

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

SILAS GUIDA VILHENA

**ONDAS GRAVITACIONAIS NO MODELO DE STAROBINSKY DE
ORDEM SUPERIOR**

Poços de Caldas/MG
2020

SILAS GUIDA VILHENA

**ONDAS GRAVITACIONAIS NO MODELO DE STAROBINSKY DE
ORDEM SUPERIOR**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física das Partículas Elementares e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Coorientador: Prof. Dr. Pedro José Pompeia

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca campus Poços de Caldas

Vilhena, Silas Guida.

V711o Ondas gravitacionais no modelo de Starobinsky de ordem superior
/ Silas Guida Vilhena. – Poços de Caldas/MG, 2020.
132 f. –

Orientador(a): Rodrigo Rocha Cuzinato.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de
Alfenas, campus Poços de Caldas, 2020.

Bibliografia.

1. Física. 2. Relatividade (Física). 3. Ondas gravitacionais. I.
Cuzinato, Rodrigo Rocha. II. Título.

CDD – 530

SILAS GUIDA VILHENA

ONDAS GRAVITACIONAIS NO MODELO DE STAROBINSKY DE ORDEM SUPERIOR

A Banca examinadora abaixo-assinada aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física das Partículas Elementares e Campos.

Aprovada em: 15 de julho de 2020.

Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. César Henrique Lenzi

Instituição: Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo

Instituição: Universidade Federal de Alfenas

 Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Rocha Cuzinatto, Professor do Magistério Superior**, em 15/07/2020, às 18:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

 Documento assinado eletronicamente por **Cassius Anderson Miquele de Melo, Professor do Magistério Superior**, em 15/07/2020, às 18:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

 Documento assinado eletronicamente por **César Henrique Lenzi, Usuário Externo**, em 16/07/2020, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

 A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o Assinatura código verificador **0339345** e o código CRC **00096878**.

Dedico a todos profesores

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória e passo a nomear alguns.

À minha mãe, que foi minha professora na 1 série, ensinou o be-a-bá.

Às “donas” que fizeram parte do ensino fundamental na Escola Estadual Cesário Coimbra: Dona Lala, Dona Marlene, Dona Anaí (odiava ser chamada de dona), Dona Heloísa e Dona Izabel.

Às “donas” que também fizeram parte do ensino fundamental no Colégio Lyceu de Muzambinho: Dona Zezé, Dona Cristiane.

Aos Professores do Ensino Médio no CIC de Machado: Beno de Biologia, Adilson de Química, Kinho e Douglas de Física e Diogo de Matemática.

Ao Prof. Dr. Artur Justiniano, por ter me incentivado migrar para a Física.

Aos tutores Emídio, Eunice, Janine Neves, Cristina de Macedo, Érika Carvalho e ao Prof. Sabino que me ajudaram na finalização da minha graduação.

Ao Prof. Dr. Marcelo Vivas, pelas brincadeiras que serão lembradas.

Ao Prof. Dr. Gustavo e ao Prof. Dr. Alencar, pelos ensinamentos dentro e fora de sala de aula.

Ao Prof. Fernando Gardim que me incentivou a entrar no Mestrado, e quem me apresentou ao Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinato.

Ao Prof. César Lenzi, pela sua gentileza, dicas, e também, pelas suas correções que enriqueceram este trabalho.

Ao Prof. Dr. Cássius, pelos incentivos e pelas “pérolas” contadas, e por sua contribuição essencial ao final deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Pedro, pela sua disponibilidade e coorientação que contribuiu na construção e amadurecimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Léo, parte fundamental deste trabalho, sem a sua participação, este trabalho seria bem menos interessante e profundo.

Ao Prof. Dr. Rodrigo, orientador e amigo, suas aulas serão sempre lembradas com carinho devido à sua dedicação à docência, não só por mim, mas por todos os colegas de mestrado. Além de exemplar professor e grande pesquisador, um grande ser humano. Suas preocupações e sua educação para com as pessoas é um divisor de águas nas vidas das pessoas, um modelo que seguirei pela vida. Não bastasse tais qualidades, ainda possui um excelente gosto musical.

Por último, agradeço ao principal professor da minha vida: meu pai, Prof. Paulo Vilhena da Silva. Todos os professores que mencionei contribuíram na minha trajetória, mas nenhum teve

a importância de meu pai, suas conversas em vida me ensinaram o amor à sabedoria, sempre citando Bias de Priene “*omnia mea mecum porto*”. Ele estará sempre em meus pensamentos.

Agradeço aos meus irmãos: Thales, Hermes, Balmes, Ísis, Paulo Emílio, Leonardo, Perses e Mauro Sérgio.

Agradeço às minhas cunhadas: Denise, Meire, Vera, Talitha e Emmyline.

Agradeço aos meus avós: Bráz Antônio da Silva, Maria Nazareth de Vilhena e Silva, Geralda dos Santos Guida e Rafael Guida Filho.

Agradeço aos meus tios e tias, em especial: Tia Gal e Bob.

Agradeço aos primos e primas, em especial aos parceiros de shows: “Filipinho da Muleta”, Raphael “Barril”, Giovaninho “Barril” e Matheus “Benjamin”.

Agradeço aos meus sobrinhos e às minhas sobrinhas, em especial: Tamara, Amanda e Mariah que me apoiaram incondicionalmente.

Agradeço à Kênia, pela paciência de responder todas as dúvidas com prontidão, ainda pagarei as inúmeras cervejas prometidas.

Agradeço à Thaís, pela paciência, e pelo apoio final.

Agradeço a todos os amigos, em especial os amigos feitos no mestrado: Claytão, Carlos “Chupeta”, Marcos Vinícius, Walisson “MMC”, Cado “Aquaman”, Yuri “Gagarin”, Juan Carlos e Bruna; também ao Marcelo “Brendan Fraser” Gualberto por ter me recepcionado em seu apartamento durante um tempo.

Agradeço aos funcionários da UNIFAL-MG, Campus de Poços de Caldas.

Agradeço ao PPGF e UNIFAL-MG pelo suporte institucional.

Agradeço aos membros do Colegiado Local da UNIFAL-MG. Tive a honra de ser membro por um breve período.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Este trabalho tem como proposta o estudo das ondas gravitacionais no modelo de Starobinsky de ordem superior. A partir da integral de ação de Starobinsky de ordem superior é possível deduzir as equações de campo para este modelo. Através da aproximação de campo fraco, constróem-se as equações linearizadas, que são de sexta ordem. Campos escalares são introduzidos com a proposta de redução da ordem das equações diferenciais, resultando em três equações com derivadas de segunda ordem. Uma equação tensorial que possui solução conhecida; e outras duas equações dependentes dos campos escalares, que são resolvidas com função de Green. A solução destas equações nos leva à caracterização das ondas gravitacionais em nosso modelo de gravidade modificada.

Palavras-chave: Ondas Gravitacionais. Gravitação de ordem superior.

ABSTRACT

This work proposes the study of gravitational waves in the higher order Starobinsky model. Starting from higher order Starobinsky action, it is possible to deduce the field equations for this gravitational theory. Through the weak field approximation, linearized equations of sixth order derivatives are constructed. Scalar fields are introduced with the proposal to reduce the order of the differential equations and lead us to three second-order differential equations. One tensor equation with known solution; two equations with dependency of scalar fields, which are solved by Green function. The solution of these equations lead us to the characterization of gravitational waves in our modified gravity model.

Keywords: Gravitational Waves. Higher order gravity

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	SÍNTESE DA RELATIVIDADE GERAL.....	14
2.1	PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA.....	14
2.2	TENSORES E MÉTRICA.....	15
2.3	EQUAÇÃO DA GEODÉSICA.....	23
2.4	TENSOR DE CURVATURA, TENSOR DE RICCI E O ESCALAR DE CURVATURA.....	24
2.5	TENSOR ENERGIA-MOMENTO.....	27
2.6	CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN.....	28
2.6.1	Limite de Campo Fraco.....	29
2.6.2	Equações de Campo Via Integral de Ação.....	32
3	ONDAS GRAVITACIONAIS NA RELATIVIDADE GERAL	36
3.1	APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO.....	37
3.2	ONDAS GRAVITACIONAIS PLANAS.....	40
3.2.1	Fixação de Gauge Residual.....	43
3.2.2	Polarização da Onda Gravitacional.....	45
3.3	GERAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS.....	48
3.4	ENERGIA EMITIDA VIA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL.....	51
3.4.1	Energia Irradiada por Binárias.....	56
4	ONDAS GRAVITACIONAIS NO MODELO DE STAROBINSKY DE ORDEM SUPERIOR.....	60
4.1	EQUAÇÕES DE CAMPO DE STAROBINSKY DE ORDEM SUPERIOR.....	61
4.2	APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO.....	65
4.3	DECOMPOSIÇÃO ESCALAR-TENSORIAL DO CAMPO LINEARIZADO.....	67
4.4	SOLUÇÃO PARA O MODO ESCALAR Φ_{-}	75
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	84
	REFERÊNCIAS.....	86
	APÊNDICES	91

Notações e Convenções

As notações utilizadas neste trabalho são:

Assinatura da métrica:

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) .$$

Tensor de Riemann:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} .$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} .$$

Escalar de Curvatura:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} .$$

Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R .$$

D'Alembertiano:

$$\square \equiv \nabla_{\mu}\nabla^{\mu} = g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\nabla_{\mu} ,$$

exceto onde for explicitado.

Índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos variam de 1 a 3.

A constante χ aparece neste trabalho e é definida como:

$$\chi \equiv \frac{8\pi G}{c^4} .$$

Definição de notação de derivada:

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} .$$

1 INTRODUÇÃO

Em 1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* é publicado pelo Sir Isaac Newton (NEWTON, 1871), e com essa publicação nasce o primeiro entendimento científico da gravitação. Newton propôs que a gravidade poderia ser compreendida como uma força entre corpos. Essa força, sempre atrativa, é proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separam os corpos. Porém, Newton não explicou a natureza da gravitação. Essa compreensão só foi desenvolvida com a publicação dos trabalhos de Relatividade Geral de Einstein (EINSTEIN, 1916). A partir de 1916, passamos a entender a gravidade como um efeito da curvatura do espaço-tempo¹ que, por sua vez, ocorre como consequência da presença da massa na região. Desta forma, podemos considerar a gravitação como um fenômeno geométrico.

Uma analogia interessante da teoria é imaginar a geometria de um tecido, ou seja, uma projeção bidimensional do espaço-tempo. Suponhamos que este tecido seja elástico e esteja esticado; então, é colocada sobre ele uma massa, digamos, uma bola de boliche. A consequência será uma deformação deste tecido. O entorno da bola de boliche passa a apresentar uma curvatura, uma depressão. Esta deformação passará a ser entendida como a gravidade no âmbito do espaço-tempo.

Uma outra analogia: podemos imaginar um lago perfeitamente estático, cuja superfície passa a sofrer uma deformação causada pela queda de uma pedra. A perturbação acontece na forma de ondas concêntricas ao ponto de colisão com o lago. Essa analogia ondulatória poderia ser aplicada ao espaço-tempo? As equações de Einstein afirmam com razoabilidade que sim. As ondas propagadas no espaço-tempo são chamadas de ondas gravitacionais, nas quais este trabalho é focado.

A observação indireta das ondas gravitacionais (OGs) veio com o trabalho de Hulse e Taylor sobre o estudo do sistema binário PSR B1913+16 (HULSE; TAYLOR, 1975). O sistema binário, em questão, é formado por um pulsar e uma outra estrela de nêutrons que circulam com respeito ao centro de massa. Os parâmetros orbitais de PSR B1913+16 podem ser entendidos como uma evidência da emissão das ondas gravitacionais, pois o decaimento orbital do sistema entra em concordância com a perda energética pelas OGs emitidas (WEISBERG; TAYLOR, 2005). Joseph Taylor e Russell Hulse dividiram o prêmio Nobel em 1993 pela “descoberta de um novo tipo de pulsar que abriu novas possibilidades para o estudo da gravitação”.

A detecção direta das OGs só veio em 2015, após 25 anos da autorização para a construção

¹O termo espaço-tempo é entendido como a combinação das três coordenadas espaciais com a coordenada temporal.

do Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO). O LIGO foi construído para detectar variações espaciais causadas pela passagem de uma onda gravitacional: a razão entre deformação no interferômetro e o comprimento do percurso do feixe de laser no interferômetro, chamado strain, é da ordem de 10^{-23} , o que contrasta com o tamanho do braço do interferômetro medindo 4 km de comprimento. As dificuldades tecnológicas associadas fizeram com que a detecção das ondas gravitacionais fosse realizada somente em tempos recentes quando da coalescência de dois buracos negros (ABBOTT et al., 2016).

A teoria da Relatividade Geral (RG) tem se mostrado capaz de explicar, com grande êxito, todos os eventos astrofísicos recentes. Porém, a cosmologia (RYDEN, 2003) dá-nos indícios de que a RG não é a teoria definitiva da gravitação. A falta de sucesso na quantização da teoria da RG corrobora com o argumento de que ela não é uma teoria completa (UTIYAMA; DEWITT, 1962; STELLE, 1977; HOOFT; VELTMAN, 1974; WOODARD, 2015).

A RG foi a teoria que nos trouxe o entendimento quantitativo de fenômenos como o desvio do periélio de Mercúrio; que previu de forma assertiva a deflexão dos raios de luz (LENZI; POMPEIA; STUDART, 2019); e, ainda, que indicou existência de ondas gravitacionais e buracos negros. Contudo, trata-se de uma teoria que apresenta problemas ao explicar o universo primordial (KOLB; TURNER, 1994) e também o universo recente (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010). A gravitação é essencialmente atrativa, tanto na teoria newtoniana como na RG; sendo assim, como explicar a expansão acelerada observada no universo atual? Duas hipóteses surgem como tentativa de explicar essa questão: ou existe uma substância cuja natureza não conhecemos, chamada energia escura; ou, então, a interação gravitacional ainda não é plenamente explicada pela RG.

Neste trabalho não entraremos no campo da cosmologia, mas iremos admitir que as interações gravitacionais não são descritas de forma definitiva pela RG. Isso leva à necessidade de uma teoria de gravitação mais geral do que a proposta por Albert Einstein. Nesse sentido, utilizaremos um modelo de ordem superior abordado em estudos recentes (CUZINATTO et al., 2011; 2015), chamado de gravitação de Starobinsky de ordem superior. Construiremos as equações de campo de Starobinsky de ordem superior a partir da ação:

$$S = \frac{1}{c} \frac{1}{2\chi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right), \quad (1)$$

onde, c é a velocidade da luz; χ é a constante gravitacional de Einstein; $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$; κ_0 e β_0 são constantes de acoplamento para os termos de Starobinsky e para o termo de ordem superior, respectivamente. O termo R^2 é referente à contribuição dada por Starobinsky ao estudo da inflação cósmica, descrevendo alguns dos efeitos gravitacionais quânticos no universo primordial (STAROBINSKY, 1980). O termo

$\nabla_\mu R \nabla^\mu R$ é inspirado na contribuição de Podolsky para a eletrodinâmica generalizada; sendo este, o nosso termo de ordem superior.²

A construção das equações de campo de Starobinsky de ordem superior (ou de Starobinsky-Podolsky) deriva da Eq. (1), e segue os passos da dissertação de Neto (SILVA NETO, 2018). Os resultados são apresentados na Seção 4.1 e derivados com detalhes no Apêndice D. Na Seção 4.2 procedemos com a construção da teoria linearizada de Starobinsky de ordem superior a partir das equações de campo. Então, na Seção 4.3, iniciamos a construção das soluções de ondas gravitacionais para este modelo.

O corpo desta dissertação é compreendida em três partes: síntese da Relatividade Geral (Seção 2), estudo das ondas gravitacionais na Relatividade Geral (Seção 3), e o estudo das ondas gravitacionais no modelo de Starobinsky de ordem superior (Seção 4).

²A denominação de ordem superior é devida ao fato de $\nabla_\mu R \nabla^\mu R$ envolver derivadas de terceira ordem da métrica.

2 SÍNTESE DA RELATIVIDADE GERAL

Einstein propôs generalizar o seu trabalho da Relatividade Especial, no qual se estudava o movimento não acelerado, ou seja, o movimento de um corpo livre de forças externas (WALD, 1984). Em 1916, Einstein tornou público o seu trabalho que foi definitivamente aceito a partir de 1919 com a confirmação da previsão da deflexão da luz em um campo gravitacional.

O desvio dos raios de luz num campo gravitacional também é previsto no regime da gravitação newtoniana, assunto que foi investigado desde o séc XVII. O primeiro estudo publicado sobre o desvio da luz no entorno do Sol foi feito por Johann von Soldner, em 1801, porém, Cavendish havia pesquisado — mas não publicado — a deflexão da luz em tempos anteriores e chegou ao resultado que ficou conhecido como o valor newtoniano, o qual é a metade da angulação predita pela RG. Já John Michell extremizou esses conceitos. Ele propôs, em seus estudos, que uma estrela demaziadamente massiva poderia ter uma velocidade de escape superior à da própria luz. Por consequência, a luz retornaria à estrela devido a sua atração gravitacional, ou seja, este seria o primeiro conceito de um buraco negro. Esses estudos surgiram para responder a questão feita por Newton em seu livro *Óptica* sobre a possibilidade do desvio da luz sob efeito gravitacional. (LENZI; POMPEIA; STUDART, 2019). Em função disso, foi proposto o experimento de fotografar o eclipse solar e verificar se as posições das estrelas estavam em seus lugares esperados, de acordo com o entendimento da época, ou se a luz desviava ao passar perto do Sol (RYDER, 2009). Se o desvio ocorresse, as estrelas seriam visíveis, caso contrário elas estariam ocultadas pelo Sol. Duas expedições comprovaram o desvio da luz. Uma delas, no Brasil, em Sobral-CE, sendo chefiada por Andrew Crommelin, e a outra em Ilha do Príncipe na África, chefiada por Arthur Eddington (EDDINGTON et al., 1920; SCHUTZ, 2009; CRISPINO, 2019; CRISPINO; LIMA, 2017). Além do desvio dos raios de luz, também o desvio das linhas espectrais e ainda, o famoso desvio do periélio do Mercúrio figuram como os três testes clássicos — e bem sucedidos — da teoria de Einstein (CARROLL, 2014).

2.1 PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA

A Relatividade Geral, como já afirmado, nasce para generalizar a Relatividade Especial visto que esta não lida com referenciais não-inerciais. Localmente, a aceleração de um referencial não-inercial pode ser entendida como um campo gravitacional. Este é o Princípio de Equivalência, ou o princípio da indistinguibilidade: é impossível, por meio de qualquer experimento da mecânica, distinguir entre um campo gravitacional e um sistema referencial acelerado (RYDER, 2009).

Porém, a afirmação de que um referencial acelerado não possui distinção de um campo

gravitacional só pode ser verdade se a massa gravitacional, m_g , for igual a massa inercial, m_i . A massa inercial é a constante que proporciona a igualdade entre aceleração e força,

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \quad (2)$$

ou em outras palavras, indica a resistência de um corpo à aceleração. Por sua vez, a massa gravitacional é a que mensura a interação entre uma partícula e um campo gravitacional aproximadamente constante, como aquele próximo à superfície da Terra,

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}. \quad (3)$$

Supondo que uma partícula está sujeita apenas à força gravitacional, podemos igualar as Eqs. (2) e (3), obtendo

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \mathbf{g}.$$

Assim, para que a aceleração \mathbf{a} reproduza \mathbf{g} , o termo em parênteses deve ser igual a um. Logo,

$$m_g = m_i. \quad (4)$$

Com essa relação, a afirmação de que a aceleração gravitacional pode ser localmente identificada como uma aceleração ordinária procede. O experimento de Eötvös mediu que a igualdade entre as massas inercial e gravitacional é respeitada com uma precisão de uma parte em 10^{12} (DE SABBATA; GASPERINI, 1985; ACEVEDO; MORAIS; PIMENTEL, 2019).

