}(5\phi)}{96r_0^5} + \frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{32r_0^5} - \frac{7\delta}{24r_0^5} - \frac{\pi}{8r_0^5} + \frac{\delta}{4r_0^5} \right) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\operatorname{sen}(3\phi) = \operatorname{sen}(2\phi + \phi) = \operatorname{sen}(2\phi) \cos(\phi) + \operatorname{sen}(\phi) \cos(2\phi) = 2 \operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\phi) + \operatorname{sen}(\phi) \cos(2\phi)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(5\phi) &= \operatorname{sen}(3\phi + 2\phi) = \operatorname{sen}(3\phi) \cos(2\phi) + \operatorname{sen}(2\phi) \cos(3\phi) \\ &= 2 \operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\phi) \cos(2\phi) + \operatorname{sen}(\phi) \cos^2(2\phi) + 2 \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) \cos(3\phi) \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r_0} \delta \\ &+ \varepsilon_1 \frac{1}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \\ &+ \varepsilon_2 \left( -\frac{2 \operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\phi)}{32r_0^3} - \frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos(2\phi)}{32r_0^3} - \frac{9\delta}{32r_0^3} - \frac{3\pi}{16r_0^3} + \frac{3\delta}{8r_0^3} \right) \\ &+ \varepsilon_3 \left( -\frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\phi) \cos(2\phi)}{48r_0^5} - \frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos^2(2\phi)}{96r_0^5} - \frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) \cos(3\phi)}{48r_0^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos^2(\phi)}{16r_0^5} + \frac{\operatorname{sen}(\phi) \cos(2\phi)}{32r_0^5} - \frac{7\delta}{24r_0^5} - \frac{\pi}{8r_0^5} + \frac{\delta}{4r_0^5} \right) \end{aligned}$$

temos então

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{r_0} \delta \\
&+ \varepsilon_1 \frac{1}{2r_0^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \\
&+ \varepsilon_2 \left( -\frac{\delta}{16r_0^3} - \frac{\delta}{32r_0^3} - \frac{9\delta}{32r_0^3} - \frac{3\pi}{16r_0^3} + \frac{3\delta}{8r_0^3} \right) \\
&+ \varepsilon_3 \left( -\frac{\delta}{48r_0^5} - \frac{\delta}{96r_0^5} - \frac{\delta}{48r_0^5} + \frac{\delta}{16r_0^5} + \frac{\delta}{32r_0^5} - \frac{7\delta}{24r_0^5} - \frac{\pi}{8r_0^5} + \frac{\delta}{4r_0^5} \right)
\end{aligned}$$

simplificando

$$0 = \frac{1}{r_0} \delta + \varepsilon_1 \frac{2}{3r_0^2} + \varepsilon_2 \left( -\frac{3\pi}{16r_0^3} \right) + \varepsilon_3 \left( -\frac{\pi}{8r_0^5} \right)$$

Então nossa expressão para  $\delta$  é:

$$\delta = -3m \frac{2}{3r_0} + 2q^2 \frac{3\pi}{16r_0^2} + 6b^2 q^2 \frac{\pi}{8r_0^4}$$

Assim como em Schwarzschild, o sinal de menos indica que a trajetória foi desviada em direção à estrela. Na outra assintótica, ou seja, para  $\phi = \pi - \delta$ , impondo uma simetria, teremos o mesmo valor para  $\delta$ , e assim, a deflexão total do raio de luz, ou seja, o ângulo entre as assintóticas é

$$\Delta = \frac{4m}{r_0} - \frac{3\pi q^2}{4r_0^2} - \frac{3\pi b^2 q^2}{2r_0^4}$$

Percebemos aqui que, em uma primeira aproximação, a deflexão total da luz na eletrodinâmica generalizada sofre o efeito da carga elétrica e do acoplamento não mínimo, além é claro, da massa do objeto.

Considerando apenas o efeito da massa, temos o caso de Schwarzschild. Percebemos então que a carga elétrica e o parâmetro  $b$  de Podolsky diminuem um pouco o desvio que a luz deve sofrer pela ação da massa.