O Princípio de Equivalência requer, em última instância, que as leis físicas sejam escritas em termos de objetos matemáticos que sejam independentes do referencial particular escolhido na descrição do fenômeno sob estudo. Esses objetos são os tensores.

2.2 TENSORES E MÉTRICA

Para construir equações físicas que são invariantes sob transformações gerais de coordenadas, precisamos saber como as quantidades que aparecem nessas equações se comportam sob estas transformações (WEINBERG, 1982). O caso mais simples dessa invariância é o dos escalares. Um exemplo dessa classe é o elemento de linha. O elemento de linha é importante para a RG porque ele é entendido como o quadrado de um comprimento infinitesimal no espaço-tempo. Sua expressão,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5)$$

envolve a métrica $g_{\mu\nu}$ – um tensor de rank dois; dx^μ e dx^ν são os diferenciais das coordenadas, e é válido a convenção de soma de Einstein: índices repetidos são somados sempre que um aparecer na posição inferior e o outro, na posição superior. .

Iniciemos com um quadrivetor arbitrário \mathbf{X} que pode ser escrito como:

$$\mathbf{X} = x^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (6)$$

onde x^μ são as componentes de \mathbf{X} na base versorial \mathbf{e}_μ . O produto escalar de dois quadrivetores \mathbf{X} é dado por:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = (x^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (x^\nu \mathbf{e}_\nu) = x^\mu x^\nu (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu).$$

Por outro lado, definimos

$$X^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

Comparando as duas últimas equações, temos que:

$$\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = g_{\mu\nu}, \quad (7)$$

assim, a métrica é, matematicamente, o produto escalar entre dois elementos da base. A métrica tem uma importância física fundamental, pois é ela que desempenha o papel do potencial gravitacional na RG. Da relação (7) e da Eq. (6), podemos escrever ainda que

$$x_\mu = \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_\mu = x^\nu (\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu) = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (8)$$

Da relação (8) vemos que a métrica tem a propriedade de abaixar índices. Na transformação da Eq. (8) temos componentes do vetor \mathbf{X} com índice em cima, x^ν , componentes do mesmo vetor com índices embaixo, x_μ , além da métrica, $g_{\mu\nu}$. As componentes com índice em cima estão associadas a tensores contravariantes, e as componentes com índice embaixo estão associadas a tensores covariantes. Sendo assim, é necessário compreender o que é um tensor covariante e um tensor contravariante. Começemos da regra de diferenciação para as coordenadas $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (9)$$

Da Eq. (9) temos a definição de um vetor contravariante como o objeto que se transforma como dx'^μ :

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}. \quad (10)$$

Para definirmos um vetor covariante, comecemos com uma função escalar $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$. A derivada dessa função em relação a uma das quatro coordenadas pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} \varphi.$$

Pela regra da cadeia, temos ainda:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}}.$$

Podemos definir um vetor covariante como o objeto que se transforma como $\frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\mu}}$:

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu}. \quad (11)$$

Com as transformações expressas nas Eqs. (10) e (11) podemos construir outros objetos mais gerais. Um exemplo dessa construção é um tensor contravariante de ordem dois (ou rank dois) que, sob a mudança de coordenadas $x \rightarrow x'$, transforma-se como a justaposição de dois vetores covariantes, ou seja, como:

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\rho\sigma}. \quad (12)$$

Faz-se necessário observar que um tensor contravariante de ordem dois possui índices em cima, já um tensor covariante possui índices embaixo, com os elementos de transformação seguindo a estrutura da Eq. (11):

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} A_{\rho\sigma}. \quad (13)$$

Um tensor misto de ordem dois combina as características de (12) e (13), i.e.

$$A'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} A^{\rho}_{\sigma}. \quad (14)$$

A forma mais geral da transformação de um tensor de ordem qualquer é dada pela generalização da Eq. (14), onde temos uma combinação da lei de transformação de tensores contravariantes com a de tensores covariantes.³

³A métrica é um tensor de rank dois. Os vetores são chamados de tensores de rank um e escalares, tensores de rank zero.

$$A'^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\kappa} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \cdots \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \cdots \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\kappa}} A^{\sigma\dots\rho}_{\alpha\dots\delta}, \quad (15)$$

com m índices covariantes, de λ a κ ; e n índices contravariantes, de μ a ν . Algumas propriedades algébricas dos tensores são:

1. Combinação linear

$$C'^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\kappa} = aA'^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\kappa} + bB'^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\kappa}.$$

2. Produto (ou combinação por justaposição):⁴

$$C'^{\mu\dots\nu}_{\lambda\dots\kappa} = A'^{\mu\dots\nu} B_{\lambda\dots\kappa}.$$

3. Contração

$$C_{\nu} = C'_{\nu\mu}{}^{\mu}.$$

4. Abaixar e subir índices usando a métrica $g_{\mu\nu}$ e a métrica inversa $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} C'^{\mu} &= C_{\nu}, \\ g^{\mu\nu} C_{\mu} &= C'^{\nu}. \end{aligned}$$

Isso é uma generalização do que ocorre em (8) e depende da propriedade de reciprocidade da métrica, qual seja:

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}.$$

O termo δ_{μ}^{ρ} é o símbolo de Kronecker: vale zero se $\mu \neq \rho$ e vale um se $\mu = \rho$.

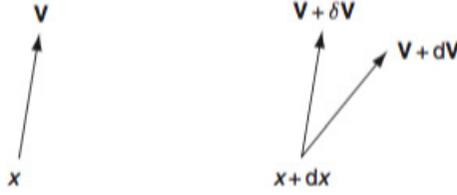
5. Se um tensor é nulo em um ponto, ele será nulo em todos os pontos. Isso decorre da Eq. (15)

Da Eq. (10), observa-se que um vetor A'^{μ} pode ser escrito em função de A^{ν} ; o contrário também é verdade. Aplicando uma lei de transformação inversa obtém-se A^{ν} em função de A'^{μ} . Para tanto, é necessário obter uma matriz identidade no lado direito da Eq. (10), o que ocorre quando obtemos um *delta* do lado direito. Temos:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}} = \delta_{\nu}^{\xi}.$$

Então, multiplicando a Eq. (10) pelo fator $\frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\mu}}$ ficamos com:

⁴Um caso particular é: o produto de dois tensores de rank um (vetores) gera um tensor de rank dois.



Two vector fields are defined at the point $x + dx$; $\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}$ is parallel to \mathbf{V} .

Figura 1: Vetor calculado no ponto $x + dx$ e vetor que sofreu *transporte paralelo* (RYDER, 2009).

$$\frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu} A'^\mu = A^\xi. \quad (16)$$

Tomando a diferenciação da Eq. (16), temos:⁵

$$dA^\xi = d\left(\frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu} A'^\mu\right) = d\left(\frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu}\right) A'^\mu + \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu} dA'^\mu,$$

portanto:

$$dA^\xi = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu}\right) dx'^\nu A'^\mu + \left(\frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu}\right) dA'^\mu. \quad (17)$$

Observe o primeiro termo do lado direito dessa equação. Como, em geral,

$$\frac{\partial^2 x^\xi}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \neq 0, \quad (18)$$

percebemos que o diferencial de um vetor contravariante não se transforma como um vetor contravariante – compare com a Eq. (10).

Para construirmos uma derivada que se transforme como um tensor genuíno, devemos, primeiramente, tomar a diferença entre dois vetores no mesmo ponto. Tomemos o vetor \mathbf{V} , este é calculado no ponto x . A seguir, consideremos o ponto vizinho $x + dx$, e os seguintes dois vetores: um, $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$ e o outro, $\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}$ — vide Fig.1. O primeiro é o vetor \mathbf{V} calculado no ponto $x + dx$ e o segundo é o vetor \mathbf{V} que sofreu um transporte paralelo até o ponto $x + dx$ (RYDER, 2009), o transporte paralelo mantém constante a angulação do vetor com respeito à tangente superfície ponto-a-ponto. A diferença entre eles é dada por:

$$DV^\mu = (V^\mu + dV^\mu) - (V^\mu + \delta V^\mu) = dV^\mu - \delta V^\mu. \quad (19)$$

⁵A diferenciação só faz sentido se x puder ser expresso como função de x' , ou seja, se $x = x(x')$ tal que existe $\frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\mu}$.

Para que DV^μ seja um vetor contravariante, essa quantidade deve seguir a lei transformação da Eq. (16):

$$DV^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} (DV^\nu)' . \quad (20)$$

Para isso, o termo δV^ν deve anular o termo extra em (17). Inspirados pela forma deste termo propomos o ansatz:

$$\delta V^\nu = -\Gamma_{\sigma\rho}^\nu V^\sigma dx^\rho . \quad (21)$$

Calcularemos os símbolos de Christoffel⁶, $\Gamma_{\sigma\rho}^\nu$, para que a Eq. (20) seja satisfeita. Essa tarefa passa, como veremos abaixo, por analisar a lei de transformação de $\Gamma_{\sigma\rho}^\nu$ e averiguar se esse objeto é um tensor. Substituindo (21) em (19):

$$DV^\nu = dV^\nu + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu V^\sigma dx^\rho . \quad (22)$$

Ao substituir a relação (22) em (20), ficamos com:

$$dV^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu V^\sigma dx^\rho = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} (dV'^\nu + \Gamma_{\sigma\rho}'{}^\nu V'^\sigma dx'^\rho) ,$$

e aplicando, na sequência, a Eq. (17) torna-se:

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\sigma \partial x'^\mu} dx'^\sigma V'^\mu + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dV'^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu V^\sigma dx^\rho = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dV'^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\sigma\rho}'{}^\nu V'^\sigma dx'^\rho ,$$

teremos, após manipulações algébricas, que a transformação dos símbolos de Christoffel é dada por:

$$\Gamma_{\sigma\lambda}'{}^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\lambda \partial x'^\sigma} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\xi}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\rho\xi}^\mu . \quad (23)$$

A Eq. (23) é chamada de lei de transformação dos símbolos de Christoffel. Ela nos diz que os símbolos de Christoffel não é um tensor, pois a sua transformação não é regida estruturalmente pela Eq. (15).

Com a Eq. (23), a lei de transformação de DV^μ , dada pela Eq. (20) satisfaz a Eq. (10). De fato, usando as regras de transformação inversa no lado direito de

⁶Existem alguns tipos de conexão na geometria. Conexões são objetos que permitem o transporte de vetores (dentre outros objetos) ao longo de uma curva na variedade. Para a geometria riemanniana, onde a está inserida a RG, a conexão usada é os símbolos de Christoffel. Em momentos do nosso texto, usaremos a palavra conexão designando os símbolos de Christoffel, o que é licito porque trabalhamos sempre com a variedade riemanniana, mesmo no modelo de Starobinsky de ordem superior. Porém, em geral, conexão e símbolos de Christoffel não são sinônimos.

$$DV^\mu = dV^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu V^\sigma dx^\rho ,$$

temos:

$$\begin{aligned} DV^\mu &= \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) dx'^\nu V'^\alpha + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) dV'^\alpha + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\kappa} V'^\kappa \right) \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} dx'^\lambda \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \right) dx'^\nu V'^\alpha + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) dV'^\alpha + \left[\Gamma_{\sigma\rho}^\mu \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \right) \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \right) \right] V'^\alpha dx'^\lambda . \end{aligned}$$

Renomeando índices e empregando (23), temos:

$$DV^\mu = \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\lambda \partial x'^\alpha} \right) dx'^\lambda V'^\alpha + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \right) dV'^\alpha + \left[\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} V'^\alpha dx'^\lambda - \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\lambda \partial x'^\alpha} V'^\alpha dx'^\lambda \right] .$$

O primeiro e o último termo se cancelam. Logo,

$$DV^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) [dV'^\nu + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\nu} V'^\alpha dx'^\lambda] .$$

Reconhecemos o termo em colchetes como $(DV^\nu)'$. Assim:

$$DV^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) (DV^\nu)' ,$$

que está em conformidade com a Eq. (20).

Passamos agora para a definição de uma derivada covariante. Podemos reescrever a Eq. (22) como:

$$DV^\nu = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} dx^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu V^\sigma dx^\rho ,$$

ou

$$DV^\nu = \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu V^\sigma \right) dx^\rho .$$

Definimos como derivada covariante de um vetor V^ν como o argumento nos parênteses na equação acima, i.e.

$$\nabla_\rho V^\nu = \frac{DV^\nu}{dx^\rho} = \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu V^\sigma . \quad (24)$$

A derivada covariante de um vetor se comporta como um tensor. Sua lei de transformação é, portanto, dada por:

$$\nabla_{\rho} V^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\rho}} (\nabla_{\sigma} V^{\kappa})' .$$

Por analogia à Eq. (24), podemos generalizar a derivação covariante para tensores de ranks maiores. Por exemplo, tomemos um tensor de rank dois misto, V_{μ}^{ν} ; a sua derivada covariante é:

$$\nabla_{\sigma} V_{\mu}^{\nu} = \partial_{\sigma} V_{\mu}^{\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} V_{\rho}^{\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\nu} V_{\mu}^{\rho} . \quad (25)$$

Um caso interessante da derivada covariante é aquele em que o tensor é covariantemente conservado, ou seja, aquele no qual a sua derivada covariante é nula. Isso acontece para a métrica:

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0 . \quad (26)$$

A Eq. (26) é chamada de postulado de metricidade da Relatividade Geral.

Agora, vamos escrever (26) explicitamente usando a Eq. (25):

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} g_{\mu\sigma} = 0 . \quad (27)$$

Tomando as permutações cíclicas dos índices não-contraindidos, teremos:

$$\begin{cases} \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} g_{\mu\sigma} = 0 , \\ \nabla_{\nu} g_{\rho\mu} = \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} g_{\rho\sigma} = 0 , \\ \nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\nu\sigma} = 0 . \end{cases} \quad (28)$$

Multiplicando a primeira equação por (1/2) e as outras por (-1/2) e somando:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} g_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) ,$$

onde usamos o fato de que os símbolos de Christoffel e a métrica são simétricos nos índices inferiores: $\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ e $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Aplicando a métrica contravariante, que também é simétrica, em ambos lados da equação acima, teremos finalmente:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) . \quad (29)$$

A Eq. (29) é chamada de símbolos de Christoffel. Ela pode ser representada também por $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \{\lambda_{\nu\mu}\}$ e desempenha um papel crucial na equação da geodésica (ADLER, et al., 1975).

2.3 EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

O conceito de que a menor distância entre dois pontos é dada por uma reta é válido quando se está no espaço euclidiano, ou seja, na geometria plana. Porém, a Relatividade Geral é estabelecida na geometria riemanniana, de modo que o conceito da reta não permanece como a distância mais curta entre dois pontos e, portanto, introduz-se o conceito da geodésica.

A equação da geodésica é uma consequência da seguinte variação (DE SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$\delta \int ds = 0, \quad (30)$$

onde ds é a raiz quadrada do elemento de linha, ou seja, $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$.

Suponhamos que uma partícula esteja sujeita a um campo gravitacional. A trajetória da partícula é caracterizada pela equação de movimento resultante do princípio variacional da Eq. (30). A equação da geodésica é a trajetória de mínima ação entre dois eventos no espaço-tempo. Da Eq. (30), recorre diretamente que seja satisfeita a equação de Euler-Lagrange (DE SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\partial (\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu})}{\partial \dot{x}^\rho} \right] - \frac{\partial (\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu})}{\partial x^\rho} = 0, \quad (31)$$

onde definimos:

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (32)$$

É mais conveniente, do ponto de vista computacional, usar $(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)$ em vez de $(\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu})$ na Eq. (31). A construção e explicação dessa permutação de termos pode ser conferida em (DE SABBATA; GASPERINI, 1985). Assim a resolução da Eq. (31) é equivalente à:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\partial (g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)}{\partial \dot{x}^\rho} \right] - \frac{\partial (g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)}{\partial x^\rho} = 0. \quad (33)$$

Abrindo as derivadas na Eq. (33), temos:

$$2 \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dg_{\rho\mu}}{dx^\nu} \dot{x}^\mu + 2g_{\rho\mu}\ddot{x}^\mu - (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,$$

ou

$$g_{\rho\mu}\ddot{x}^\mu + \partial_\nu g_{\rho\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{1}{2} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (34)$$

Observamos que:

$$\partial_\nu g_{\rho\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\rho\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu . \quad (35)$$

Substituindo a Eq. (35) em (34) e reagrupando os termos convenientemente, obtém-se:

$$g_{\rho\mu} \ddot{x}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 . \quad (36)$$

Ao aplicar $g^{\lambda\rho}$ na Eq. (36), chega-se à equação da geodésica:

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 , \quad (37)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são os símbolos de Christoffel definidos como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) . \quad (38)$$

Se estivéssemos no espaço euclidiano, a Eq. (37) se reduziria para

$$\ddot{x}^\lambda = 0 ,$$

pois, nesse caso, $\partial_\mu g_{\rho\nu} = \partial_\mu \eta_{\rho\nu} = 0$ (ao usarmos coordenadas cartesianas). Em outras palavras, a geodésica se reduz para uma equação de reta. Assim, a equação da geodésica pode ser entendida como uma generalização da noção de uma “linha reta”.

2.4 TENSOR DE CURVATURA, TENSOR DE RICCI E O ESCALAR DE CURVATURA

A curvatura é de suma importância na Relatividade Geral, pois o campo gravitacional é descrito pela curvatura do espaço-tempo. O elemento de linha, que mede a distância quadrática infinitesimal, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, é dependente do tensor métrico $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$, o qual passa a ser compreendido na RG como sinônimo de campo gravitacional. O tensor necessário para a construção das equações de Einstein é dependente do tensor $g_{\mu\nu}$. Este tensor, que recebe o nome de tensor de curvatura, ou ainda, de tensor de Riemann é um objeto de quatro índices, $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$.

Um modo para a construção do tensor de Riemann é efetuar o comutador de duas derivadas covariantes,

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu A^\nu = [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu . \quad (39)$$

Definimos a derivada covariante ∇_α nas Eqs. (24) e (25). De fato, calculando o comutador,

temos:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\mu = \nabla_\alpha (\nabla_\beta A^\mu) - \nabla_\beta (\nabla_\alpha A^\mu), \quad (40)$$

onde,

$$\nabla_\alpha (\nabla_\beta A^\mu) = \partial_\alpha (\partial_\beta A^\mu + \Gamma_{\beta\nu}^\mu A^\nu) + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu (\partial_\beta A^\rho + \Gamma_{\beta\nu}^\rho A^\nu) - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho (\partial_\rho A^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\nu). \quad (41)$$

Fazendo as devidas substituições é obtido,

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu A^\nu = [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = (\partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\rho) A^\nu.$$

O termo que se encontra dentro dos parênteses da equação acima é chamado de tensor de Riemann, ou tensor de curvatura:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\beta\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\rho. \quad (42)$$

Se o tensor de Riemann, que descreve a curvatura, for tomado no espaço-tempo de Minkowski, o seu valor será zero, pois os símbolos de Christoffel, que está presente na definição do tensor, depende das derivadas do tensor métrico. No espaço-tempo plano, o tensor métrico é substituído pelo tensor de Minkowski, ou seja, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ em coordenadas cartesianas.⁷ Logo, as derivadas do tensor métrico são nulas para as coordenadas cartesianas, $\partial_\alpha \eta_{\mu\nu} = 0$, implicando em símbolos de Christoffel nulos. Assim, no espaço-tempo de Minkowski, $R_{\nu\alpha\beta}^\mu = 0$. Enfatiza-se que no espaço-tempo curvo não é possível eliminar o tensor de curvatura, pois mesmo que localmente haja símbolos de Christoffel nulos, as suas derivadas não o serão (DE SABBATA; GASPERINI, 1985). Porém, quando o tensor é nulo em um ponto, ele é nulo em todo o espaço.