### 5.3 TEMPO DE VIAGEM DA LUZ EM UM CAMPO DE PODOLSKY

Assim como feito no caso de Schwarzschild, vamos analisar o tempo de viagem da luz com as métricas encontradas anteriormente. Considere então que um raio de luz sofra um desvio em sua trajetória, e como a velocidade da luz é constante, um aumento na trajetória implica em um tempo maior de viagem. Pondo esse raio paralelamente ao eixo  $x$ , com  $r \sin\phi = r_0$  e  $\theta = \pi/2$ , em um elemento de linha tipo luz temos

$$0 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (5.45)$$

Utilizando a mesma ideia de Schwarzschild, vamos reescrever  $r^2 d\phi^2$  em termos de  $r$  e  $dr$ . Da equação  $r \sin\phi = r_0$  podemos escrever

$$r^2 d\phi^2 = \frac{r_0^2 dr^2}{r^2 - r_0^2} \quad (5.46)$$

basta tomar a diferencial de

$$r \sin\phi = r_0$$

e elevar ao quadrado.

Substituindo (5.46) em (5.45):

$$c^2 dt^2 = e^{\lambda-\nu} \left( 1 + e^{-\lambda} \frac{r_0^2}{(r^2 - r_0^2)} \right) dr^2$$

e extraindo a raiz

$$cdt = e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \left( 1 + e^{-\lambda} \frac{r_0^2}{(r^2 - r_0^2)} \right)^{1/2} dr \quad (5.47)$$

Tomando a aproximação  $r_P \ll r$ , as componentes da métrica resultam nas equações (4.18), (4.15) e (4.19), o que implica em

$$e^{\lambda-\nu} = \frac{1}{e^{\nu-\lambda}} = \frac{1}{\left( 1 + 6b^2 \frac{q^2}{r^4} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \frac{q^2}{r^4} b^2 \right)^2}.$$

Substituindo em (5.47) temos

$$cdt = \left( \frac{\left( 1 - \frac{2m}{r^3} r_0^2 + \frac{q^2}{r^4} r_0^2 - 4 \frac{b^2 q^2}{r^6} r_0^2 \right)}{\left( 1 + 6b^2 \frac{q^2}{r^4} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \frac{b^2 q^2}{r^4} \right)^2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)} \right)^{1/2} dr.$$

Considerando a definição (5.36), vamos expandir  $\left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} - 4 \frac{b^2 q^2}{r^4} \right)^2$  e desprezar termos de orde superior a  $\varepsilon$ . Temos então

$$cdt = \left( \frac{\left( 1 - \frac{2m}{r^3} r_0^2 + \frac{q^2}{r^4} r_0^2 - 4 \frac{b^2 q^2}{r^6} r_0^2 \right)}{\left( 1 + 6b^2 \frac{q^2}{r^4} \right) \left( 1 - 4 \frac{m}{r} + 2 \frac{q^2}{r^2} - 8b^2 \frac{q^2}{r^4} \right)} \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right)} \right)^{1/2} dr$$

Agora, fazendo a multiplicação do denominador e desprezando os termos de ordem superior a  $\varepsilon$ , nossa aproximação fica

$$cdt = \left( \frac{\left( 1 - \frac{2m}{r^3} r_0^2 + \frac{q^2}{r^4} r_0^2 - 4 \frac{b^2 q^2}{r^6} r_0^2 \right)}{\left( 1 - 4 \frac{m}{r} + 2 \frac{q^2}{r^2} - 2b^2 \frac{q^2}{r^4} \right)} \right)^{1/2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}}.$$

Vamos expandir o denominador. Para isso faremos a expansão de primeira ordem em  $\bar{\varepsilon}$ , onde  $\bar{\varepsilon}$  é o termo que contém as perturbações  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

$$\frac{1}{\sqrt{1+\bar{\varepsilon}}} = 1 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} + O(\bar{\varepsilon}^2).$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned} cdt &= \left(1 - \frac{2m}{r^3}r_0^2 + \frac{q^2}{r^4}r_0^2 - 4\frac{b^2q^2}{r^6}r_0^2\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\right) \frac{dr}{\sqrt{1-r_0^2/r^2}} \\ cdt &= \left(1 - \frac{2m}{r^3}r_0^2 + \frac{q^2}{r^4}r_0^2 - 4\frac{b^2q^2}{r^6}r_0^2\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{q^2}{r^2} + \frac{b^2q^2}{r^4}\right) \frac{dr}{\sqrt{1-r_0^2/r^2}}. \end{aligned}$$

Agora, vamos fazer uma expansão de primeira ordem em  $\bar{\varepsilon}$  para

$$\sqrt{1+\bar{\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} + O(\bar{\varepsilon}^2)$$

e assim obtemos

$$cdt = \left(1 - \frac{m}{r^3}r_0^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{r^4}r_0^2 - 2\frac{b^2q^2}{r^6}r_0^2\right) \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{q^2}{r^2} + \frac{b^2q^2}{r^4}\right) \frac{dr}{\sqrt{1-r_0^2/r^2}}.$$

Multiplicando os termos entre parênteses e desprezando os termos de ordem 2 de  $\varepsilon$ , chegamos em

$$cdt = \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{mr_0^2}{r^3} - \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2r_0^2}{r^4} + \frac{b^2q^2}{r^4} - 2\frac{b^2q^2r_0^2}{r^6}\right) \frac{dr}{\sqrt{1-r_0^2/r^2}}.$$

Aqui, tomando  $q = 0$  temos o tempo de viagem da luz no espaço-tempo de Schwarzschild. Se tomarmos apenas  $b = 0$ , temos o caso de Reissner-Nordström, e tomando a equação completa, o caso de Podolsky. Sendo assim, para os três primeiros termos já sabemos o resultado da integral (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975)

$$\begin{aligned} ct &= \left(\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2}\right) + 2m \log \frac{\left(\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2} + r_{planeta}\right) \left(\sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2} + r_{Terra}\right)}{r_0^2} \\ &\quad - m \left(\frac{\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2}}{r_{planeta}} + \frac{\sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2}}{r_{Terra}}\right) \end{aligned}$$

onde a integral vai de  $r = r_0$  até  $r_{planeta}$  e de  $r = r_0$  até  $r_{Terra}$ . É mais conveniente separar a integral em duas partes pois temos assim o tempo que a luz leva para sair do planeta e chegar até a distância mais próxima do Sol, e depois o tempo que leva, partindo dessa distância de maior aproximação com o Sol até a Terra.

Aqui, vamos reescrever em termos de  $\bar{\varepsilon}$ , definindo os parâmetros  $\bar{\varepsilon}_1 = m, \bar{\varepsilon}_2 = q^2, \bar{\varepsilon}_3 = b^2 q^2$

$$cdt = \left( 1 + \frac{2m}{r} - \frac{mr_0^2}{r^3} - \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{q^2 r_0^2}{r^4} + \frac{b^2 q^2}{r^4} - 2 \frac{b^2 q^2 r_0^2}{r^6} \right) \frac{dr}{\sqrt{1 - r_0^2/r^2}}$$

$$cdt = \left( 1 + \bar{\varepsilon}_1 \left( \frac{2}{r} - \frac{r_0^2}{r^3} \right) + \bar{\varepsilon}_2 \left( -\frac{1}{r^2} + \frac{r_0^2}{2r^4} \right) + \bar{\varepsilon}_3 \left( \frac{1}{r^4} - \frac{2r_0^2}{r^6} \right) \right) \frac{dr}{\sqrt{1 - r_0^2/r^2}}$$

Assim, obtemos as integrais

$$ct = \left( \sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2} \right) + 2\bar{\varepsilon}_1 \log \frac{\left( \sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2} + r_{planeta} \right) \left( \sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2} + r_{Terra} \right)}{r_0^2}$$

$$- \bar{\varepsilon}_1 \left( \frac{\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2}}{r_{planeta}} + \frac{\sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2}}{r_{Terra}} \right)$$

$$+ \frac{\bar{\varepsilon}_2}{4} \left( \frac{\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2}}{r_{planeta}^2} + \frac{\sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2}}{r_{Terra}^2} \right) - \frac{3\bar{\varepsilon}_2}{4} \left( \frac{\cos^{-1} \left( \frac{r_0}{r_{planeta}} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{r_0}{r_{Terra}} \right)}{r_0} \right)$$

$$- \frac{\bar{\varepsilon}_3}{2} \left( \frac{\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2}}{r_{planeta}^4} + \frac{\sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2}}{r_{Terra}^4} \right) - \frac{\bar{\varepsilon}_3}{4} \left( \frac{\sqrt{r_{planeta}^2 - r_0^2}}{r_0^2 r_{planeta}^2} + \frac{\sqrt{r_{Terra}^2 - r_0^2}}{r_0^2 r_{Terra}^2} \right)$$

$$- \frac{\bar{\varepsilon}_3}{4} \left( \frac{\cos^{-1} \left( \frac{r_0}{r_{planeta}} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{r_0}{r_{Terra}} \right)}{r_0^3} \right)$$

Assim como esperado, o primeiro termo representa o espaço-tempo plano, e os demais termos as correções devido ao aumento da distância percorrida. Aqui, podemos ver claramente quais termos sofrem o efeito de atraso no tempo por conta das contribuições da massa ( $\varepsilon_1$ ), da carga ( $\varepsilon_2$ ) e do acoplamento não mínimo ( $\varepsilon_3$ ).