Como tensor, $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ pode ter qualquer índice abaixado e levantado pela métrica, podemos escrever $R_{\nu\alpha\beta}^\mu = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\nu\alpha\beta}$. Com essa forma, depreendem-se algumas propriedades interessantes:

1. $R_{\lambda\nu\alpha\beta}$ é antissimétrico no primeiro par de índices

$$R_{\lambda\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\lambda\alpha\beta}.$$

⁷Mesmo no espaço-tempo plano, é possível escolher um sistema de coordenadas que leve aos símbolos de Christoffel não nulos. Esse é o caso, por exemplo, quando se adotam coordenadas esféricas no espaço-tempo plano. Todavia, ao calcularmos $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ usando (42) obteremos zero como resultado. Conclusão: um espaço-tempo plano sempre terá curvatura nula independentemente do sistema de coordenadas escolhido, por mais exótico que este seja. Por essa razão, na maioria das vezes, é mais fácil adotar as coordenadas cartesianas na circunstância em que trabalhamos com o espaço-tempo plano.

2. $R_{\lambda\nu\alpha\beta}$ é antissimétrico no último par de índices

$$R_{\lambda\nu\alpha\beta} = -R_{\lambda\nu\beta\alpha}.$$

3. $R_{\lambda\nu\alpha\beta}$ é invariante sob a permutação do primeiro par com o último par de índices

$$R_{\lambda\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\lambda\nu}.$$

4. A soma da permutação cíclica dos últimos três índices de $R_{\lambda\nu\alpha\beta}$ é nula⁸

$$R_{\lambda\nu\alpha\beta} + R_{\lambda\beta\nu\alpha} + R_{\lambda\alpha\beta\nu} = 0.$$

5. É válida a identidade de Bianchi

$$\nabla_\rho R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\rho\alpha\beta} = 0,$$

onde há uma permutação cíclica entre o índice da derivada covariante e os dois primeiros índices do tensor $R_{\lambda\nu\alpha\beta}$.

Duas contrações úteis que originam-se do tensor de curvatura são: tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Define-se o tensor de Ricci como a contração do primeiro índice com o terceiro índice, assim obtém-se um tensor simétrico de ordem dois.

$$R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (43)$$

O escalar de curvatura é o traço do tensor de Ricci,

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu} = R. \quad (44)$$

Uma forma útil da identidade de Bianchi vem da dupla contração com a métrica inversa:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\beta} g^{\alpha\rho} (\nabla_\rho R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\alpha\beta} + \nabla_\mu R_{\nu\rho\alpha\beta}) \\ &= \nabla^\alpha R_{\mu\alpha} + \nabla^\beta R_{\mu\beta} - \nabla_\mu R. \end{aligned}$$

Renomeando o índice mudo $\beta \rightarrow \alpha$; e posteriormente, por estética, renomeando $\alpha \rightarrow \nu$ e,

⁸Alternativamente, pode-se escrever a identidade com o primeiro índice levantado

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} + R^\mu_{\beta\nu\alpha} + R^\mu_{\alpha\beta\nu} = 0.$$

finalmente, dividindo a equação por dois, obtém-se:

$$\nabla^\nu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu R = 0,$$

ou,

$$\nabla^\nu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = 0.$$

O termo em parênteses é definido como o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Isso mostra que o tensor de Einstein é covariantemente conservado, ou seja,

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0. \tag{45}$$

Essa equação é chamada de identidade de Bianchi contraída. As equações de Einstein são construídas com a Eq. (45) e o tensor energia-momento.

2.5 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

A seção anterior foi dedicada à apresentação da curvatura do espaço-tempo, porém, como já dito, a Relatividade Geral descreve como o espaço-tempo se encurva na presença da matéria. Nas palavras de John Wheeler, ‘Geometry tells matter how to move, and matter tells geometry how to curve’ (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). Sabe-se que a teoria newtoniana é válida para muitos fenômenos, e que a RG é uma generalização desta teoria. Sendo assim, é necessário que ela retome a gravitação newtoniana em um regime de baixas velocidades e campo fraco tão logo a massa tem um papel fundamental na determinação desse regime. Na RG, toda a informação a respeito das propriedades da matéria que curva o espaço-tempo está condensada em um tensor de ordem dois, conhecido como tensor de energia-momento. Poderíamos chamá-la de tensor de massa, porém, devido à Relatividade Especial, a massa é uma forma de energia E , pois:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2, \tag{46}$$

onde, p é o momento linear e

$$E_0 = mc^2, \tag{47}$$

é a energia de repouso. Toda essa informação concentra-se no tensor de energia momento:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(E, p). \tag{48}$$

A equação acima nos mostra que qualquer tipo de energia é uma fonte para o campo gravitacional.

Tratando-se de um tensor de energia e momento, dois conceitos físicos que respeitam as leis de conservação, concluímos que o próprio tensor é covariantemente conservado, ou seja,

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (49)$$

Essa equação é fundamental para a construção das equações de Einstein.

2.6 CONSTRUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Na teoria gravitação de Newton, o potencial gravitacional ϕ satisfaz a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (50)$$

que tem como solução:

$$\phi(x) = -G \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (51)$$

Observamos que do lado esquerdo da equação de Poisson, temos uma derivada segunda do potencial e, no lado direito, temos a densidade de matéria. A equação de campo da RG deve possuir a mesma estrutura do caso newtoniano, mas precisa ser adaptada para levar em conta que a métrica desempenha o papel do potencial gravitacional. Na construção da equação de campo da RG, podemos, portanto, utilizar o tensor de Einstein, que é dependente da derivada segunda da métrica, e o tensor de energia-momento, que encapsula toda a informação de matéria. Então, tomemos as Eqs. (45) e (49):

$$\begin{aligned} \nabla^\nu T_{\mu\nu} &= 0, \\ \nabla^\nu G_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

As duas equações são covariantemente conservadas, são simétricas e apresentam um paralelo com a Eq. (50), como foi discutido acima. Assim, elas devem diferir uma da outra apenas por termos constantes, que simbolizaremos por χ . Logo, conseguimos equacioná-las como:

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}.$$

Acima, estão as famosas equações de Einstein, na forma mais clássica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}. \quad (52)$$

A constante χ pode ser encontrada quando a RG segue para o limite de campo fraco, onde ela deve recuperar os resultados da mecânica newtoniana.

2.6.1 Limite de Campo Fraco

As equações de Einstein necessitam encapsular as equações de Newton em algum limite, pois a gravitação de Newton é válida na descrição de inúmeros fenômenos conhecidos. Sabemos que a teoria newtoniana da gravitação explica bem a interação gravitacional no sistema solar, e também sabemos que a interação gravitacional do Sol é menos intensa, em termos absolutos, do que a de estrelas supermassivas e a de galáxias. Assim, as equações de Einstein devem se assemelhar a equação clássica da gravitação, e isso ocorre na aproximação de campo fraco. Nessa configuração, o tensor métrico assume valores próximos aos do espaço-tempo de Minkowski, porém, com alguma perturbação, que equacionamos assim:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (53)$$

onde $h_{\mu\nu} \ll 1$.

Uma partícula teste situada neste campo sofrerá pequenas acelerações, movendo-se a pequenas velocidades,

$$\mathbf{u} \ll c,$$

onde \mathbf{u} é o seu vetor velocidade e c é a velocidade da luz.

Com as condições acima citadas, pode-se substituir a métrica $g_{\mu\nu}$ pela métrica do espaço-tempo de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, e o intervalo escreve-se:

$$ds^2 \simeq \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (54)$$

Devido à velocidade da luz ser muito maior que as velocidades que serão produzidas na partícula, ou seja, devido ao movimento não-relativístico da partícula, temos que a relação (54) se transforma em:

$$ds^2 \simeq -c^2 dt^2. \quad (55)$$

Com as considerações anteriores e utilizando a definição (32), observamos que

$$\frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds}.$$

Com a relação acima, teremos uma simplificação na equação da geodésica: as componentes que sobreviverão na conexão serão apenas as componentes temporais. Por consequência

dessas imposições e usando (55), temos que a equação da geodésica (37) transforma-se para:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + c^2 \Gamma_{00}^\mu = 0. \quad (56)$$

Para calcular a componente Γ_{00}^μ dos símbolos de Christoffel, supomos que o campo seja estático, ou seja, que o campo não varia com o tempo. Com isso, temos que $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. Então, da Eq. (38), tem-se:

$$\Gamma_{00}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_0 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}),$$

logo,

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} g^{\lambda j} \partial_j g_{00}.$$

No regime de campo fraco, a métrica covariante é dada por (53) e a métrica contravariante, por:⁹

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (57)$$

A derivada da métrica de Minkowski é nula por se tratar de uma constante. Na expressão dos símbolos de Christoffel há multiplicações do tipo $h\partial h$, dado que $h \ll 1$, termos dessa forma são desprezados por estarmos tratando de uma aproximação linear em $h_{\mu\nu}$. Ainda, a métrica de Minkowski é nula nos elementos com índices que diferem entre si, portanto os termos sobreviventes são:

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{2} \eta^{kj} \partial_j h_{00}, \quad (58)$$

onde $\eta^{kj} = +1$, para $k = j$. Assim, a equação da geodésica fica:

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} - \frac{1}{2} c^2 \partial_j h_{00} = 0.$$

Reescrevendo de um modo mais sugestivo, tem-se:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \left(-\frac{c^2}{2} h_{00} \right), \quad (59)$$

a relação acima é a equação de movimento de Newton para uma partícula teste no campo gravitacional. Pode-se comparar com a equação da aceleração de um corpo produzido por um potencial gravitacional, expressa pelo gradiente do potencial (CARROLL, 2014):

$$\mathbf{a} = -\nabla \phi. \quad (60)$$

⁹A explicação do sinal negativo na Eq. (57) está no Apêndice A.

Comparando a equação da geodésica (59) e a Eq. (60), verifica-se que o potencial pode ser escrito como:

$$\phi = -\frac{c^2}{2}h_{00}.$$

Portanto, os valores de h_{00} e g_{00} são:

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}\phi, \quad (61)$$

e

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right). \quad (62)$$

A Eq. (62) é obtida inserindo (61) em (53).¹⁰

Para que as equações de Einstein estejam completas é necessário encontrar a constante χ presente em (52),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}. \quad (63)$$

O método usado para encontrar a constante χ é calcular o tensor de Ricci por dois caminhos distintos e igualá-los. O primeiro é reescrever as equações de Einstein de modo a obtermos isoladamente o tensor de Ricci e deixá-lo em função do tensor energia-momento e o seu respectivo traço. O segundo caminho é a própria definição do tensor de Ricci em termos do tensor métrico, com imposição das condições já estabelecidas para o campo fraco. Assim, necessitamos encontrar o tensor de Ricci com os índices R_{00} .

Extraindo o traço de (63) e substituindo o resultado de volta nas equações de Einstein segue que:

$$R_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right),$$

onde o tensor de energia momento para poeira é dado por $T_{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ (DE SABBATA; GASPERINI, 1985). Escolhendo os índices $\mu = \nu = 0$ e usando o traço do tensor energia momento de poeira, obtemos a seguinte equação

$$R_{00} = \chi \frac{\rho c^2}{2}. \quad (64)$$

O tensor de Ricci, R_{00} , via a definição (43), é obtido desprezando os últimos dois termos que dependem apenas da conexão: estes termos dão uma multiplicação de ordem superior em h que abandonamos na consideração do campo fraco. Também, negligenciamos termos envolvendo derivadas temporais devido à hipótese do campo estático. Assim, obtém-se R_{00}

¹⁰Dada a assinatura da métrica $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ temos que $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$. Logo, $g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2}\phi$.

em função de derivadas primeiras da conexão, ou seja, o tensor de Ricci é uma derivada segunda espacial da componente h_{00} da métrica de campo fraco:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00},$$

onde $h_{00} = -\frac{2}{c^2}\phi$, conforme a Eq. (61). Então, o tensor de Ricci é:

$$R_{00} = \frac{1}{c^2}\nabla^2 \phi. \quad (65)$$

Igualando as Eqs. (64) e (65) e comparando com a Eq. (50), temos que a constante presente nas equações de Einstein deve ser:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (66)$$

Substituindo (66) em (52), temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (67)$$

que são as equações de Einstein com a sua constante explícita. A construção das equações de Einstein pode ser feita via ação de Einstein-Hilbert, como dito na Seção 1. Dedicaremos-nos a esta tarefa a seguir.

2.6.2 Equações de Campo via Integral de Ação

As equações de Einstein podem ser deduzidas usando o princípio da mínima ação. Para formular uma teoria da gravidade genericamente covariante e invariante sob as transformações de coordenadas gerais necessita-se uma integral de ação que seja escalar. No caso da RG, essa integral é a ação de Einstein-Hilbert, segundo a qual, o escalar envolvido é apenas o escalar de curvatura R . Como veremos, essa é uma escolha de simplicidade, já que em teorias de gravitação mais gerais, construímos a integral de ação adicionando outros termos escalares à contribuição de Einstein-Hilbert.

Os passos que se seguem são encontrados no livro de Ryder (RYDER, 2009), que é a referência principal para esta seção. Vamos tomar a ação total como a soma das contribuições da matéria e do campo gravitacional,

$$S = S_g + S_m. \quad (68)$$

A variação da ação total acima é nula,

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0. \quad (69)$$

A variação de S_g ,

$$S_g = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (70)$$

é dada por:

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x [g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} (\delta\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu})]. \quad (71)$$

Pela identidade de Palatini (RYDER, 2009),

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda), \quad (72)$$

onde,

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} [\nabla_\nu (\delta g_{\mu\sigma}) + \nabla_\mu (\delta g_{\nu\sigma}) - \nabla_\sigma (\delta g_{\mu\nu})]. \quad (73)$$

Observa-se que o objeto $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é um tensor, já que depende da métrica e de derivadas covariantes.

Mostraremos a seguir que o último termo da Eq. (71) é uma derivada total. Substituindo (72) no último termo de (71), temos:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)].$$

Dado o postulado da metricidade, $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$, temos:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) = \sqrt{-g} [\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)]. \quad (74)$$

Sabemos também que (RYDER, 2009):

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu). \quad (75)$$

Com a relação (75) transformamos as derivadas covariantes de (74) em derivadas ordinárias. Assim segue que:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) = \partial_\lambda [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu], \quad (76)$$

um divergente total. Com isso, a Eq. (71) é reescrita como:

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ R (\delta\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + \partial_\lambda [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu] \right\}. \quad (77)$$

Definimos o último termo de (77) como:

$$\delta S_{g(3)} \equiv \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\lambda W^\lambda = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\lambda [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu], \quad (78)$$

temos que a integral (78) é do tipo:

$$\int_\Omega d^4x \partial_\lambda W^\lambda = \oint_{\partial\Omega} dS_\lambda W^\lambda, \quad (79)$$

onde Ω é um quadrivolume e $\partial\Omega$ é a sua fronteira, dS_λ é o elemento infinitesimal orientado de uma hipersuperfície tridimensional. A Eq. (79) é a versão quadridimensional do teorema de Gauss. A integral (78) não contribui para a equação de movimento pois a variação da ação requer que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ no contorno do hipervolume, isso anula os termos $\delta\Gamma$ em W^λ .

Temos (DE SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (80)$$

Usando (80), a Eq. (77) simplifica para:

$$\delta S_g = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (81)$$

Por outro lado a variação da ação de matéria é escrita na forma:

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (82)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento para matéria.

A variação total da ação S de (68) em relação à $g_{\mu\nu}$ é:

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m. \quad (83)$$

Substituindo as equações (81) e (82) em (83), temos:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu}.$$

Como $\delta S = 0$, segue que:

$$\frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0.$$

Assim,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (84)$$

Essas são as equações de Einstein encontradas em (67). O procedimento executado nessa seção será usado na derivação das equações de campo para o modelo de Starobinsky de ordem superior mais a frente neste texto — vide Seção 4.1 e o Apêndice F. Uma previsão das equações de campo é a existência de perturbações no espaço-tempo que se propagam tais como ondas e serão estudadas a seguir.

3 ONDAS GRAVITACIONAIS NA RELATIVIDADE GERAL

As equações de Einstein dizem que objetos massivos deformam o espaço-tempo ao seu redor, ou seja, curvam o espaço-tempo nos seus entornos; se tais objetos se deslocarem, a deformação os acompanhará.¹¹ Alguns eventos astrofísicos de alta energia, como coalescência de buracos negros, provocam deformações que se propagam no espaço-tempo. A essas deformações propagantes damos o nome de ondas gravitacionais (OGs). Elas são uma previsão da Teoria da Relatividade de Einstein que foi comprovada observacionalmente no ano de 2015, quando a colaboração do LIGO confirmou a detecção das OGs produzidas por buracos negros coalescentes de massas similares e a cerca de um bilhão de anos-luz da Terra (ABBOTT et al., 2016). As observações das ondas gravitacionais foram premiadas com o Nobel de Física em 2017, sendo os laureados: Kip S. Thorne, Rainer Weiss e Barry C. Barish.

No final da década de 60, Kip Thorne criou um grupo de pesquisa de ondas gravitacionais na Caltech, instituição localizada em Pasadena, no estado da Califórnia. Com o aprofundamento em seus estudos, Kip propôs à sua instituição a criação de um projeto para a detecção das ondas gravitacionais. O projeto de Thorne foi aceito com duas condições, a primeira, o projeto deveria ser liderado por um físico experimental de renome e, a segunda, deveria ter as condições necessárias para que as chances de sucesso fossem boas (THORNE, 1994).

O líder, inicialmente, pensado por Kip seria o russo Braginsky, que rejeitou a proposta, recomendando o nome de Ronald Drever da Universidade de Glasgow, que aceitou o convite. Drever havia trabalhado com detectores de massa ressonante por cinco anos e sabia das limitações deste modelo de detecção. Drever fez com que o projeto tivesse uma abordagem do tipo interferômetro (THORNE, 1994). O modelo de interferômetro foi usado em 1887 por Michelson e Morley na tentativa de detectar a presença do éter no espaço (MICHELSON; MORLEY, 1887). Hoje, há outros detectores do tipo interferômetro no planeta, com destaque para: VIRGO, localizado na cidade de Pisa na Itália; GEO600, localizado em Hannover na Alemanha; e KAGRA em Hida no Japão.

A detecção das OGs pela colaboração do LIGO não foi a primeira tentativa de detecção. A história começa com Joseph Weber, no final da década de 50. Weber serviu na Segunda Guerra Mundial e era notadamente reconhecido pelo seu domínio na tecnologia de radar, o que lhe rendeu um cargo de professor na Universidade de Maryland após a guerra. Weber aprofundou seus conhecimentos em outras áreas da Física em seu Ph.D. sob supervisão de Karl Herzfeld, o mesmo supervisor de John Wheeler. Weber participou por um tempo no

¹¹Esse fenômeno de frame dragging acontece, por exemplo, na vizinhança de um buraco negro em rotação descrito pela solução de Kerr (ADLER et al., 1975), (D'INVERNO, 1992).

grupo de pesquisa de Wheeler, que o fez aprofundar-se na RG. Assim, no final da década de 50, Weber adentrou em sua nova área de pesquisa: detecção das ondas gravitacionais. O mecanismo desenvolvido por Weber era um detector de massa ressonante, constituído por um cilindro de 1 metro de diâmetro e 2 metros de comprimento. Para a detecção, ele utilizou sensores baseados no efeito piezoelétrico: haveria produção de corrente elétrica quando os cristais dos sensores se contraíssem ou dilatasse. Com a passagem da onda gravitacional pelo cilindro, este sofreria os efeitos de polarização da onda que fariam os sensores produzirem corrente, levando, assim, a uma detecção das OGs (THORNE, 1994).

Outra menção importante a ser feita é sobre o detector de OGs brasileiro, que leva o nome do físico brasileiro Mário Schenberg. Este detector esférico consiste de uma antena de 65 cm de diâmetro e 1150 kg de massa. O instrumento é mantido a baixíssimas temperaturas ($T \sim 4$ K). Acoplam-se sensores à superfície da esfera para monitorar vibrações causadas pela perturbação das OGs. O detector Schenberg foi construído na Universidade de São Paulo (USP) e está em processo de transferência para o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) sob a supervisão de Odylio Aguiar, professor do INPE – vide-se (OLIVEIRA; AGUIAR, 2016; COSTA, 2006).

A partir da detecção das OGs surge uma nova era da astronomia, a astronomia multi-mensageira. Através das informações carregadas pelas ondas gravitacionais, radiação eletromagnética, neutrinos e raios cósmicos, conseguimos uma nova interpretação do Universo.

3.1 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

O primeiro passo para conseguirmos uma compreensão das OGs é estudar as equações de Einstein linearizadas. Esse procedimento consiste em expandir a métrica, $g_{\mu\nu}$, em torno da métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, com uma pequena perturbação, como feito em (53) e (57). Tem-se, portanto:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (85)$$

com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. A métrica em sua forma contravariante é dada por:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (86)$$

Aqui não faremos a imposição de campo estático, de modo que $h_{\mu\nu}$ pode depender do tempo.

A fim de obter a teoria linearizada, substituímos a métrica (e suas derivadas) nas equações de Einstein pela métrica expandida dada por (85) e (86), e desprezamos termos de ordem superior que são dependentes de $\mathcal{O}(h^2)$, $\mathcal{O}(\partial h)^2$, $\mathcal{O}(h\partial h)$. Na teoria linearizada os índices

são levantados e abaixados com a métrica de Minkowski;¹² as demonstrações deste fato para efeito didático estão no Apêndice A. Temos:

$$h_{\mu}^{\nu} = \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad (87)$$

e o traço, h , é dado por:

$$h = h_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (88)$$

Para escrever as equações de Einstein linearizadas é também necessário executar a linearização dos símbolos de Christoffel, pois o escalar de curvatura e o tensor de Ricci são escritos em função dos símbolos de Christoffel. Substituindo (85) e (86) em (38):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) [\partial_{\mu} (\eta_{\nu\beta} + h_{\nu\beta}) + \partial_{\nu} (\eta_{\beta\mu} + h_{\beta\mu}) - \partial_{\beta} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})].$$

Lembrando que $\partial_{\alpha}\eta_{\mu\nu} = 0$ (em coordenadas cartesianas), temos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\partial_{\mu} h_{\nu\beta} + \partial_{\nu} h_{\beta\mu} - \partial_{\beta} h_{\mu\nu}). \quad (89)$$

Então, em ordem linear:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} h_{\nu\beta} + \partial_{\nu} h_{\beta\mu} - \partial_{\beta} h_{\mu\nu}). \quad (90)$$

Podemos construir o tensor de Riemann usando a Eq. (90). Contudo, teremos termos do tipo Γ^2 que serão negligenciados, pois carregam derivadas $(\partial h)^2$. A construção do tensor de Riemann linearizado está detalhada no Apêndice B, e o resultado é:

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha}\partial_{\nu} h_{\beta}^{\mu} - \partial_{\alpha}\partial^{\mu} h_{\beta\nu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu} h_{\alpha}^{\mu} + \partial_{\beta}\partial^{\mu} h_{\alpha\nu}). \quad (91)$$

Para a construção do tensor de Ricci linearizado é necessário a contração do primeiro índice com o terceiro índice em $R_{\nu\alpha\beta}^{\mu}$:

$$\begin{aligned} R_{\nu\beta} &= R_{\nu\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha}\partial_{\nu} h_{\beta}^{\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha} h_{\beta\nu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu} h_{\alpha}^{\alpha} + \partial_{\beta}\partial^{\alpha} h_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\alpha}\partial_{\nu} h_{\beta}^{\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha} h_{\beta\nu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu} h + \partial_{\beta}\partial^{\alpha} h_{\alpha\nu}), \end{aligned}$$

i.e.

¹²Isso vale para os tensores que são de primeira ordem em h .

$$R_{\nu\beta} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha h_{\beta\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\nu h - \partial_\alpha\partial_\nu h_\beta^\alpha - \partial_\beta\partial_\alpha h_\nu^\alpha). \quad (92)$$

Equivalentemente,

$$R_{\nu\beta} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha\partial^\alpha h_{\beta\nu} + \frac{1}{2}\left[\partial_\beta\partial_\alpha\left(h_\nu^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\nu^\alpha h\right) + \partial_\alpha\partial_\nu\left(h_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha h\right)\right]. \quad (93)$$

Podemos definir:

$$\bar{h}_\mu^\nu = h_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu h. \quad (94)$$

Essa mudança é útil, pois, dado calibre harmônico,

$$\partial_\nu\bar{h}_\mu^\nu = 0 \quad (\text{calibre harmônico}), \quad (95)$$

teremos uma redução significativa do tensor de Ricci. O calibre está atrelado a escolha de um parâmetro ξ_μ , que aparece na transformação infinitesimal de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ (com $|\xi^\mu| \ll 1$), e satisfaz:

$$\square\xi_\mu = 0. \quad (96)$$

As condições necessárias para a atingibilidade desse calibre estão no Apêndice C.

A aplicação do calibre (95) anula os termos em parênteses de (93), assim:

$$R_{\nu\beta} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\nu}\partial_\alpha\partial_\nu h_{\nu\beta}, \quad (97)$$

onde aparece o operador D'Alembertiano, $\square = \eta^{\alpha\nu}\partial_\alpha\partial_\nu = \partial^\nu\partial_\nu$. Assim, o tensor de Ricci, no regime linear e sob a imposição do calibre harmônico, escreve-se:

$$R_{\nu\beta} = -\frac{1}{2}\square h_{\nu\beta}. \quad (98)$$

Por conseguinte, o escalar de curvatura é dado por:

$$R = -\frac{1}{2}\square h. \quad (99)$$

Substituindo (98) e (99) em (84), obtemos as equações de Einstein linearizadas:¹³

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (100)$$

ou,

¹³O tensor $g_{\mu\nu}$ é substituído por $\eta_{\mu\nu}$ no segundo termo de (84) tendo em conta a necessidade de linearização.

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (101)$$

Substituindo a Eq. (94) em (101):

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (102)$$

A Eq. (102) tem uma solução análoga à que se encontra no eletromagnetismo para os campos elétrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{x}, t)$ a partir das equações de Maxwell (JACKSON, 1999). Ela é dada por:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu}(\vec{x}', t_r). \quad (103)$$

Se considerarmos um ponto de observação longe da fonte, na ausência de matéria, teremos $T_{\mu\nu} = 0$, e a Eq. (102) simplifica-se para:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (104)$$

que é equivalente à:¹⁴

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (105)$$

A Eq. (105) descreve uma perturbação gravitacional fraca propagando no vácuo com a velocidade da luz (MAGGIORE, 2008). A solução ondulatória encontrada para $\bar{h}_{\mu\nu}$ chamamos de ondas gravitacionais. Na próxima seção estudaremos a sua forma mais simples, as OGs planas.

3.2 ONDAS GRAVITACIONAIS PLANAS

O tipo de solução mais simples para a equação de onda (104) é representado por uma onda plana (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006), dada pela parte real de

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (106)$$

¹⁴Se $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, e tomarmos a contração com a métrica contravariante, temos:

$$\eta^{\mu\nu} \square \bar{h}_{\mu\nu} = \square \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -\square h = 0.$$

Isso conduz de (104) à (105) via a definição (94).

onde $A^{\mu\nu}$ é uma matriz de amplitude com elementos constantes, e $k^\mu = \eta^{\mu\alpha} k_\alpha$ é o quadrivetor de onda. Da equação de onda segue que $k^\sigma k_\sigma = 0$, pois, substituindo (106) em (104),

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho (A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\ &= \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma [A^{\mu\nu} (ik_\rho) e^{ik_\alpha x^\alpha}] \\ &= -A^{\mu\nu} (\eta^{\sigma\rho} k_\sigma k_\rho) e^{ik_\alpha x^\alpha}, \end{aligned}$$

o termo em parênteses da equação acima deve ser igual a zero para que a equação seja válida. Assim,

$$\eta^{\sigma\rho} k_\sigma k_\rho = k^\sigma k_\sigma = 0. \quad (107)$$

E ainda, impondo a condição de calibre harmônico dada por (95), chega-se que a contração do quadrivetor de onda, k_ν , e a amplitude da onda representada pela matriz $A^{\mu\nu}$ é nula,

$$k_\nu A^{\mu\nu} = 0. \quad (108)$$

A amplitude é ortogonal à direção de propagação. Com essa condição, temos que a onda gravitacional é uma onda transversal.

A matriz amplitude, $A^{\mu\nu}$, é uma matriz com 16 componentes. Porém, a quantidade de componentes independentes cai para 10, devido à sua simetria: $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ pois $\bar{h}^{\mu\nu} = \bar{h}^{\nu\mu}$, que decorre de $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$ (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006). Para que isso fique mais claro, veja construção da matriz associada à $A^{\mu\nu}$:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{03} & A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Percebe-se que (109) é uma matriz simétrica com 10 componentes independentes. Como estamos interessados em uma onda plana, que se propaga em uma dada direção, a matriz (109) simplifica-se ainda mais, pois, duas das coordenadas espaciais do quadrivetor de onda serão nulas. De fato, adotando o eixo de propagação como x^3 , ou seja, $k_1 = k_2 = 0$ (D'INVERNO, 1992), podemos reescrever $\eta^{\sigma\rho} k_\sigma k_\rho = 0$, como:

$$\eta^{00} k_0 k_0 + \eta^{30} k_3 k_0 + \eta^{03} k_0 k_3 + \eta^{33} k_3 k_3 = 0.$$

A métrica de Minkowski é uma matriz diagonal representada, nas coordenadas cartesianas, por $\text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. Logo,

$$-(k_0)^2 + (k_3)^2 = 0.$$

Como solução, temos:

$$k_0 = \pm k_3.$$

Adotaremos a componente temporal como negativa e a espacial como positiva, por mera semelhança com a assinatura da métrica. Definiremos, ainda, $k_0 = k$. Assim,

$$k_\sigma = (-k, 0, 0, k). \quad (110)$$

É necessário calcular o quadri vetor de onda contravariante, k^σ . Para isso, usamos a Eq. (107). Logo:

$$k^\sigma = (k, 0, 0, k). \quad (111)$$

Com o vínculo da ortogonalidade entre o vetor de onda e a amplitude, reduzem-se os elementos livres da matriz (109). Isso é demonstrado rescrevendo a Eq. (108) com $k_1 = k_2 = 0$. Percebe-se que as componentes temporais da matriz amplitude são vinculadas às componentes espaciais, pois,

$$k_\nu A^{\mu\nu} = k_0 A^{\mu 0} + k_3 A^{\mu 3} = 0.$$

Usando a relação do quadri vetor covariante (110),

$$-k A^{\mu 0} + k A^{\mu 3} = 0,$$

vemos que:

$$A^{\mu 0} = A^{\mu 3}. \quad (112)$$

A relação encontrada acima demonstra uma equivalência entre algumas das componentes espaciais e temporais, estabelecendo um vínculo na matriz amplitude. Isto implica que a matriz $A^{\mu\nu}$ pode ser expressa em termos de seis componentes: $A^{00}, A^{01}, A^{02}, A^{11}, A^{12}, A^{22}$. Dessa forma,

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{pmatrix}. \quad (113)$$

3.2.1 Fixação do Gauge Residual

Seria muito conveniente que alguma escolha de constantes simplificasse a matriz (113) para que tivéssemos um significado do que ela representa fisicamente. Para conferir se isso é realmente possível, iniciamos com o estudo da lei de transformação de um tensor de rank dois sob a transformação infinitesimal, $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, $|\xi^{\mu}| \ll 1$, dada por (DE SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$\bar{h}'^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^{\nu}\xi^{\mu} - \partial^{\mu}\xi^{\nu} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\xi^{\lambda}. \quad (114)$$

Inspirados na Eq. (106) e no vínculo (96), propomos um ansatz para ξ com a forma

$$\xi^{\mu} = -i\varepsilon^{\mu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}}. \quad (115)$$

Substituindo a relação (115) na transformação tensorial (114), obtemos:

$$A'^{\mu\nu}e^{ik_{\alpha'}x^{\alpha'}} = (A^{\mu\nu} - k^{\nu}\varepsilon^{\mu} - k^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \eta^{\mu\nu}k_{\lambda}\varepsilon^{\lambda})e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}}.$$

Os termos exponenciais se cancelam (em primeira ordem), portanto, a transformação de coordenadas do $\bar{h}^{\mu\nu}$ torna-se dependente da matriz amplitude, do quadrivetor de onda e de mais um vetor constante ε^{μ} ,

$$A'^{\mu\nu} = (A^{\mu\nu} - k^{\nu}\varepsilon^{\mu} - k^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \eta^{\mu\nu}k_{\lambda}\varepsilon^{\lambda}). \quad (116)$$

Como a matriz amplitude é definida apenas por seis componentes: $A^{00}, A^{01}, A^{02}, A^{11}, A^{12}, A^{22}$, aplicamos a transformação de coordenadas acima apenas para estas componentes. Com isso:

$$\begin{cases} A'^{00} = A^{00} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) \\ A'^{01} = A^{01} - \varepsilon^1 k \\ A'^{02} = A^{02} - \varepsilon^2 k \\ A'^{11} = A^{11} - k(\varepsilon^3 - \varepsilon^0) \\ A'^{12} = A^{12} \\ A'^{22} = A^{22} - k(\varepsilon^3 - \varepsilon^0) \end{cases}. \quad (117)$$

Essas componentes são as entradas da matriz amplitude de onda transformada:¹⁵

$$A'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A'^{00} & A'^{01} & A'^{02} & A'^{00} \\ A'^{01} & A'^{11} & A'^{12} & A'^{01} \\ A'^{02} & A'^{21} & A'^{22} & A'^{02} \\ A'^{00} & A'^{01} & A'^{02} & A'^{00} \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Podemos nos perguntar como a matriz transformada (118) pode ser simplificada o máximo possível através da escolha adequada das constantes ε^μ . Usaremos as relações de (117) para isso.

Impondo $A'^{01} = 0$ e usando $A'^{01} = A^{01} - \varepsilon^1 k$, temos:

$$\varepsilon^1 = \frac{A^{01}}{k}. \quad (119)$$

Fixando $A'^{02} = A^{02} - \varepsilon^2 k = 0$, resulta:

$$\varepsilon^2 = \frac{A^{02}}{k}. \quad (120)$$

Finalmente, selecionando $A'^{00} = A^{00} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) = 0$, e $A'^{11} = -A'^{22}$, encontramos:

$$\varepsilon^0 = (2A^{00} - A^{11} - A^{22})/4k. \quad (121)$$

$$\varepsilon^3 = (2A^{00} + A^{11} + A^{22})/4k. \quad (122)$$

As equações (119), (120), (121) e (122) mostram que é possível escolher uma transformação de coordenadas (115) tal que a matriz (117) seja de traço nulo e com o mínimo de entradas diferentes de zero, a saber: A'^{11} , $A'^{12} = A'^{21}$ e $A'^{22} = -A'^{11}$.¹⁶ Esse novo calibre é conhecido como *transverse traceless gauge* ou *TT gauge* (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006).

Tendo em vista as observações acima, podemos reescrever a matriz (118), como:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{12} & -A^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Desprezamos a notação das linhas em $A'^{\mu\nu}$ por economia de notação (e por não haver mais risco de confusão). A matriz (123) pode ser entendida como uma combinação linear de outras

¹⁵Ademais, podemos tomar $A'^{\mu 3} = 0$ sem perda de generalidade.

¹⁶Essa escolha fixa a liberdade de gauge residual permitida pela covariância da teoria por transformações gerais de coordenadas, como em (114).

duas matrizes:

$$A'^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu} + \beta e_2^{\mu\nu},$$

com α e β constantes complexas. As matrizes $e_1^{\mu\nu}$ e $e_2^{\mu\nu}$ são:

$$e_1^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Elas são chamadas de matrizes de polarização linear, estão relacionadas à maneira como as OGs afetam partículas com as quais interagem, e passaremos a usá-las no estudo a seguir.

3.2.2 Polarização da Onda Gravitacional

Assumimos um vetor do tipo espaço $\xi^\mu = (0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ que nos dá as coordenadas entre partículas vizinhas. Apesar da diferença entre as coordenadas serem constantes, isso não significa que a separação espacial d entre esses pontos é constante. A separação dos pontos pode sofrer variações devido à dilatação do espaço-tempo causada por uma onda gravitacional. Tomemos a definição de intervalo d dado por (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006):

$$d^2 = \tilde{g}_{ij} \xi^i \xi^j, \quad (125)$$

onde,

$$\tilde{g}_{ij} \equiv g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij},$$

com h_{ij} sendo a perturbação da onda. Colocando:

$$\zeta^i \equiv \xi^i + \frac{1}{2} h_k^i \xi^k, \quad (126)$$

e negligenciando termos de ordem superior, $\mathcal{O}(h^2)$, teremos:

$$\delta_{ij} \zeta^i \zeta^j = (\delta_{ij} + h_{ij}) \xi^i \xi^j. \quad (127)$$

A contração dada por (127) é a separação espacial das coordenadas, em concordância com (125).