## 6 CONCLUSÃO

Na teoria da relatividade geral proposta por Einstein, a relação entre a geometria do espaço-tempo com a matéria, mudou a maneira de como vemos o universo (ISAACSON et al., 2007). A primeira solução dessas equações foi encontrada por Schwarzschild, que obteve uma métrica para um espaço-tempo estático e sem carga elétrica. Outra solução que foi abordada neste trabalho é a métrica encontrada por Reissner-Nordström, que difere da solução de Schwarzschild por levar em consideração a carga elétrica do objeto que deforma o espaço-tempo. A teoria eletromagnética utilizada por Reissner-Nordström é a teoria de Maxwell.

É possível mostrar que a eletrodinâmica de Maxwell possui uma única extensão linear de segunda ordem no espaço-tempo plano, a eletrodinâmica de Podolsky, que introduz um novo parâmetro  $a$ . Este nos fornece uma interpretação de que o fóton possui um modo massivo, e tal teoria eletromagnética é chamada de Eletrodinâmica de Podolsky.

Buscando uma generalização para espaços-tempo curvos, (CUZINATTO et al., 2018) mostraram que, para a lagrangiana da eletrodinâmica de Podolsky ser única, é necessário acrescentar mais um parâmetro,  $b$ , chamado aqui de acoplamento não-mínimo.

A eletrodinâmica de Maxwell pode ser vista como um limite da eletrodinâmica de Podolsky quando  $a \rightarrow 0$ . Neste trabalho utilizamos o parâmetro  $r_P = a^2 + 2b^2$  (raio de Podolsky), onde o parâmetro  $b$  é introduzido ao generalizar a eletrodinâmica de Podolsky para espaços-tempo curvos.

Outras possíveis aplicações da eletrodinâmica de Podolsky é na Eletrodinâmica Quântica (BORGES et al., 2019), utilizando a lagrangiana que possui ordens superiores de derivadas para correções quânticas. Também existem estudos de aplicações nas equações de Schrödinger para o átomo de hidrogênio considerando a eletrodinâmica de Podolsky (CARLEY; KIESSLING; PERLICK, 2018). Além disso, aplicações da eletrodinâmica de Podolsky oferecem possibilidades para uma grande área de pesquisas em física, como por exemplo estudos em massa de cargas aceleradas (ZAYATS, 2014).

Sendo assim, o que buscamos nesta dissertação foi encontrar soluções para as equações de Einstein que levassem em consideração a eletrodinâmica de Podolsky generalizada,

ou seja, levando em consideração o termo de acoplamento não mínimo. Para isso seguimos os passos feitos por Schwarzschild e Reissner-Nordstrom presentes em (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975).

Buscando uma solução para a equação (3.54), a fim de encontrar o campo elétrico de um espaço-tempo curvo com a eletrodinâmica generalizada, levamos em consideração que as componentes da métrica deveriam ser perturbações da métrica de Reissner-Nordström. A complexidade de se resolver a equação considerando a aproximação acima nos levou a buscar uma aproximação para uma métrica mais simples, e assim pudemos encontrar o campo elétrico com a eletrodinâmica generalizada em um espaço-tempo plano. Ou seja, supomos uma aproximação para um campo gravitacional fraco.

Assim, obtivemos  $E(r) = \frac{q}{r^2} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_P} + 1 \right) e^{-\frac{r}{r_P}} \right)$ , onde  $r_P = \sqrt{a^2 + 2b^2}$  é chamado raio de Podolsky. Este primeiro resultado nos mostrou que o campo elétrico de Podolsky possui um termo coulombiano e um termo que decai exponencialmente com raio de Podolsky vezes o fator  $\left( \frac{r}{r_P} + 1 \right)$ . Vimos que o campo de Podolsky tende ao campo elétrico coulombiano quando o termo  $r_P$  tende a zero. Também vimos que, diferentemente do campo coulombiano, o campo de Podolsky não diverge quando nos aproximamos da origem, ou seja, quando estamos muito próximos da fonte.

O parâmetro  $r_P$  se tornou muito útil em simplificações matemáticas e foi usado em todo o trabalho. De posse do campo elétrico, através da equação (3.58) encontramos uma relação entre as componentes da métrica  $\nu$  e  $\lambda$  e assim foi possível encontrar a métrica para um espaço-tempo com a eletrodinâmica de Podolsky.

Assim como esperávamos inicialmente, a métrica encontrada é uma perturbação da métrica de Reissner-Nordström, e essa perturbação é proveniente do termo de acoplamento não-mínimo. Isso nos levou a analisar os horizontes de eventos dessa métrica, e pudemos constatar que são aproximações dos horizontes de eventos de Reissner-Nordström. Nosso resultado é coerente com (VISHVESHWARA, 1968), que diz que a superfície de *redshift* infinito coincide com o horizonte de eventos em espaços-tempo esfericamente dimétricos e estáticos.

Por fim, fazemos uma análise da trajetória de um raio de luz e do atraso no tempo de viagem da luz em um espaço-tempo de Podolsky, assim como feito por (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975) para um espaço-tempo de Schwarzschild. Percebemos que



há uma contribuição que leva em consideração novamente o termo de acoplamento não-mínimo.

Esperamos que esses resultados sirvam como uma primeira aproximação em estudos que envolvam a eletrodinâmica generalizada em espaços-tempo curvos. Uma abordagem futura para este problema é resolver a equação para o campo elétrico levando em consideração a métrica de Reissner-Nordström (4.2), e assim encontrar o campo elétrico em um espaço-tempo curvo, a partir daí repetir os passos aqui feitos e encontrar as componentes da métrica para esta situação mais geral.

Para isso sugerimos que se leve em consideração a Teoria de Perturbação Singular (LIN; SEGEL, 1988) para resolver (3.54), pois esperava-se que o parâmetro  $r_P$  tivesse magnitude muito pequena em relação aos outros termos da equação. Embora ainda esteja em desenvolvimento, a teoria de perturbações singulares apresenta um grande potencial em resolver equações diferenciais de segunda ordem. No Apêndice colocamos os pontos importantes da teoria de perturbações singulares (e um roteiro a ser seguido) e na subseção 4.2.1 mostramos como é possível obter o campo elétrico (4.7) via teoria de perturbações singulares, contribuindo com mais um resultado para o desenvolvimento desta teoria.

## REFERÊNCIAS

- ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to General Relativity*. 2. ed. New York: McGraw-Hill Kogakusha, LTD, 1975.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BORGES, L. et al. Higher order derivative operators as quantum corrections. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 944, p. 114634, 2019.
- CARLEY, H. K.; KIESSLING, M. K.-H.; PERLICK, V. On the schrödinger spectrum of a hydrogen atom with electrostatic bopp-landé-thomas-podolsky interaction between electron and proton. arXiv preprint arXiv:1808.07546, 2018.
- CUZINATTO, R. et al. Bopp–podolsky black holes and the no-hair theorem. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 78, n. 1, p. 43, 2018. ISSN 1434-6044.
- CUZINATTO, R.; MELO, C. de; POMPEIA, P. Second order gauge theory. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 322, n. 5, p. 1211–1232, 2007.
- D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. New York: Oxford University Press Inc., 1992.
- GALVAO, C. A.; PIMENTEL, B. The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics. *Canadian Journal of Physics*, NRC Research Press, v. 66, n. 5, p. 460–466, 1988.
- GRATUS, J.; PERLICK, V.; TUCKER, R. W. On the self-force in Bopp–Podolsky electrodynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 48, n. 43, p. 435401, 2015.
- ISAACSON, W. et al. *Einstein: sua vida, seu universo*. S: Editora Companhia das Letras, 2007. v. 313. 38-45 p. ISSN 0036-8733.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: Hamilton Printing Company, 1999.
- LIN, C.-C.; SEGEL, L. A. *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences*. Philadelphia: Siam, 1988. v. 1.
- ORTEGA, P. H. *Aspectos Clássicos da Eletrodinâmica de Podolsky*. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Instituto de Física Teórica, 2014.
- PODOLSKY, B. A generalized electrodynamics part I—non-quantum. *Physical Review*, APS, v. 62, n. 1-2, p. 68, 1942.
- PODOLSKY, B.; KIKUCHI, C. A generalized electrodynamics part II—quantum. *Physical Review*, APS, v. 65, n. 7-8, p. 228, 1944.
- PODOLSKY, B.; SCHWED, P. Review of a generalized electrodynamics. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 20, n. 1, p. 40, 1948.

SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 38, p. e4201, 2016.

SHAPIRO, I. I. Testing general relativity with radar. *Physical Review*, APS, v. 141, n. 4, p. 1219, 1966.

SHAPIRO, I. I. Testing general relativity: Progress, problems, and prospects. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 3, n. 1-2, p. 135–148, 1972.

SOUZA, C. N. d. et al. *Eletrodinâmica de Podolsky aplicada à cosmologia*. Poços de Caldas: Universidade Federal de Alfenas, 2016.