Do TT gauge, temos que $h_i^3 = 0$, assim, segue que,

$$\zeta^3 = \xi^3 = \text{constante}. \quad (128)$$

A relação (128) diz que partículas separadas na direção de propagação não têm suas dis-

tâncias, no respectivo eixo, afetadas pela passagem da onda gravitacional. A conclusão é esperada, pois se trata de uma onda transversal. Do TT gauge, temos que a perturbação gravitacional é dada por:

$$h^{ij} = A^{ij} e^{ik_\alpha x^\alpha}. \quad (129)$$

Podemos substituir a Eq. (129) em (126), obtendo:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2} A^{ij} e^{ik_\alpha x^\alpha} \xi_j. \quad (130)$$

Nos passos a seguir, o estudo da Eq. (130) será feita com a seguinte escolha: $A^{ij} = \alpha e_1^{ij}$. Partimos, portanto, para a análise da primeira matriz de polarização da relação (124). Isso seleciona as componentes diagonais de $A^{\mu\nu}$ em (123). Usando a métrica de Minkowski, podemos levantar o índices de ξ_j da Eq. (130). Dados os elementos da métrica, os termos sobreviventes são representados por:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2} \alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} [(e_1^{i1} \xi^1 + e_1^{i2} \xi^2)].$$

Tomando a parte real da exponencial de Euler, tem-se apenas o cosseno como resultado:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2} \alpha [\cos k(x^0 - x^3)] [(e_1^{i1} \xi^1 + e_1^{i2} \xi^2)]. \quad (131)$$

Varrendo os valores de $i = 1, 2, 3$ e usando os valores de $e_1^{\mu\nu}$, dados por (124), em (131), obtemos:

$$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (\xi^1, \xi^2, 0) + \frac{1}{2} \alpha [\cos k(x^0 - x^3)] \left(\xi^1, -\xi^2, 0 \right). \quad (132)$$

Isso conclui os passos do estudo do modo $e_1^{\mu\nu}$. Agora, podemos fazer a análise do modo $e_2^{\mu\nu}$. Repetindo os passos acima desde a Eq. (130), obtemos:

$$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (\xi^1, \xi^2, 0) + \frac{1}{2} \beta [\cos k(x^0 - x^3)] \left(\xi^2, \xi^1, 0 \right). \quad (133)$$

Vamos investigar o significado de (132) e (133) em três casos específicos, que são as circunstâncias em que o valor do cosseno é $-1, 0, 1$. Avaliemos o que acontece com a Eq. (132). Para $\cos k(x^0 - x^3) = 0$,

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 \end{cases}. \quad (134)$$

Para $\cos k(x^0 - x^3) = 1$, a Eq. (132) dá:

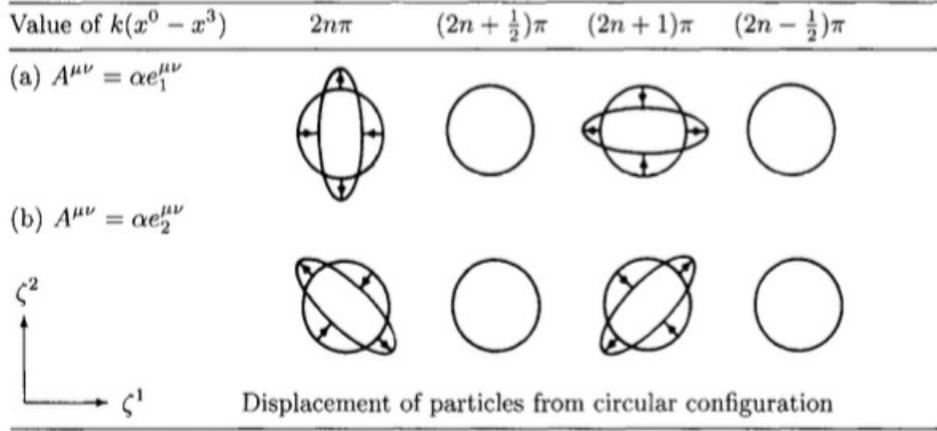


Figura 2: Modos de polarização das ondas gravitacionais (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006)

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\alpha\xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 - \frac{1}{2}\alpha\xi^2 \end{cases} \quad (135)$$

Se $\cos k(x^0 - x^3) = -1$, então:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 - \frac{1}{2}\alpha\xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\alpha\xi^2 \end{cases} \quad (136)$$

Tomemos uma circunferência de partículas teste cujas posições são medidas por ζ^i após a passagem da onda gravitacional, e ξ^i são as posições originais das partículas no anel. De (134) percebemos que o círculo nada sofrerá quando o valor do cosseno for 0: $\zeta^i = \xi^i$ indica que a posição das partículas não muda. Para o valor do cosseno igual a +1, Eq. (135), haverá um alongamento do anel de partículas no eixo ζ^1 , dado pelo fator $+\frac{1}{2}\alpha\xi^1$, e um achatamento no eixo ζ^2 , devido ao fator $-\frac{1}{2}\alpha\xi^2$. A Eq. (136) mostra que, para o cosseno igual a -1 a configuração anterior muda, o alongamento é percebido no eixo ζ^2 (sinal positivo no fator $\frac{1}{2}\alpha\xi^2$) e o achatamento é observado no eixo ζ^1 (sinal negativo no fator $\frac{1}{2}\alpha\xi^1$). Essas deformações do anel estão mostradas na linha superior da Fig. 1. Essa estrutura dá à essa matriz de polarização uma configuração de norte-sul e leste-oeste representada pelo símbolo $+$, e devido a isso é comum na literatura os elementos dessa matriz serem representados por h_+ e $-h_+$.

Quando repetimos o raciocínio acima partindo da Eq. (133), encontramos o padrão de perturbação em \times da segunda linha da Fig. 1 que corresponde ao modo $e_2^{\mu\nu}$. O estudo detalhado está no Apêndice D.

3.3 GERAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

A Eq. (102) nos dá uma relação entre a radiação gravitacional, representada por $\bar{h}_{\mu\nu}$, e a fonte, dada por $T_{\mu\nu}$:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

cujas soluções são análogas às do eletromagnetismo, encontradas em Jackson (JACKSON, 1999), e pode ser expressa por:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu}(\vec{x}', t_r),$$

onde \vec{x} representa as coordenadas do ponto onde se calcula o campo, \vec{x}' denota as coordenadas dos elementos de volume d^3x' na fonte e $t_r = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ é o tempo retardado. Se analisarmos uma fonte cuja distribuição de massa esteja localizada perto da origem, e considerarmos o ponto de cálculo do campo a uma distância extremamente maior que as distâncias típicas da distribuição de massa, então o termo $|\vec{x} - \vec{x}'|$ pode ser aproximado apenas pela distância $r \simeq |\vec{x}|$ da origem até o ponto de cálculo do campo.¹⁷ Assim, teremos:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4 r} \int d^3x' T_{\mu\nu}(\vec{x}', t_r). \quad (137)$$

Numa onda plana, a parte irradiada de $\bar{h}_{\mu\nu}$ é completamente determinada pela sua parte espacial \bar{h}_{ij} , pois $A^{0\mu} = 0$ no TT gauge. Logo, precisamos considerar apenas $\int T^{ij} dV$ para estudarmos a Eq. (137). O tensor da fonte satisfaz a equação de conservação $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ em um regime linear. Dessa forma,

$$\begin{cases} \partial_0 T^{00} + \partial_k T^{0k} = 0. \\ \partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = 0. \end{cases} \quad (138)$$

A primeira equação de (138) é construída fixando $\mu = 0$ em $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$, e abrindo a soma em ν de 0 até k . Já para a segunda equação fixamos $\mu = i$, e desmembramos o ν em 0 e k .

Consideremos a identidade:

$$\partial_k (T^{ik} x^j) = (\partial_k T^{ik}) x^j + T^{ik} \frac{\partial x^j}{\partial x^k} = (\partial_k T^{ik}) x^j + T^{ik} \delta_k^j. \quad (139)$$

¹⁷Esse raciocínio está ligado à expansão multipolar do campo. A expansão multipolar não é útil apenas no contexto da gravitação conforme descrita pela RG. De fato, ela aparece no contexto da gravitação newtoniana; isso pode ser visto em alguns exemplos abordados ao longo do capítulo 5 da referência (MARION; THORTON, 2008).

Portanto,

$$\partial_k (T^{ik} x^j) = (\partial_k T^{ik}) x^j + T^{ij} . \quad (140)$$

Tomando a integral de (140) no volume:¹⁸

$$\int \partial_k (T^{ik} x^j) dV = \int (\partial_k T^{ik}) x^j dV + \int T^{ij} dV , \quad (141)$$

onde as integrais são tomadas sobre uma região que engloba a fonte, assim, $T^{\mu\nu} = 0$ na região de contorno. Pelo teorema de Gauss, o termo da esquerda da Eq. (141) se anula pela condição de fronteira,

$$\int_{\Omega} \partial_k (T^{ik} x^j) dV = \oint_{\partial\Omega} T^{ik} x^j dS_k = 0 , \quad (142)$$

pois, repetimos, $T^{ik} = 0$ em $\partial\Omega$. Assim, a Eq. (141) torna-se:

$$\int (\partial_k T^{ik}) x^j dV + \int T^{ij} dV = 0 , \quad (143)$$

ou

$$\int T^{ij} dV = - \int (\partial_k T^{ik}) x^j dV ,$$

e pela relação (138), tem-se que

$$\int T^{ij} dV = \int (\partial_0 T^{i0}) x^j dV = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} x^j dV . \quad (144)$$

Devido à simetria de T^{ij} , ou seja, $T^{ij} = T^{ji}$, podemos reescrever a Eq. (144) usando a permutação dos índices i e j e somando do seguinte modo:

$$\int T^{ij} dV = \frac{1}{2} \int T^{ij} dV + \frac{1}{2} \int T^{ji} dV = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int (T^{i0} x^j + T^{j0} x^i) dV . \quad (145)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \partial_k (T^{0k} x^i x^j) &= (\partial_k T^{0k}) x^i x^j + T^{0k} x^j \frac{\partial x^i}{\partial x^k} + T^{0k} x^i \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \\ &= (\partial_k T^{0k}) x^i x^j + T^{0k} x^j \delta_k^i + T^{0k} x^i \delta_k^j , \end{aligned}$$

¹⁸A rigor, na Eq. (141) e equações subsequentes deveríamos usar x' e entendemos $dV = d^3x'$. Omitimos as linhas por economia de notação, mas elas serão novamente escritas explicitamente a partir da Eq. (151).

logo,

$$\partial_k (T^{0k} x^i x^j) = (\partial_k T^{0k}) x^i x^j + (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) . \quad (146)$$

Integrando a Eq. (146) no volume,

$$\int_{\Omega} \partial_k (T^{0k} x^i x^j) dV = \int_{\Omega} (\partial_k T^{0k}) x^i x^j dV + \int_{\Omega} (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) dV .$$

A integral do lado esquerdo é nula pelo mesmo motivo que em (142), i.e. pelo teorema de Gauss. Logo:

$$\int_{\Omega} (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) dV = - \int_{\Omega} (\partial_k T^{0k}) x^i x^j dV .$$

Usando (138), reescrevemos o lado direito tal que:

$$\int_{\Omega} (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) dV = \int_{\Omega} (\partial_0 T^{00}) x^i x^j dV = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T^{00} x^i x^j dV . \quad (147)$$

Agora substituímos a Eq. (147) na Eq. (145), para obter:

$$\int_v T^{ij} dV = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\Omega} T^{00} x^i x^j dV . \quad (148)$$

Reescrevendo a Eq. (137) em função das componentes espaciais, temos:

$$\bar{h}^{ij} = -\frac{4G}{c^4 r} \int T^{ij} dV . \quad (149)$$

Substituindo a Eq. (148) em (149), temos:

$$\bar{h}^{ij} = -\frac{4G}{c^4 r} \left(\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^i x^j dV \right) . \quad (150)$$

A Eq. (150) pode ser reescrita substituindo $T^{00} = \rho c^2$, com ρ sendo a densidade de massa, caso estejamos modelando a fonte por um sistema massivo em repouso (DE SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$\bar{h}^{ij} = -\frac{2G}{c^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x'^i x'^j d^3 x' . \quad (151)$$

Assim, temos que a radiação gravitacional \bar{h}^{ij} é dependente das posições das massas que lhe servem de fonte. O integrando da Eq. (151) é o cerne do que será definido como tensor momento de quadrupolo e é através dele que temos a equação de energia irradiada. Isso será

explorado na próxima seção.

3.4 ENERGIA EMITIDA VIA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Na presença da gravidade, o tensor de energia-momento é covariantemente conservado, ou seja, ele satisfaz a lei de conservação generalizada expressa por (49):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0.$$

Porém, se a energia e o momento são verdadeiramente conservados, nós deveríamos olhar para a lei de conservação na forma expressa em termos de derivadas parciais (RYDER, 2009), ou seja,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (152)$$

Para que a conservação genuína (152) ocorra é necessário um termo adicional ao tensor de energia-momento, representado por $t^{\mu\nu}$. Este termo é chamado de pseudotensor energia-momento. A conservação total da energia e do momento é satisfeita com

$$\partial_\nu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0. \quad (153)$$

A construção detalhada da conservação total de (153) e, por consequência, a construção do pseudotensor de energia-momento $t^{\mu\nu}$ pode ser feita seguindo os passos de V. de Sabbata (DE SABBATA; GASPERINI, 1985) e está no Apêndice E. O pseudotensor $t^{\mu\nu}$ é de fundamental importância para o estudo de ondas gravitacionais, pois o fluxo de energia da radiação gravitacional está relacionada às componentes de $t^{\mu\nu}$, que é escrito por:

$$\sqrt{-g}t_\mu^\nu = \frac{1}{4\chi} \left\{ (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\partial_\mu h \partial^\nu h) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h) \right\}, \quad (154)$$

para o caso da relatividade geral de Einstein. Para um modelo de gravitação diferente, a forma funcional de $t^{\mu\nu}$ com respeito a $\partial_\mu h^{\alpha\beta}$ pode diferir.

No caso de uma onda plana viajando pelo eixo x^3 , temos que os únicos componentes não nulos de $h_{\mu\nu}$, são: $h_{11} = -h_{22}$ e $h_{12} = h_{21}$. Assim, a densidade de fluxo de energia gravitacional irradiada pela fonte é dada por:

$$c\sqrt{-g}t_0^3 = \frac{c}{4\chi} (\partial_0 h^{11} \partial^3 h_{11} + \partial_0 h^{22} \partial^3 h_{22} + 2\partial_0 h^{12} \partial^3 h_{12}),$$

ou seja,

$$c\sqrt{-g}t_0^3 = \frac{c}{4\chi} \left(\frac{\partial h_{11}}{c\partial t} \frac{\partial h_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial h_{22}}{c\partial t} \frac{\partial h_{22}}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial h_{12}}{c\partial t} \frac{\partial h_{12}}{\partial x^3} \right). \quad (155)$$

Temos que,

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^3} = \partial_3 h_{ik} = \eta_{3\mu} \partial^\mu h_{ik} = \eta_{33} \partial^3 h_{ik} = \partial^3 h_{ik}. \quad (156)$$

Para uma onda plana descrita pela função $h_{ik}(\vec{x}, t)$ propagando-se na direção $z = x^3$, a dependência funcional em \vec{x} e t é dada pelo argumento típico de D'Alembert: $h_{ik}(\vec{x}, t) = h_{ik}(kz - \omega t)$ com $c = \lambda\nu = (2\pi/k)(1/T) = (2\pi/k)(\omega/2\pi) = \omega/k$; com λ , o comprimento de onda, ν a sua frequência, T o período de oscilação e ω sua frequência angular.¹⁹ Por isso:

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{ik}}{\partial t}. \quad (157)$$

Podemos usar (157) em (155). Com isso, as derivadas espaciais serão substituídas por derivadas temporais. Usando a notação: $\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} = \dot{h}_{ik}$, teremos:

$$c\sqrt{-g}t_0^3 = -\frac{c^3}{16\pi G} \left[\left(\dot{h}_{12} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\dot{h}_{11} - \dot{h}_{22} \right)^2 \right]. \quad (158)$$

Dado um sistema discreto de massas, podemos introduzir o tensor momento de quadrupolo:

$$D_{ik}(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') (3x'_i x'_k - r'^2 \delta_{ik}) d^3 x'. \quad (159)$$

O termo $r'^2 \delta_{ik}$ na Eq. (159) não contribuirá para a energia irradiada e podemos omití-lo.²⁰ Portanto uma derivada temporal de segunda ordem em (159) dá-nos uma relação como a Eq. (151) e teremos o seguinte conjunto de relações:

$$\begin{cases} h_{12} = -\frac{2G}{3c^4 r} \ddot{D}_{12} \\ h_{11} - h_{22} = -\frac{2G}{3c^4 r} (\ddot{D}_{11} - \ddot{D}_{22}) \end{cases}. \quad (160)$$

Podemos reescrever a Eq. (158) em função dos tensores de momento quadrupolo usando (160):

$$c\sqrt{-g}t_0^3 = -\frac{G}{36\pi c^5 r} \left[(\ddot{D}_{12})^2 + \frac{1}{4} (\ddot{D}_{11} - \ddot{D}_{22})^2 \right]. \quad (161)$$

A Eq. (161) é a densidade de fluxo de energia no caso de uma onda gravitacional plana propagando ao longo do eixo x^3 no contexto da relatividade geral.

¹⁹Vide, por exemplo, o Capítulo 9, Seção 9.1, do livro de eletrodinâmica de Griffiths (GRIFFITHS, 1999).

²⁰Uma discussão detalhada acerca do termo $r'^2 \delta_{ik}$ encontra-se na referência (OHANIAN; RUFFINI, 2013).

A intensidade de energia irradiada numa direção arbitrária, dada pelo vetor unitário $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, com $|\vec{n}| = 1$ é definida por:

$$dI = c\sqrt{-gt_0^k} d\sigma_k, \quad (162)$$

com $d\sigma_k$ sendo um elemento infinitesimal de área orientada pelo versor normal \vec{n} . A Eq. (162) pode ser calculada construindo uma expressão escalar, quadrática em \ddot{D}_{ik} , por inspiração na expressão dos colchetes da Eq. (161). Essa expressão mais geral para $c\sqrt{-gt_0^k}$ deve, então, reduzir-se à Eq. (161) de $c\sqrt{-gt_0^3}$, no caso da onda plana propagando-se ao longo do eixo x^3 , quando temos $\vec{n} = (0, 0, 1)$. O referido objeto escalar mais geral composto de $c\sqrt{-gt_0^k}$ seria:

$$\mathcal{V}_{(n_1, n_2, n_3)} = a \left(\ddot{D}_{ik} n_i n_k \right)^2 + b \left(\ddot{D}_{ik} \ddot{D}_{ik} \right) + c \ddot{D}_{ji} \ddot{D}_{jk} n_i n_k. \quad (163)$$

Impondo à Eq. (163) as condições

$$\begin{cases} n_i = n^i \\ D_{ik} = D^{ik} \\ \delta_{ik} = \text{diag}(1, 1, 1) \\ n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1 \end{cases}, \quad (164)$$

temos que (163) torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{(0,0,1)} = & a \left(\ddot{D}_{33} \right)^2 + b \left[\left(\ddot{D}_{11} \right)^2 + \left(\ddot{D}_{22} \right)^2 + \left(\ddot{D}_{33} \right)^2 + 2 \left(\ddot{D}_{12} \right)^2 + 2 \left(\ddot{D}_{13} \right)^2 + 2 \left(\ddot{D}_{23} \right)^2 \right] \\ & + c \left[\left(\ddot{D}_{13} \right)^2 + \left(\ddot{D}_{23} \right)^2 + \left(\ddot{D}_{33} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (165)$$

Porém, o tensor momento de quadrupolo, Eq. (159), é sem traço por construção, i.e.

$$\delta_{ik} D_{ik} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0. \quad (166)$$

Logo,

$$-D_{33} = D_{22} + D_{11}. \quad (167)$$

Substituindo (167) em (165), teremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{(0,0,1)} = & a \left[(\ddot{D}_{22})^2 + (\ddot{D}_{11})^2 + 2\ddot{D}_{22}\ddot{D}_{11} \right] \\
& + b \left[2(\ddot{D}_{22})^2 + 2(\ddot{D}_{11})^2 + 2\ddot{D}_{22}\ddot{D}_{11} + 2(\ddot{D}_{32})^2 + 2(\ddot{D}_{31})^2 + 2(\ddot{D}_{21})^2 \right] \\
& + c \left[(\ddot{D}_{22})^2 + (\ddot{D}_{11})^2 + 2\ddot{D}_{22}\ddot{D}_{11} + (\ddot{D}_{32})^2 + (\ddot{D}_{31})^2 \right]. \tag{168}
\end{aligned}$$

Igualando (168) ao colchetes de (161) conseguimos descobrir relações para determinar as constantes a, b, c . Comparando as constantes multiplicativas para cada setor envolvendo as derivadas das componentes do tensor momento de quadrupolo, temos:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases} . \tag{169}$$

Com as constantes encontradas em (169), a Eq. (165) torna-se recupera a Eq. (161). Para conseguirmos a perda da energia em todas as direções, usamos as constantes de (169) em (163) e empregamos as Eqs. (161) e (162). Com isso, teremos a intensidade pelo elemento de ângulo sólido, expressa como:

$$dI = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} \left(\ddot{D}_{ik}n_in_k \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_{ik}\ddot{D}_{ik} \right) - \ddot{D}_{ji}\ddot{D}_{jk}n_in_k \right] d\Omega . \tag{170}$$

A intensidade I é obtida integrando a Eq. (170) para dI no elemento de ângulo sólido $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$:

$$I = \frac{G}{36\pi c^5} \left\{ \int \frac{1}{4} \ddot{D}_{ij}\ddot{D}_{kl}n_in_jn_kn_l d\Omega + \frac{1}{2} \int \left(\ddot{D}_{ik} \right)^2 d\Omega - \int \ddot{D}_{ji}\ddot{D}_{jk}n_in_k d\Omega \right\} , \tag{171}$$

onde,

$$\begin{cases} n_1 = \sin\theta \cos\varphi \\ n_2 = \sin\theta \sin\varphi \\ n_3 = \cos\theta \end{cases} . \tag{172}$$

A relação (172) é válida pois ela é a forma unitária do vetor $|\vec{n}| = 1$ nas coordenadas esféricas. Os tensores de momento quadrupolo da Eq. (171) são constantes para a integração em $d\Omega$ pois não dependem de θ e de φ . Assim, a Eq. (171) possui três integrais nos ângulos envolvendo as componentes n_i . Quando calculadas, são:

$$\begin{cases} \int d\Omega & = 4\pi \\ \int n_i n_k d\Omega & = \frac{4\pi}{3} \delta_{ik} \\ \int n_i n_j n_k n_l d\Omega & = \frac{4\pi}{15} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \end{cases} . \quad (173)$$

Substituindo (173) em (171), temos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{G(4\pi)}{36\pi c^5} \left\{ \left[\frac{1}{4} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} (\ddot{D}_{ik})^2 - \ddot{D}_{ji} \ddot{D}_{jk} \left(\frac{1}{3} \delta_{ik} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{G}{9c^5} \left\{ \frac{1}{4} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{2} (\ddot{D}_{ik})^2 - \ddot{D}_{ji} \ddot{D}_{jk} \left(\frac{1}{3} \delta_{ik} \right) \right\} . \quad (174) \end{aligned}$$

Definindo:

$$\mathcal{G} \equiv \frac{1}{4} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) .$$

Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1}{60} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= \frac{1}{60} \left(\ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} \delta_{ij} \delta_{kl} + \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} + \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} \right) \\ &= \frac{1}{60} \left(\ddot{D}_{ii} \ddot{D}_{kk} + \ddot{D}_{kl} \ddot{D}_{kl} + \ddot{D}_{lk} \ddot{D}_{kl} \right) , \end{aligned}$$

e, dado que $\ddot{D}_{ii} = 0$, e que $\ddot{D}_{ij} = \ddot{D}_{ji}$, resulta:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{30} \left(\ddot{D}_{kl} \ddot{D}_{kl} \right) . \quad (175)$$

Substituindo (175) em (174), teremos:

$$I = \frac{G}{9c^5} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left(\ddot{D}_{ik} \right)^2 ,$$

onde adotamos a notação resumida,

$$\begin{aligned}
(\ddot{D}_{ik})^2 &= \ddot{D}_{ik}\ddot{D}_{ik} = \ddot{D}_{1k}\ddot{D}_{1k} + \ddot{D}_{2k}\ddot{D}_{2k} + \ddot{D}_{3k}\ddot{D}_{3k} \\
&= \ddot{D}_{11}\ddot{D}_{11} + \ddot{D}_{12}\ddot{D}_{12} + \ddot{D}_{13}\ddot{D}_{13} \\
&\quad + \ddot{D}_{21}\ddot{D}_{21} + \ddot{D}_{22}\ddot{D}_{22} + \ddot{D}_{23}\ddot{D}_{23} \\
&\quad + \ddot{D}_{31}\ddot{D}_{31} + \ddot{D}_{32}\ddot{D}_{32} + \ddot{D}_{33}\ddot{D}_{33} \\
&= (\ddot{D}_{11})^2 + 2(\ddot{D}_{12})^2 + 2(\ddot{D}_{13})^2 \\
&\quad + (\ddot{D}_{22})^2 + 2(\ddot{D}_{23})^2 + (\ddot{D}_{33})^2 ,
\end{aligned}$$

já que $\ddot{D}_{ij} = \ddot{D}_{ji}$. Logo,

$$I = \frac{G}{45c^5} (\ddot{D}_{ik})^2 . \quad (176)$$

A Eq. (176) representa a energia irradiada por um sistema gravitacional em todas as direções. Uma aplicabilidade da Eq. (176) é o estudo da energia irradiada por binárias. Ele foi usado no trabalho fundamental de Hulse e Taylor (HULSE; TAYLOR, 1975) que detectou indiretamente as ondas gravitacionais. Assim, damos a devida importância a esse estudo na sequência.

3.4.1 Energia Irradiada por Binárias

Consideremos um sistema binário com massas m_1 e m_2 com órbita circular de raio a , no plano xy . Este sistema é equivalente a descrever um corpo com massa reduzida,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad (177)$$

com velocidade angular ω . Tomemos as coordenadas dessa massa:

$$x_1 = a \cos(\omega t) , \quad x_2 = a \sin(\omega t) , \quad x_3 = 0 . \quad (178)$$

Com (178) e $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$, podemos encontrar as componentes não nulas do tensor momento de quadrupolo. Para isso, escrevemos a densidade de massa em função da massa reduzida e de deltas que localizam a massa,

$$\rho(\vec{x}') = \mu \delta(x'_1 - x_1) \delta(x'_2 - x_2) \delta(x'_3 - x_3) . \quad (179)$$

Ao substituir a Eq. (179) em (159), os deltas selecionarão apenas as coordenadas x_1 e x_2 . Estas são as coordenadas não nulas, como exposto em (178). Portanto, teremos:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \mu a^2 [2 \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)] . \\
D_{22} &= \mu a^2 [2 \sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)] . \\
D_{12} &= D_{21} = \mu a^2 [3 \sin(\omega t) \cos(\omega t)] . \\
D_{33} &= -\mu a^2 .
\end{aligned}$$

Calculando a derivada temporal terceira das componentes acima, temos:

$$\ddot{D}_{11} = 24\mu a^2 \omega^3 [\sin(\omega t) \cos(\omega t)] = -\ddot{D}_{22} . \quad (180)$$

$$\ddot{D}_{12} = -12\mu a^2 \omega^3 [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)] . \quad (181)$$

E,

$$\ddot{D}_{33} = 0 .$$

Para calcular a potência emitida num período, tomamos a média da Eq. (176) e levamos em conta os termos não nulos de $(\ddot{D}_{ik})^2$. Temos:

$$I = \left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{G}{45c^5} \left\langle (\ddot{D}_{11})^2 + (\ddot{D}_{22})^2 + 2(\ddot{D}_{12})^2 \right\rangle . \quad (182)$$

Substituindo (180) e (181) em (182):

$$\begin{aligned}
\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle &= \frac{G}{45c^5} (12\mu a^2 \omega^3)^2 \left\langle 4 [\sin(\omega t) \cos(\omega t)]^2 + 4 [\sin(\omega t) \cos(\omega t)]^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]^2 \right\rangle ,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{G}{45c^5} (12\mu a^2 \omega^3)^2 \left\langle 8 [\sin(\omega t) \cos(\omega t)]^2 + 2 [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]^2 \right\rangle . \quad (183)$$

A seguir, calcularemos a média dos termos envolvendo senos e cossenos em um período $T = 2\pi/\omega$ de oscilação. Primeiro consideramos

$$\langle \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) dt .$$

Como:

$$\sin(2\omega t) = 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t),$$

então,

$$\sin^2(2\omega t) = 4 \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t).$$

Logo,

$$\langle \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T \sin^2(2\omega t) dt.$$

Fazendo $2\omega t = u$, e $du = 2\omega dt$,

$$\langle \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{16\omega T} \int_0^{2\omega T} (1 - \cos 2u) du = \frac{1}{16\omega T} \left[u \Big|_0^{2\omega T} - \frac{\sin 2u}{2} \Big|_0^{2\omega T} \right].$$

Como $2\omega T = 4\pi$, temos:

$$\langle \sin^2(\omega t) \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{8}. \quad (184)$$

A seguir, calculamos a média temporal do termo envolvendo

$$[\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]^2 = \cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t) - 2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t).$$

Como,

$$[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]^2 = \cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t) + 2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) = 1,$$

temos:

$$\cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t) = 1 - 2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]^2 &= [1 - 2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t)] - 2 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) \\ &= 1 - 4 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]^2 \rangle = \langle 1 - 4 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) \rangle,$$

o que é extremamente útil, pois o valor médio de $\cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t)$ já foi calculado em (184). Assim,

$$\langle 1 - 4 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [1 - 4 \cos^2(\omega t) \sin^2(\omega t)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt - 4 \left(\frac{1}{8} \right),$$

i.e.

$$\langle [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)]^2 \rangle = (1) - \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \quad (185)$$

Agora, substituindo (184) e (185) em (183), encontramos:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= -\frac{G}{45c^5} (12\mu a^2 \omega^3)^2 \left\langle 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \right) \right\rangle \\ &= -\frac{288G}{45c^5} (\mu a^2 \omega^3)^2. \end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32G\mu^2 a^4 \omega^6}{5c^5}. \quad (186)$$

A Eq. (186) é a potência irradiada por um sistema binário. Foi observando o pulsar binário PSR1913+16 que Hulse e Taylor (HULSE; TAYLOR, 1975) conseguiram uma prova indireta da existência das ondas gravitacionais: o aumento da frequência angular da órbita estava de acordo com o valor predito pela perda de energia pela emissão de radiação gravitacional.

O estudo realizado das OGs na RG servem de modelo estrutural para o estudo das mesmas na gravitação modificada. Assim, na próxima seção, iniciaremos a construção das equações de campo do modelo Starobinsky de ordem superior e, posteriormente, a linearização das equações de campo, para, então, estudarmos as OGs neste contexto mais geral.

4 ONDAS GRAVITACIONAIS NO MODELO DE STAROBINSKY DE ORDEM SUPERIOR

A Relatividade Geral é uma teoria não renormalizável, assim, possui problemas quando da sua quantização. Esta condição originou estudos na busca de uma teoria gravitacional que possuísse um sistema renormalizável, justificado pela construção de uma teoria de gravitação quântica. Esta inspiração levou ao estudo de diversos modelos gravitacionais, que são construídos acrescentando termos de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert. O trabalho de Stelle mostrou que as ações que incluem termos quadráticos da curvatura são renormalizáveis, porém, o preço a ser pago é a introdução de instabilidades do tipo ghost (STELLE, 1977). O nosso estudo não é aplicado em um contexto de gravidade quântica. Estamos interessados em um modelo de gravitação modificada em uma abordagem de teoria efetiva. Ainda assim, a renormalizabilidade é uma característica desejável em modelos alternativos à RG. O nosso estudo se concentra em um desses modelos alternativos à RG.

Com a discussão acima, sobre a renormalizabilidade no estudo de Stelle, temos que o termo quadrático mais simples a ser acrescentado na ação de Einstein-Hilbert é o termo R^2 , conhecido no campo da cosmologia como a contribuição de Starobinsky. O modelo de Starobinsky tem sido o principal candidato à descrição do universo primordial inflacionário. Assim, torna-se bastante sugestivo trabalharmos com uma ação envolvendo esta contribuição.

Se, pelo lado do estudo do universo primordial, temos o modelo de Starobinsky como uma proposta atrativa, na outra ponta da linha temporal, modelos do tipo $f(R, \nabla R, \dots, \nabla^n R)$ – vide-se, e.g. (CUZINATTO et al., 2016; 2019a; 2019b) – podem ajudar no estudo do universo atual e sua expansão acelerada, ou seja, esses modelos à derivadas superiores podem representar um avanço na compreensão da natureza que envolve a energia escura (CUZINATTO et al., 2010; 2015). Portanto, um estudo das ondas gravitacionais incluindo as contribuições de Starobinsky e de derivadas de ordem superior na ação faz-se intrigante e promissor. Esse tipo de modelo são bem motivados do ponto de vista de teorias de calibre para a gravitação (CUZINATTO et al., 2008) e tem sido empregado em soluções de buracos negros, expandindo ainda mais os estudos astrofísicos do modelo de Starobinsky de ordem superior (SILVA NETO; MEDEIROS, 2020).

Neste trabalho, inspirados pela discussão acima, buscamos uma solução para OGs no modelo de Starobinsky de ordem superior, que é a teoria efetiva estudada nesta dissertação. O roteiro de cálculos é guiado pelos procedimentos estabelecidos na RG e discutidos na Seção 3. Na próxima subseção deduzimos as equações de campo de Starobinsky de ordem superior via a integral de ação. Na sequência trabalhamos na aproximação de campo fraco e a construção das ondas gravitacionais na gravitação de Starobinsky de ordem superior.

Iniciemos com a dedução das equações de campo de Starobinsky de ordem superior.

4.1 EQUAÇÕES DE CAMPO DE STAROBINSKY DE ORDEM SUPERIOR

Na formulação das equações de Einstein, partimos de uma ação conhecida como ação de Einstein-Hilbert. Essa ação foi proposta por David Hilbert em 1915, mas leva o nome de Einstein, por obviedade, devido à sua indeclinável importância. A ação desacoplada do tensor de energia-momento, é descrita como:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (187)$$

Os índices EH são as iniciais de Einstein-Hilbert.

As ações de ordem superior são geradas a partir da substituição do escalar de curvatura presente na ação (187) por uma combinação de outros invariantes de curvatura. Em 1980, Starobinsky introduziu um termo R^2 na ação de Einstein-Hilbert (STAROBINSKY, 1980) com vistas às aplicações na cosmologia, transformando a ação para

$$S_{\text{EHS}} = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 \right), \quad (188)$$

onde o rótulo EHS é para representar que a ação é a de Einstein-Hilbert com o termo extra proposto por Starobinsky. Em alguns trabalhos recentes, outros termos importantes para generalizações da ação de Einstein-Hilbert foram propostos, como aqueles no trabalho (CUZINATTO et al., 2019), que sugere uma ação do tipo

$$S_{\text{EHSP}} = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right), \quad (189)$$

onde κ_0 e β_0 são constantes de acoplamento e o índice EHSP denota Einstein-Hilbert-Starobinsky-Podolsky. O último termo em S_{EHSP} é inspirado pela eletrodinâmica generalizada de Podolsky (PODOLSKY; SCHWED, 1948) e pela invariância de calibre no contexto gravitacional (CUZINATTO et al., 2008).²¹

Para encontrar as equações de campo é necessário minimizar a ação S_{EHSP} com respeito ao tensor métrico $g^{\mu\nu}$. A minimização pode ser realizada termo a termo: o primeiro termo em parênteses nos dá as equações de Einstein, que já foram deduzidas em seção anterior (vide 2.6.2). Escrevemos:

²¹O termo de matéria será incluso ao fim das deduções.

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{EHSP}} = & \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R) - \frac{1}{2\chi} \int d^4x \delta\left(\sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa_0} R^2\right) \\ & + \frac{1}{2\chi} \int d^4x \delta\left(\sqrt{-g} \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R\right). \end{aligned} \quad (190)$$

Podemo-nos preocupar apenas com os termos excedentes da generalização da RG separadamente.

Começemos pela contribuição de Starobinsky, dada pelo segundo termo do lado direito da Eq. (190). A variação em sua ação é dada por:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}) R^2 + \sqrt{-g} \delta(R^2)]. \quad (191)$$

Na Eq. (191), é necessária a variação de $\sqrt{-g}$, que está expressa abaixo:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (192)$$

Ao aplicar a relação (192) à (191), temos:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int \frac{1}{2\kappa_0} d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 (\delta g^{\mu\nu}) + 2R R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + 2R g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \right]. \quad (193)$$

O único termo que calcularemos na minimização acima é $2R g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu})$, pois é o único termo que não apresenta a variação explícita do tensor métrico, $(\delta g^{\mu\nu})$. Para isso, é necessário calcular $\delta(R_{\mu\nu})$, e usaremos a identidade de Palatini para este fim. A identidade de Palatini pode ser encontrada em Ryder (2009), e é expressa por:

$$\delta(R_{\mu\nu}) = \nabla_\alpha \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu \delta(\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha). \quad (194)$$

A identidade de Palatini ainda não apresenta $\delta g^{\mu\nu}$ de forma explícita; por essa razão, faz-se necessário o cálculo da variação dos símbolos de Christoffel. Essa dedução é feita em detalhes no Apêndice F — o cálculo seguiu os passos de Ryder (2009). A variação dos símbolos de Christoffel é dada por:

$$\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu \delta(g_{\nu\beta}) + \nabla_\nu \delta(g_{\beta\mu}) - \nabla_\beta \delta(g_{\mu\nu})]. \quad (195)$$

Observamos que a Eq. (195) está em função da variação do tensor métrico covariante; por outro lado, buscamos a variação do tensor métrico contravariante. Para isso, podemos usar

a relação:

$$\delta(g_{\mu\sigma}) = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta(g^{\rho\nu}) . \quad (196)$$

A relação (196) é útil pois, em conjunto com a Eq. (195), coloca a identidade de Palitini (194) na forma:

$$\begin{aligned} \delta(R_{\mu\nu}) = & -\frac{1}{2}\nabla_\alpha \{ [g_{\nu\rho}\nabla_\mu\delta(g^{\rho\alpha}) + g_{\sigma\mu}\nabla_\nu\delta(g^{\alpha\sigma}) - g^{\alpha\beta}g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}\nabla_\beta\delta(g^{\rho\sigma})] \} \\ & + \frac{1}{2}\nabla_\nu \{ [g_{\sigma\beta}\nabla_\mu\delta(g^{\beta\sigma}) + g_{\sigma\mu}\nabla_\alpha\delta(g^{\alpha\sigma}) - g_{\mu\rho}\nabla_\beta\delta(g^{\rho\beta})] \} . \end{aligned} \quad (197)$$

O termo que aparece na Eq. (193) é $g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu})$. A contração de (197) com $g^{\mu\nu}$ resulta em simplificações por renomeações de índices mudos, e, por consequência, a identidade reduzida é:

$$g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}) = \square g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta(g^{\mu\nu}) . \quad (198)$$

Com a Eq. (198), a Eq. (193) escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta S_S = & \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 + 2RR_{\mu\nu} \right) \delta(g^{\mu\nu}) \right. \\ & \left. + 2 \int d^4x \sqrt{-g} [R \square g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) - R\nabla_\mu\nabla_\nu\delta(g^{\mu\nu})] \right\} . \end{aligned}$$