VISHVESHWARA, C. Generalization of the Schwarzschild surface to arbitrary static and stationary metrics. *Journal of Mathematical Physics*, AIP, v. 9, n. 8, p. 1319–1322, 1968.

ZAYATS, A. E. Self-interaction in the Bopp–Podolsky electrodynamics: Can the observable mass of a charged particle depend on its acceleration? *Annals of Physics*, Elsevier, v. 342, p. 11–20, 2014.

## APÊNDICE A – TEORIA DE PERTURBAÇÕES SINGULARES

A teoria de perturbação singular consiste em utilizar a perturbação regular, onde simplesmente se despreza o termo de menor magnitude e, resolvendo a equação, encontra-se uma aproximação. Porém, se este termo estiver acompanhado da derivada de ordem mais alta, (no nosso caso, na derivada de ordem 2), desprezá-lo significa mudar completamente a natureza da equação, e conseqüentemente, suas soluções. Os cálculos aqui apresentados estão disponíveis em (LIN; SEGEL, 1988).

Sendo assim, vamos trabalhar com dois tipos de perturbações, as regulares e as singulares. Dada uma EDO, analisamos a magnitude de cada termo.

Na **perturbação regular**, desprezamos aquele que possui magnitude de ordem  $O(\varepsilon)$ . Exemplo

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y \approx \frac{dy}{dx} + y \quad (\text{A.1})$$

Veja que fazendo isso, alteramos a natureza da EDO, que agora passa a ser de 1ª ordem.

Na **perturbação singular**, fazemos um redimensionamento de tal maneira que o termo com  $\varepsilon$  possa ser desprezado sem alterar a natureza da EDO. Exemplo

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad \text{com } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (\text{A.2})$$

com as condições que  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ .

Na perturbação regular, temos a seguinte aproximação

$$2 \frac{dy}{dx} + y \approx 0 \quad (\text{A.3})$$

cujas soluções são  $y = ke^{-\frac{1}{2}x}$ . Pelas condições de contorno, ou  $y \equiv 0$ , ou

$$y = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x} \quad (\text{A.4})$$

que é a solução aproximada pela teoria de perturbações regular.

Vamos encontrar a solução exata de (A.2) e comparar com a solução aproximada (A.4). A solução de (A.2) é da forma

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \quad (\text{A.5})$$

onde  $m_1$  e  $m_2$  são as raízes de

$$\varepsilon m^2 + 2m + 1 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Pelas condições de contorno temos  $0 = C_1 + C_2$  e  $1 = C_1 e^{m_1} + C_2 e^{m_2}$ . Resolvendo o sistema

$$C_1 = \frac{1}{e^{m_1} - e^{m_2}} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{-1}{e^{m_1} - e^{m_2}} \quad (\text{A.7})$$

As raízes de (A.6) são  $m_1 = \frac{-1}{2}$  e  $m_2 = \frac{-2}{\varepsilon}$ , e assim, a solução exata é

$$y = \frac{e^{\frac{-1}{2}x} - e^{\frac{-2}{\varepsilon}x}}{e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-2}{\varepsilon}}} \quad (\text{A.8})$$

Veja que para  $0 < \varepsilon \ll 1$ , temos que  $e^{\frac{-2}{\varepsilon}}$  tem pouca contribuição, de modo que podemos desprezá-lo. Assim, a solução fica

$$y \approx e^{\frac{1}{2}} \left( e^{\frac{-x}{2}} - e^{\frac{-2x}{\varepsilon}} \right) \quad (\text{A.9})$$

Analisando a equação (A.9), temos  $y(0) = 0$ . Quando  $x \rightarrow \infty$ , o termo em colchetes tende a 0. Quando  $x = \varepsilon$ ,  $y \approx 0$ . Para  $x = n\varepsilon$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , o segundo termo tem pouca contribuição. Assim, podemos desprezar o segundo termo  $e^{\frac{-2x}{\varepsilon}}$ .

Então, a solução aproximada de (A.8) é

$$y = e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-x}{2}} = e^{(1-x)/2} \quad (\text{A.10})$$

ou seja, (A.4) é uma boa aproximação.

Na região de  $\varepsilon$ , a aproximação não é boa, mas fora dessa região, ela é. Então a perturbação regular nos dá uma boa aproximação para uma determinada região, mas deixa a desejar nos entornos de  $\varepsilon$ . Aqui a solução satisfaz apenas uma condição de contorno e não é uma boa aproximação para a região onde se encontra a segunda condição de contorno. Essa solução aproximada chamaremos de  $y_o$ , solução externa (*outer*).