A segunda integral na equação acima possui termos de superfícies que não contribuem para a equação de movimento e termos que se anulam em renomeações de índices. A dedução detalhada dessa etapa está no Apêndice F. Por fim, teremos:

$$\begin{aligned} \delta S_S = & \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa_0} 2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) \right. \\ & \left. + 2(\square R)g_{\mu\nu} - 2(\nabla_\nu\nabla_\mu R) \right\} \delta(g^{\mu\nu}) . \end{aligned} \quad (199)$$

O termo associado a Podolsky é o terceiro termo do lado direito da Eq. (190). O procedimento de variação é análogo ao do termo associado a Starobinsky, e também se encontra no Apêndice F. Escrevendo o termo de Podolsky isoladamente, temos:

$$\delta S_P = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \delta \left(\sqrt{-g} \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right) . \quad (200)$$

Um resultado parcial da variação da Eq. (200) é dado por:

$$\begin{aligned} \delta S_P = & \frac{1}{2\chi} \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) (g^{\rho\sigma} \nabla_\rho R \nabla_\sigma R) \right. \\ & \left. + (\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\mu R \nabla_\nu R + 2g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu \delta R) \right\} . \end{aligned} \quad (201)$$

O último termo da Eq. (201) possui integrais de superfície. O procedimento para o cálculo deste termo assemelha-se com aquele para o termo associado a Starobinsky. Depois dessa última etapa, podemos escrever a forma final para a variação do termo associado a Podolsky:

$$\begin{aligned} \delta S_P = & \frac{1}{2\chi} \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma R \nabla_\sigma R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2 \square R R_{\mu\nu} \right. \\ & \left. - 2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R \right) \delta g^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (202)$$

Após os cálculos separados de termo a termo, é necessário reagrupá-los em uma única equação e acoplá-los à lagrangiana de matéria, que por definição nos dá o tensor de energia-momento. A ação em sua totalidade é dada por:

$$S = S_{\text{EHSP}} + S_m = \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) .$$

Temos:

$$\delta S = \delta S_{\text{EHSP}} + \delta S_m = \delta S_{\text{EH}} + \delta S_S + \delta S_P + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} ,$$

onde

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} .$$

Ao usarmos os resultados preliminares — e.g. (81), (199) e (202) — temos a plenitude das equações de campo de Starobinsky-Podolsky:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa_0} \left[2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2(g_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu) R \right] \\ + \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \left(-\frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma R \nabla_\sigma R + 2\nabla_\mu R \nabla_\nu R - \square R R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square^2 R + \nabla_\mu \nabla_\nu \square R \right) = \chi T_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (203)$$

Definimos:

$$H_{\mu\nu} \equiv 2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2(g_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu) R , \quad (204)$$

e

$$I_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\sigma R\nabla_\sigma R + \nabla_\mu R\nabla_\nu R - 2\Box RR_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\Box^2 R + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Box R. \quad (205)$$

Assim, reescrevemos a equação de campo do modelo de Starobinsky de ordem superior na forma compacta:

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa_0}H_{\mu\nu} + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2}I_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \quad (206)$$

Investigaremos se essas equações de campo admitem uma solução do tipo ondas gravitacionais. Começamos essa tarefa linearizando (206) na próxima seção.

4.2 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

O procedimento da linearização das equações de campo foi abordado na Seção 2.6.1 no caso da RG, e aqui segue procedimento semelhante. Inicialmente, escrevemos o tensor de Ricci e o escalar de curvatura em função de $\bar{h}_{\mu\nu}$. Da Eq. (94):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (207)$$

$$\bar{h} = -h, \quad (208)$$

e

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (209)$$

Substituindo a Eq. (209) em (92), temos:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\partial_\rho\partial_\nu\bar{h}_\mu^\rho + \partial_\mu\partial_\rho\bar{h}_\nu^\rho - \partial_\rho\partial^\rho\left(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}\right)\right]. \quad (210)$$

O escalar de curvatura associado é:

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left[\partial_\rho\partial_\nu\bar{h}_\mu^\rho + \partial_\mu\partial_\sigma\bar{h}_\nu^\sigma - \partial_\rho\partial^\rho\left(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}\right)\right].$$

Assim,

$$R = \partial_\mu\partial_\nu\bar{h}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\bar{h}. \quad (211)$$

Com as Eqs. (210) e (211), podemos linearizar as equações de campo de Starobinsky-Podolsky. A linearização é feita termo a termo de acordo com a Eq. (206). Iniciamos com o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

Utilizando as Eqs. (210) e (211) nas equações de Einstein, teremos produtos de ordem superior em h que serão negligenciados devido à expansão da métrica até ordem linear; ademais, observamos que os termos dependentes do traço de $h_{\mu\nu}$ se cancelam. Assim:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\rho \partial_\nu \bar{h}_\mu^\rho + \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho - \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma}]. \quad (212)$$

O termo de Starobinsky é dado pela Eq. (204):

$$H_{\mu\nu} = 2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) + 2(g_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu) R.$$

Os termos multiplicativos $RR_{\mu\nu}$ e R^2 são termos de ordem superior em $h_{\mu\nu}$, $\mathcal{O}(h^2)$, e, por essa razão, serão negligenciados:

$$H_{\mu\nu} = 2(\eta_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu) R.$$

Substituindo (211) neste resultado, obtemos:

$$H_{\mu\nu} = 2(\eta_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu) \left[\partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h} \right]. \quad (213)$$

Um ponto crucial para entender o próximo passo é o de que a derivada covariante é definida por um termo de derivada parcial mais termos que envolvem a conexão, e esta, por sua vez, é definida por derivadas da métrica. Com isso, a ação da conexão encapsulada no operador $(\eta_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu)$ sobre os termos que se encontram em colchetes na Eq. (213) serão de ordem superior em $\bar{h}_{\mu\nu}$. Isso significa que as derivadas covariantes na linearização podem ser escritas apenas como derivadas ordinárias. Portanto, a linearização do termo de Starobinsky pode ser escrita como:

$$H_{\mu\nu} = 2[\eta_{\mu\nu} (\eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma) - \partial_\nu \partial_\mu] \left(\partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h} \right). \quad (214)$$

Por último, a linearização do termo de Podolsky segue o mesmo procedimento aplicado ao termo associado a Starobinsky. Da Eq. (205),

$$I_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu} \nabla^\sigma R \nabla_\sigma R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2 \square R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R,$$

e de nossas observações anteriores, temos que os três primeiros termos resultam em parcelas de ordem superior sendo, novamente, negligenciados. Logo:

$$I_{\mu\nu} = -2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R.$$

Lembrando que, na teoria linearizada, a métrica em produto com $\square^2 R$ contribui apenas com a métrica de Minkowski e notando que, nessas circunstâncias, as derivadas covariantes operam como derivadas parciais, podemos colocar em evidência no lado direito da equação acima o D'Alembertiano do escalar de curvatura e o sinal negativo em evidência no lado esquerdo. Este procedimento mostra que o mesmo operador ($\eta_{\mu\nu} \square - \nabla_\nu \nabla_\mu$) aparece tanto na contribuição de Starobinsky quanto na contribuição de Podolsky. No caso de Starobinsky o operador atua no escalar de curvatura, já no caso de Podolsky, o operador atua no D'Alembertiano do escalar de curvatura. Assim:

$$I_{\mu\nu} = -2(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu)(\square R). \quad (215)$$

Substituindo a Eq. (211) em $I_{\mu\nu}$ e escrevendo os D'Alembertianos como derivadas ordinárias, vem:

$$I_{\mu\nu} = -2[\eta_{\mu\nu}(\eta^{\lambda\tau}\partial_\lambda\partial_\tau) - \partial_\mu\partial_\nu] \left[\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \left(\partial_\rho\partial_\sigma\bar{h}^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\rho\partial^\rho\bar{h} \right) \right]. \quad (216)$$

Por fim, substituindo (212), (214) e (216) em (206), encontramos as equações de campo linearizadas completas para o modelo de Starobinsky de ordem superior:

$$\begin{aligned} & (\partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} + \partial_\mu\partial^\sigma\bar{h}_{\nu\sigma} - \partial_\rho\partial^\rho\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma}) \\ & + \frac{2}{\kappa_0} [\eta_{\mu\nu}(\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma) - \partial_\nu\partial_\mu] \left(\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\eta_{\rho\sigma}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h} \right) \\ & - \frac{2\beta_0}{\kappa_0^2} [\eta_{\mu\nu}(\eta^{\lambda\tau}\partial_\lambda\partial_\tau) - \partial_\mu\partial_\nu] \left[\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \left(\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\partial_\rho\partial^\rho\bar{h} \right) \right] = 2\chi T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (217)$$

A Eq. (217) possui derivadas de sexta ordem. Para encontrar a sua solução, optamos pela decomposição escalar-tensorial. Buscamos, assim, uma redução da ordem das derivadas que aparecem na equação com intuito de facilitar a sua resolução. O procedimento será analisado na próxima seção.

4.3 DECOMPOSIÇÃO ESCALAR-TENSORIAL DO CAMPO LINEARIZADO

A Eq. (217), é escrita em função do tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ covariante. Podemos tomar o seu traço, o que conduz à:

$$\begin{aligned}
& (\partial^\rho \partial^\mu \bar{h}_{\mu\rho} + \partial^\nu \partial^\sigma \bar{h}_{\nu\sigma} - \partial_\rho \partial^\rho \bar{h} - 4\partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma}) \\
& + \frac{2}{\kappa_0} (3\Box) \left(\partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h} \right) \\
& - \frac{2\beta_0}{\kappa_0^2} (3\Box) \left[\Box \left(\partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h} \right) \right] = 2\chi T,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
& - \Box \bar{h} - 2\partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{6}{\kappa_0} \Box \left[\partial^\rho \partial^\sigma \left(\bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \bar{h} \right) \right] \\
& - \frac{6\beta_0}{\kappa_0^2} \Box^2 \left[\partial^\rho \partial^\sigma \left(\bar{h}_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \bar{h} \right) \right] = 2\chi T, \tag{218}
\end{aligned}$$

onde $\Box = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

Com o intuito de reduzir a ordem das derivadas das Eqs. (218) e (217), definiremos um novo campo escalar Φ proporcional ao escalar de curvatura R :

$$K_2 \kappa_0 \Phi \equiv R = \partial^\mu \partial^\nu \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \right), \tag{219}$$

onde K_2 é uma constante a ser determinada. É útil definirmos outro campo escalar, Ψ , como o D'Alembertiano do escalar de curvatura, pois, a equação linearizada de sexta ordem é dependente tanto do escalar de curvatura quanto do D'Alembertiano do escalar de curvatura, devido às contribuições de Starobinsky e a de Podolsky. Portanto:

$$K_2 \kappa_0^2 \Psi \equiv K_2 \kappa_0 \Box \Phi = \Box R = \Box \partial^\mu \partial^\nu \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \right), \tag{220}$$

tal que:

$$\kappa_0 \Psi \equiv \Box \Phi. \tag{221}$$

Com as Eqs. (219) e (220), conseguimos escrever a Eq. (217) em função dos novos campos escalares:

$$\begin{aligned}
& \Box \bar{h}_{\mu\nu} + [\eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\nu\sigma}] + \frac{2}{\kappa_0} [\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \Box] (K_2 \kappa_0 \Phi) \\
& - \frac{2\beta_0}{\kappa_0^2} [\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \Box] (K_2 \kappa_0^2 \Psi) = -2\chi T_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Podemos reagrupar melhor os últimos termos do lado esquerdo da equação, obtendo:

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{\mu\nu} + [\eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\nu\sigma}] \\ + 2K_2 [(\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi - \beta_0 \Psi)] = -2\chi T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (222)$$

Se, neste ponto, aplicássemos o calibre harmônico da RG, $\partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} = 0$, então, a primeira linha reduziria-se ao lado direito da equação de onda, Eq. (102); ainda assim, a nosso modelo de gravidade modificada prevê a contribuição dos modos escalares Φ e Ψ . Uma outra diferença: adiante aplicaremos o calibre harmônico generalizado, que é diferente de $\partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} = 0$.

Por outro lado, a equação do traço (218) transforma-se em:

$$\square \bar{h} + 2\partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - 6K_2 \square (\Phi - \beta_0 \Psi) = -2\chi T. \quad (223)$$

Passamos, agora, a efetuar a decomposição de $\bar{h}_{\mu\nu}$ em função dos escalares Ψ e Φ e também do modo tensorial $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Para isso, introduzimos novas constantes arbitrárias, K_1 e K_3 , que serão determinadas futuramente com o objetivo de simplificar os resultados. Essa é a decomposição escalar-tensorial que dá título à esta seção e escreve-se:²²

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - K_1 \eta_{\mu\nu} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi), \quad (224)$$

com traço,

$$\bar{h} = \tilde{h} - 4K_1 (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi), \quad (225)$$

onde \tilde{h} é o traço de $\tilde{h}_{\mu\nu}$.

Inspirados no artigo de Accioly et al. (ACCIOLY, A. et al., 2017) impomos o calibre harmônico sobre o campo $\tilde{h}_{\mu\nu}$, ao contrário do que acontece na RG, onde o calibre harmônico é aplicado em $\bar{h}_{\mu\nu}$. Com isso, temos:

$$\partial_\mu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (226)$$

A atingibilidade deste calibre harmônico generalizado encontra-se no Apêndice G.

Substituindo as Eqs. (224) e (225) em (211), encontramos uma equação para o escalar de curvatura em função dos campos escalares Φ e Ψ e do modo spin dois $\tilde{h}_{\mu\nu}$, dada por:

$$R = \partial^\mu \partial^\nu \left\{ \left[\tilde{h}_{\mu\nu} - K_1 \eta_{\mu\nu} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \right] + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left[\tilde{h} - 4K_1 (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \right] \right\}. \quad (227)$$

²²Uma abordagem alternativa aparece na referência de Teyssandier (TEYSSANDIER, 1989).

Distribuindo as derivadas termo a termo e usando o calibre (226):

$$\begin{aligned}
R &= -K_1 \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \left[\tilde{h} - 4K_1 (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \right] \\
&= -K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) + \frac{1}{2} \square \tilde{h} - 2K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \\
&= \frac{1}{2} \square \tilde{h} - 3K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) .
\end{aligned}$$

Por outro lado, conforme (219),

$$K_2 \kappa_0 \Phi = \frac{1}{2} \square \tilde{h} - 3K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) ,$$

ou,

$$\square \tilde{h} = 2K_2 \kappa_0 \Phi + 6K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) . \quad (228)$$

Assim, obtemos o D'Alembertiano do traço do modo tensorial em função dos campos escalares Φ e Ψ . Essa equação será útil para a equação do traço do tensor energia-momento, como veremos abaixo.

Usando (224) e (225), reescreveremos a Eq. (223) em função do traço do modo tensorial de $\tilde{h}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
-2\chi T &= \square \left[\tilde{h} - 4K_1 (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \right] + 2\partial^\mu \partial^\nu \left[\tilde{h}_{\mu\nu} - K_1 \eta_{\mu\nu} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \right] \\
&\quad - 6K_2 \square (\Phi - \beta_0 \Psi) \\
&= \square \tilde{h} - 4K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) - 2K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) - 6K_2 \square (\Phi - \beta_0 \Psi) ,
\end{aligned}$$

i.e.

$$-2\chi T = \square \tilde{h} - 6K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) - 6K_2 \square (\Phi - \beta_0 \Psi) , \quad (229)$$

que é a Eq. (223) escrita em termos dos modos escalares e tensorial. Com (228), isso dá:

$$\begin{aligned}
-2\chi T &= 2K_2 \kappa_0 \Phi + 6K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \\
&\quad - 6K_1 \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) - 6K_2 \square (\Phi - \beta_0 \Psi) \\
&= 2K_2 \kappa_0 \Phi - 6K_2 \square (\Phi - \beta_0 \Psi) .
\end{aligned}$$

de onde obtemos:

$$\square (\Phi - \beta_0 \Psi) - \frac{\kappa_0}{3} \Phi = \frac{\chi}{3K_2} T. \quad (230)$$

Ademais, podemos reescrever a Eq. (222) utilizando (224) e (225). Veja:

$$\begin{aligned} -2\chi T_{\mu\nu} &= \square \bar{h}_{\mu\nu} + [\eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial^\sigma \bar{h}_{\nu\sigma}] \\ &\quad + 2K_2 [(\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi - \beta_0 \Psi)] \\ -2\chi T_{\mu\nu} &= \square [\tilde{h}_{\mu\nu} - K_1 \eta_{\mu\nu} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi)] + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma [\tilde{h}_{\rho\sigma} - K_1 \eta_{\rho\sigma} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi)] \\ &\quad - \partial^\rho \partial_\nu [\tilde{h}_{\mu\rho} - K_1 \eta_{\mu\rho} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi)] - \partial_\mu \partial^\sigma [\tilde{h}_{\nu\sigma} - K_1 \eta_{\nu\sigma} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi)] \\ &\quad + 2K_2 [(\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi - \beta_0 \Psi)]. \end{aligned}$$

Devido à Eq. (226), a equação acima se reduz para:

$$\begin{aligned} -2\chi T_{\mu\nu} &= \square \tilde{h}_{\mu\nu} - K_1 \eta_{\mu\nu} \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) - K_1 \eta_{\mu\nu} \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \\ &\quad + K_1 \partial_\mu \partial_\nu (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) + K_1 \partial_\mu \partial_\nu (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \\ &\quad + 2K_2 [(\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi - \beta_0 \Psi)] \\ -2\chi T_{\mu\nu} &= \square \tilde{h}_{\mu\nu} - 2K_1 \eta_{\mu\nu} \square (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) \\ &\quad + 2K_1 \partial_\mu \partial_\nu (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) + 2K_2 [(\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi - \beta_0 \Psi)] \\ -2\chi T_{\mu\nu} &= \square \tilde{h}_{\mu\nu} + 2K_1 [(\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi)] \\ &\quad + 2K_2 [(\partial_\nu \partial_\mu - \eta_{\mu\nu} \square) (\Phi - \beta_0 \Psi)]. \end{aligned} \quad (231)$$

Conseguimos observar na equação acima que os dois últimos termos possuem a mesma forma, exceto pela diferença de constantes arbitrárias. Conseguimos fixar as constantes K_1 , K_2 e K_3 de modo a ter uma simplificação da Eq. (231). De fato, com as escolhas

$$K_1 = -K_2 \quad \text{e} \quad K_3 = -1, \quad (232)$$

a Eq. (231) assume a forma tradicional para a equação de onda do campo de spin dois:

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = -2\chi T_{\mu\nu}. \quad (233)$$

A equação acima possui a mesma forma funcional da Eq. (102); ela encapsula, em sua forma, a polarização das ondas gravitacionais estudadas no regime da RG. Assim, o modo tensorial das OGs no modelo de Starobinsky de ordem superior são capazes de reaver as características

das OGs previamente estudadas na Seção 3. A diferença do nosso modelo para a RG aparece na polarização adicional associada aos modos escalares.