É possível mostrar que tomando  $\varepsilon < 0$  a solução satisfaz apenas a outra condição de contorno, ou seja, não é uma boa aproximação em  $x = 1$ . Para encontrar uma solução aproximada dentro da camada de contorno vamos aplicar a teoria de perturbações singular.

Seja

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (\text{A.11})$$

com  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $y(0) = 0$  e  $y(1) = 1$ .

A camada de contorno próxima de  $x = 0$  tem espessura de magnitude  $\delta(\varepsilon)$ . Queremos que essa espessura tenda a 0 quando  $\varepsilon$  tender a 0, ou seja,  $\delta \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja, quanto menor a perturbação, menor deve ser a camada de contorno de  $\delta$ .

Seja

$$\xi = \frac{x}{\delta} \quad (\text{A.12})$$

um redimensionamento, e trocando  $y$  por  $Y$ , temos

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \frac{2}{\delta} \frac{dY}{d\xi} + Y = 0 \quad (\text{A.13})$$

onde  $Y(\xi, \varepsilon) \equiv y(\xi\varepsilon, \varepsilon)$  é a aproximação interna  $y_I(\varepsilon)$  para  $\xi$  fixo.

Como  $\delta$  é o comprimento da escala, as expressões

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2}, \frac{dY}{d\xi}, Y$$

são de ordem 1. Analisando e comparando os termos de (A.12), temos

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\delta^2} = \frac{1}{\delta} &\Rightarrow \varepsilon = \delta \\ \frac{\varepsilon}{\delta^2} = 1 &\Rightarrow \varepsilon = \delta^2 \\ \frac{1}{\delta} = 1 &\Rightarrow \delta = 1 \end{aligned}$$

E assim, ficamos com a primeira opção,  $\varepsilon = \delta$ . Logo, temos que

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon} \text{ em (A.12)} \quad (\text{A.14})$$

Assim, temos de (A.13) e (A.14)

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + 2 \frac{dY}{d\xi} + \varepsilon Y = 0 \quad (\text{A.15})$$

Agora, podemos desprezar o termo em  $\varepsilon$ , com  $y_I(0) = 0$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + 2 \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad (\text{A.16})$$

Temos então

$$y_I(\xi) = C (1 - e^{-2\xi}) \quad (\text{A.17})$$

que é a solução a menos da constante  $C$ .

Supondo que (A.17) seja uma boa aproximação da solução na camada de contorno, deseja-se fazer a colagem entre as soluções de tal maneira a garantir a continuidade e a uniformidade da solução. Assim, temos que  $x$  está dentro da camada de contorno quando  $x = O(\delta)$  e  $x$  está fora da camada de contorno quando  $x = O(1)$ . Na região intermediária, temos  $x = O[\Theta(\varepsilon)]$ , onde  $O(\Theta)$  está entre  $O(\delta)$  e  $O(1)$ . Assim, a função  $\Theta$  deve obedecer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\delta} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta = 0 \quad (\text{A.18})$$

Então, para  $x$  na camada de contorno, é apropriado introduzir  $\xi = \frac{x}{\delta}$  e deixar  $\varepsilon \rightarrow 0$  com  $\xi$  fixo. Na região intermediária, introduzimos  $\eta$ , onde

$$\eta = \frac{x}{\Theta}; \quad \text{com} \quad x = \eta\Theta \quad \text{e} \quad \xi = \eta \frac{\Theta}{\delta} \quad (\text{A.19})$$

e deixar  $\varepsilon \rightarrow 0$  com  $\eta$  fixo. As aproximações externa e interna se encontrarão se possuírem um limite comum quando  $\eta$  é introduzido e  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Esse encontro requer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y_o(x) |_{x=\eta\Theta}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y_I(\xi) |_{\xi=\eta\Theta/\delta}] \quad (\text{A.20})$$

com  $\eta$  fixo. Nesse caso, no lado esquerdo de (A.20) utilizando (A.18) temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [e^{1/2(1-x)} |_{x=\eta\Theta}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{1/2(1-\eta\Theta)} = e^{1/2} \quad (\text{A.21})$$

No lado direito temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C (1 - e^{-2\eta\Theta/\delta}) = C \quad (\text{A.22})$$

De (A.21) e (A.22) temos  $C = e^{1/2}$ , logo

$$y_I(\xi) = e^{1/2} (1 - e^{-2\xi}) \quad (\text{A.23})$$

Com essas duas aproximações, devemos fazer agora a colagem. Para isso, usaremos a aproximação uniforme, ou seja, as duas soluções precisam se encontrar no limite estabelecido pela variável intermediária. Para isso devemos somar a solução interna com a externa e, caso existam termos em comum, eles devem ser subtraídos, ou seja,  $y_u = y_I + y_o - \text{termos em comum}$ .

$$\begin{aligned}
y_u(x) &= y_o(x) + y_I\left(\frac{x}{\delta}\right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_o(\eta\Theta) \\
y_u(x) &= e^{(1/2)(1-x)} + e^{1/2} (1 - e^{-2x/\varepsilon}) - e^{1/2} \\
y_u(x) &= e^{1/2} (e^{-x/2} - e^{-2x/\varepsilon})
\end{aligned} \tag{A.24}$$

que está de acordo com a solução exata.

Segue agora um procedimento geral para tratar problemas com a teoria de perturbação singular. Porém, deve-se ter em mente que esta é uma teoria ainda em desenvolvimento, portanto, é preciso muito cuidado e atenção ao se trabalhar com ela, visto que essa teoria atende a um grande número de equações, mas não todas. Além disso, pequenas variações podem ser necessárias dependendo da situação analisada.

Sendo assim, segue o procedimento. Considere a equação

$$\varepsilon y'' + f(x, y, y') = 0 \tag{A.25}$$

com  $y(a) = A$  e  $y(b) = B$ . Supondo que (A.25) tem solução única com condição de contorno em  $x(a) = A$ .

1º) Determine a aproximação externa resolvendo

$$f(x, y_o, y'_o) = 0 \quad y_o(b) = B \tag{A.26}$$

2º) Introduza em (A.25) a variável  $\xi = \pm \frac{x-a}{\delta(\varepsilon)}$ , onde a escolha do sinal determina  $\xi > 0$  dentro do intervalo.

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} \frac{d^2 Y}{d\xi^2} + f\left(a \pm \delta\xi, Y, \pm \frac{1}{\delta} \frac{dY}{d\xi}\right) = 0 \tag{A.27}$$

Suponha que para  $\varepsilon$  pequeno e  $\xi$  fixo, a contribuição dominante em (A.27) é da forma

$$\delta^s F\left(\xi, Y, \frac{dY}{d\xi}\right) \tag{A.28}$$

para alguma função  $F$  e alguma constante  $s$ . Veja que  $F(\xi, Y, dY/d\xi)$  é independente de  $\delta$ . Equilibre o termo de segunda ordem com (A.28) escolhendo

$$\varepsilon \delta^{-2} = \delta^s \quad \text{ou} \quad \delta = \varepsilon^{\frac{1}{2+s}} \tag{A.29}$$



3º) Determine  $y_I(\xi)$  resolvendo

$$\frac{d^2 Y_I}{d\xi^2} + F\left(\xi, Y_I, \frac{dY_I}{d\xi}\right) = 0, \quad Y_I(0) = A \quad (\text{A.30})$$

4º) Introduza a variável intermediária

$$\eta = \pm \frac{x - a}{\Theta(\varepsilon)} \quad (\text{A.31})$$

onde  $\Theta$  é uma função tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Theta(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)} = \infty \quad (\text{A.32})$$

Imponha a condição de encontro

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y_o(x) |_{x=a \pm \Theta\eta}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [y_I(\xi) |_{\xi=\Theta\eta/\delta}] \quad (\text{A.33})$$

com  $\eta$  fixo.

5º) Imponha a condição de uniformidade, ou seja, a aproximação uniforme.  $y_u = y_I + y_o - \text{termos em comum}$ .

Segue uma lustração das camadas das soluções interna, externa e região intermediária

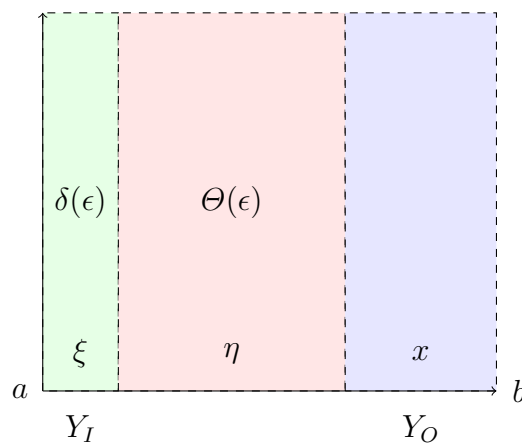


Figura 8 – Representação das camadas interna, intermediária e externa.