A Eq. (230), em seu lado esquerdo, possui dependência dos dois campos escalares Φ e Ψ . Porém, conseguimos usar a relação entre os campos escalares para reescrever a Eq. (230) sem a dependência explícita de um deles. Para tanto, aplicamos um D'Alembertiano na Eq. (221), reorganizando a equação e temos:

$$\square\Psi = \frac{1}{\kappa_0} \square^2 \Phi. \quad (234)$$

Substituindo a Eq. (234) em (230), obtemos uma equação para o modo escalar sem dependência explícita de Ψ :

$$\frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \square^2 \Phi - \frac{1}{\kappa_0} \square \Phi + \frac{1}{3} \Phi = -\frac{\chi}{3\kappa_0 K_2} T. \quad (235)$$

A decomposição escalar-tensorial realizada a fim de reduzir o grau das derivadas da Eq. (217) fornece-nos o conjunto de equações diferenciais dado por (233) e (235):

$$\begin{cases} \square \tilde{h}_{\mu\nu} = -2\chi T_{\mu\nu} \\ \frac{\beta_0}{\kappa_0^2} \square^2 \Phi - \frac{1}{\kappa_0} \square \Phi + \frac{1}{3} \Phi = -\frac{\chi}{3\kappa_0 K_2} T \\ \partial_\nu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0 \end{cases}. \quad (236)$$

Recapituando: após trabalharmos com as equações de campo de Starobinsky-Podolsky linearizadas e obtermos uma equação diferencial de sexta ordem, introduzimos dois campos escalares que, com o auxílio do calibre harmônico para o modo spin dois, levam à uma separação destas equações. Esta separação é vista no conjunto (236), onde temos uma equação para o modo tensorial de spin dois, suplementada pelo calibre harmônico, e uma equação diferencial de quarta ordem dependente apenas do modo escalar Φ . A ordem da equação para o modo escalar nos motiva a uma nova decomposição e conseqüente redução de ordem da equação diferencial associada. Para isso, comecemos introduzindo um ansatz em que a equação diferencial para Φ assume a forma:

$$\left(\frac{\square}{\kappa_0} - K_- \right) \left(\beta_0 \frac{\square}{\kappa_0} - K_+ \right) \Phi = -\frac{\chi}{3\kappa_0 K_2} T, \quad (237)$$

de tal forma que as constantes K_+ e K_- sejam tais que a segunda equação do conjunto (236) e a Eq. (237) sejam iguais. Fazendo as operações distributivas na Eq. (237),

$$\beta_0 \frac{\square^2}{\kappa_0^2} \Phi - \frac{1}{\kappa_0} (K_+ + \beta_0 K_-) \square \Phi + (K_- K_+) \Phi = -\frac{\chi}{3\kappa_0 K_2} T,$$

e comparando com a segunda equação presente em (236), obtemos:

$$\begin{cases} K_+ + \beta_0 K_- = 1 \\ K_- K_+ = \frac{1}{3} \end{cases} . \quad (238)$$

Resolvendo o sistema (238), conseguimos obter, fazendo escolha adequada de sinal:

$$K_- = \frac{1}{2\beta_0} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}\beta_0} \right] . \quad (239)$$

$$K_+ = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3}\beta_0} \right] . \quad (240)$$

A Eq. (237) possui dependência explícita apenas em Φ e é de quarta ordem. Conseguimos, porém, introduzir outro campo escalar para reduzir a ordem da equação diferencial. Quando assim o fazemos, encontramos equações do tipo Klein-Gordon com fonte para os dois novos campos. Uma das equações terá o traço do tensor de energia momento como fonte; e, a outra equação terá um dos campos escalares como fonte. Isso tudo será explicitado à seguir.

O procedimento inicia-se com as seguintes definições:

$$\Phi \equiv \Phi_+ , \quad (241)$$

e

$$\left(\beta_0 \frac{\square}{\kappa_0} - K_+ \right) \Phi_+ \equiv \Phi_- . \quad (242)$$

Com (241) e (242), a Eq. (237) se transforma para:

$$\left(\frac{\square}{\kappa_0} - K_- \right) \Phi_- = -\frac{\chi}{3\kappa_0 K_2} T . \quad (243)$$

A Eq. (242) pode ser reorganizada como:

$$(\square - m_+^2) \Phi_+ = \frac{\kappa_0}{\beta_0} \Phi_- , \quad (244)$$

onde definimos:

$$m_+^2 \equiv \frac{\kappa_0}{\beta_0} K_+ . \quad (245)$$

Ademais, o procedimento para Eq. (243) é semelhante e temos:

$$(\square - m_-^2) \Phi_- = -\frac{\chi}{3K_2} T , \quad (246)$$

se definirmos:

$$m_-^2 \equiv \kappa_0 K_- . \quad (247)$$

As Eqs. (244) e (246) são equações do tipo Klein-Gordon com fonte e encapsulam os modos massivos das OGs no modelo Starobinsky de ordem superior.

Podemos reunir as Eqs. (245) e (247) utilizando as Eqs. (239) e (240):

$$m_{\pm}^2 = \frac{\kappa_0}{2\beta_0} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}\beta_0} \right] . \quad (248)$$

Com as definições (241) e (242) de Φ_+ e Φ_- , reescrevemos $\bar{h}_{\mu\nu}$ em função dos novos campos escalares. Com efeito, usando as Eqs. (232), (234) e (241), a Eq. (224) assume a forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + K_2 \eta_{\mu\nu} \left[\Phi_+ - \frac{\beta_0}{\kappa_0} (\square \Phi_+) \right] . \quad (249)$$

Aqui, $\tilde{h}_{\mu\nu}$ é tensor transverse traceless. Isso contrasta com o que estudamos na Seção 3, onde o objeto $\bar{h}_{\mu\nu}$ é quem possui essa característica.

De (244):

$$\square \Phi_+ = \frac{\kappa_0}{\beta_0} \Phi_- + m_+^2 \Phi_+ ,$$

e substituindo em (249):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + K_2 \eta_{\mu\nu} \left[\Phi_+ - \Phi_- - \frac{\beta_0}{\kappa_0} (m_+^2) \Phi_+ \right] .$$

Usando a Eq. (248) para m_+^2 :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + K_2 \eta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}\beta_0} \right) \Phi_+ - \Phi_- \right] ,$$

de onde identificamos que $m_-^2 = \frac{\kappa_0}{\beta_0} \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4}{3}\beta_0} \right]$. Incorporando a constante K_2 na definição dos campos escalares, segue que:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \left[\frac{\beta_0}{\kappa_0} m_-^2 \Phi_+ - \Phi_- \right] . \quad (250)$$

As Eqs. (233), (244) e (246) formam as três equações fundamentais para as OGs no modelo de Starobinsky de ordem superior. São elas:²³

²³As Eqs. (251), (252) e (253) precisam, ainda, ser suplementadas pela condição de calibre harmônico para $\tilde{h}_{\mu\nu}$, i.e. $\partial_\nu \tilde{h}^{\mu\nu} = 0$.

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = -2\chi T_{\mu\nu}. \quad (251)$$

$$(\square - m_+^2) \Phi_+ = \frac{\kappa_0}{\beta_0} \Phi_-. \quad (252)$$

$$(\square - m_-^2) \Phi_- = -\frac{\chi}{3} T. \quad (253)$$

O conjunto de Eqs. (251), (252) e (253) são as equações das quais buscamos as soluções. A Eq. (251) é a componente tensorial de spin dois; ela tem a precisamente a forma da Eq. (102), portanto, a sua solução também tem a mesma forma funcional da Eq. (103):

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu}(\vec{x}', t_r). \quad (254)$$

Assim, a Eq. (251) é a responsável pela polarização das OGs, estudadas na subseção 3.2.2, e pela transversalidade da onda. Já as Eqs. (252) e (253), que são os casos massivos para as ondas gravitacionais no modelo de Starobinsky de ordem superior, serão as responsáveis por induzir deslocamentos longitudinais ao longo do eixo de propagação da onda.²⁴

Para resolvermos a Eq. (252), necessitamos, primeiro, da solução para Φ_- , e é da Eq. (253) que a obteremos. Passamos, então, a nos preocupar em solucionar a Eq. (253) na próxima seção.

4.4 SOLUÇÃO PARA O MODO ESCALAR Φ_-

Consideremos a Eq. (253). Definindo:

$$Q \equiv -\frac{\chi}{3} T, \quad (255)$$

logo,

$$(\square - m_-^2) \Phi_- = Q. \quad (256)$$

A solução de (256) é dada em termos da função de Green $G_\Phi(x^\nu; x'^\nu)$, que satisfaz a equação diferencial²⁵

$$(\square - m_-^2) G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) = \delta^4(x^\nu - x'^\nu). \quad (257)$$

²⁴Um trabalho futuro interessante seria investigar como os modos escalares Φ_+ e Φ_- relacionam-se com os campos escalares e vetoriais do equivalente escalar–multi-tensorial das teorias $f(R, \nabla R, \dots, \nabla^n R)$ explorado nos trabalhos (CUZINATTO et al., 2016) e (CUZINATTO et al., 2019b).

²⁵Estudos da função de Green envolvendo a eletrodinâmica generalizada de Podolsky, que inspirou o termo de derivada superior na ação do modelo de Starobinsky de ordem superior, aparecem no trabalho de M. Lazar (LAZAR, 2019).

Uma vez que tivermos resolvido a Eq. (257) obteremos a solução da Eq. (256) na forma:

$$\Phi_-(x^\mu) = \int G_\Phi(x^\mu; x'^\mu) Q(x'^\mu) d^4x'. \quad (258)$$

Um método para buscar a solução através da função de Green é usar a sua transformada de Fourier:

$$G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{iq_\mu(x^\mu - x'^\mu)} g_\Phi(q_\nu) d^4q. \quad (259)$$

Com a transformada de Fourier, temos o aparecimento da função $g_\Phi(q_\nu)$, que é dependente da variável de integração. É necessário encontrarmos a forma funcional de $g_\Phi(q_\nu)$. Para isso, substituímos a Eq. (259) em (257) e temos:

$$(\square - m_-^2) G_\Phi(x^\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int [-q_\mu q^\mu - m_-^2] e^{iq_\mu(x^\mu - x'^\mu)} g_\Phi(q_\nu) d^4q. \quad (260)$$

Por outro lado, precisamos da representação integral da função delta:

$$\delta^4(x^\mu - x'^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iq_\mu(x^\mu - x'^\mu)} d^4q. \quad (261)$$

Substituindo as Eqs. (260) e (261) na Eq. (257) temos que a função $g_\Phi(q_\nu)$ é satisfeita para:

$$g_\Phi(q_\nu) = \frac{1}{(2\pi)^2 [-q_\mu q^\mu - m_-^2]}. \quad (262)$$

Utilizamos a equação acima para reescrever a Eq. (259). Com isso, a função de Green é expressa por:

$$G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q e^{iq_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \frac{1}{[-q_\nu q^\nu - m_-^2]}. \quad (263)$$

Vamos, agora, avaliar a Eq. (263) em detalhes, explicitando as componentes espaciais e as temporais de q_μ e x_μ . Assim:

$$\begin{aligned} G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dq_0 d^3\mathbf{q} e^{iq_0(x^0 - x'^0)} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \frac{1}{(-q_0 q^0 - q_j q^j - m_-^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left\{ \int dq_0 e^{iq_0(x^0 - x'^0)} \frac{1}{[(q_0)^2 - \mathbf{q}^2 - m_-^2]} \right\}. \end{aligned}$$

Consideremos a integral entre chaves na equação acima:

$$I_0 = \int dq_0 e^{iq_0(x^0-x'^0)} \frac{1}{[(q_0)^2 - \mathbf{q}^2 - m_-^2]} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 e^{iq_0(x^0-x'^0)} \frac{1}{[(q_0)^2 - p^2]}, \quad (264)$$

com,

$$p^2 \equiv \mathbf{q}^2 + m_-^2. \quad (265)$$

A Eq. (264) é calculada pela fórmula integral de Cauchy e se divide em dois casos (GREINER; REINHARDT, 2003; ARFKEN; WEBER, 2007; GRIFFITHS, 2005):

(I) Para $x^0 > x'^0$, deslocam-se os polos à metade positiva do plano complexo e escolhe-se um caminho fechado dado por um semicírculo com orientação anti-horária na parte positiva do plano complexo. Desse modo, usando o teorema dos resíduos:

$$\begin{aligned} I_0 &= \oint \frac{e^{iq_0(x^0-x'^0)}}{(q_0+p)(q_0-p)} dq_0 = 2\pi i \left\{ \left[\frac{e^{iq_0(x^0-x'^0)}}{(q_0+p)} \right] \Big|_{q_0=p} + \left[\frac{e^{iq_0(x^0-x'^0)}}{(q_0-p)} \right] \Big|_{q_0=-p} \right\} \\ &= \pi i \left\{ \frac{e^{ip(x^0-x'^0)}}{p} - \frac{e^{-ip(x^0-x'^0)}}{p} \right\} = \frac{\pi i}{p} (2i) \left[\frac{e^{ip(x^0-x'^0)} - e^{-ip(x^0-x'^0)}}{2i} \right], \end{aligned}$$

i.e.

$$I_0 = -\frac{2\pi}{p} \text{sen} [p(x^0 - x'^0)]. \quad (266)$$

(II) Para $x^0 < x'^0$, a função de Green é nula, devido a razões físicas: o sinal é ligado em $t' = t$. Os polos são deslocados para a metade superior do plano complexo, localizados fora do caminho fechado na parte inferior do plano complexo. Portanto, a integral de Cauchy será zero.

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = 0. \quad (267)$$

Usando a Eq. (266) na expressão $G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu})$:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{2\pi}{p} \text{sen} [p(x^0 - x'^0)].$$

Com a relação (265), isso é o mesmo que:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\sqrt{\mathbf{q}^2 + m_-^2}} \text{sen} \left[\sqrt{\mathbf{q}^2 + m_-^2} (x^0 - x'^0) \right], \quad (268)$$

onde

$$d^3\mathbf{q} = q^2 \text{sen}\theta dq d\theta d\phi,$$

e

$$\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} = qs \cos \theta ,$$

se adotarmos o eixo z na direção do vetor \mathbf{s} , cuja magnitude é $|\mathbf{s}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = s$, teremos que o ângulo θ será o ângulo polar das coordenadas esféricas. Então,

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int q^2 \sin \theta dq d\theta d\phi \frac{e^{iqs \cos \theta}}{\sqrt{q^2 + m_-^2}} \text{sen} \left[\sqrt{q^2 + m_-^2} c\tau \right] , \quad (269)$$

onde

$$c\tau \equiv (x^0 - x'^0) = (ct - ct') . \quad (270)$$

A integral em ϕ é trivial e dá como resultado 2π , a integral em θ é solucionada com a mudança de variável $u = iqs \cos \theta$, e temos como solução $2 \frac{\text{sen}(qs)}{(qs)}$. Portanto a Eq. (269) é reescrita como:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} q dq \text{sen}(qs) \frac{\text{sen} \left[\sqrt{q^2 + m_-^2} c\tau \right]}{\sqrt{q^2 + m_-^2}} . \quad (271)$$

A solução da integral (271) para o caso particular não-massivo, ou seja, para

$$m_- = 0 , \quad (272)$$

encontra-se no Apêndice H e vale:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} [\delta(s - c\tau) - \delta(s + c\tau)] . \quad (273)$$

Para o caso massivo é necessário resolver a Eq. (271). Seja:

$$E_q \equiv \sqrt{q^2 + m_-^2} . \quad (274)$$

Substituindo (274) em (271):

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} q dq \text{sen}(qs) \frac{\text{sen}(E_q c\tau)}{E_q} . \quad (275)$$

Sabemos que $q \sin(qs)$ é uma função par; E_q também é par em relação a q . Conseqüentemente,

temos que o integrando é par e a integral pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \text{sen}(qs) \text{sen}(E_q c\tau) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \left[\frac{\exp(iE_q c\tau) - \exp(-iE_q c\tau)}{2i} \right] \left[\frac{\exp(iqs) - \exp(-iqs)}{2i} \right], \end{aligned}$$

onde escrevemos os senos em sua forma exponencial. Com a distributiva dos termos, temos:

$$\begin{aligned} G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq [\exp(iE_q c\tau + iqs) - \exp(iE_q c\tau - iqs) \\ &\quad - \exp(-iE_q c\tau + iqs) + \exp(-iE_q c\tau - iqs)]. \end{aligned}$$

Tomando $q \rightarrow -q$ no primeiro termo e no último termo da equação acima, segue que:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{s} \left[-2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp(iE_q c\tau - iqs) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp(-iE_q c\tau + iqs) \right],$$

ou,

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{s} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp[i(E_q c\tau - qs)] + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp[-i(E_q c\tau - qs)] \right]. \quad (276)$$

Conseguimos escrever as integrais acima como derivadas parciais em s de novas integrais. Este procedimento é útil pois conduz à solução em termos da função de Bessel de primeiro tipo – como monstrado no Apêndice H – que aparece na Eq. (283) abaixo.²⁶ Temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp[-i(E_q c\tau - qs)] = -i \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q}. \quad (277)$$

E,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp[i(E_q c\tau - qs)] = i \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[i(E_q c\tau - qs)]}{E_q}. \quad (278)$$

²⁶Note que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} \frac{\partial}{\partial s} [-i(E_q c\tau - qs)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} [-i(-q)], \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{E_q} dq \exp[-i(E_q c\tau - qs)] = -i \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q},$$

que é a Eq. (277).

Substituindo (277) e (278) em (276):

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{s} \left[i \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} - i \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} \right],$$

ou

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[-i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} - \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\exp[i(E_q c\tau - qs)]}{E_q} \right].$$

Agora, propomos as substituições:²⁷

$$E_q = m_- \cosh \eta. \quad (279)$$

$$q = m_- \sinh \eta. \quad (280)$$

Então,

$$dq = \frac{dq}{d\eta} d\eta = m_- \cosh \eta d\eta,$$

com $q \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \eta \rightarrow \pm\infty$.

Assim,

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} m_- \cosh \eta d\eta \frac{\exp[-im_- (c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta)]}{m_- \cosh \eta} - \int_{-\infty}^{\infty} m_- \cosh \eta d\eta \frac{\exp[im_- (c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta)]}{m_- \cosh \eta} \right\},$$

que é o mesmo que:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[-im_- (c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta)] - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[im_- (c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta)] \right\}. \quad (281)$$

Devemos ter

$$t > t', \quad (282)$$

do contrário a função de Green é nula. Com isso, teremos três situações envolvendo τ e s/c , das quais depende o cálculo das integrais que aparecem em (281). As referidas situações são

²⁷As substituições (279) e (280) são interessantes, pois respeitam a relação

$$E_q^2 - q^2 = m_-^2,$$

que está de acordo com a definição (274) de E_q , pois, $E_q \equiv \sqrt{q^2 + m_-^2}$.

discutidas no Apêndice H e levam ao conjunto abaixo:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{m_-}{\sqrt{\tau^2 - (\frac{s}{c})^2}} J_1 \left(m_- c \sqrt{\tau^2 - (\frac{s}{c})^2} \right), & m_- \neq 0, \quad \tau > \frac{s}{c} \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{s} \delta \left(\tau - \frac{s}{c} \right), & m_- = 0, \quad \tau = \frac{s}{c} \\ 0, & m_- \neq 0, \quad \tau < \frac{s}{c} \end{cases} \quad (283)$$

Parece-nos útil reunir o conjunto de soluções acima em apenas uma equação; usamos a função de Heaviside para este fim. Dada a função de Heaviside:

$$\Theta \left(\tau - \frac{s}{c} \right) = \begin{cases} 0, & \tau < \frac{s}{c} \\ 1, & \tau > \frac{s}{c} \end{cases}, \quad (284)$$

conseguimos unificar os casos de (283):

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{s} \delta \left(\tau - \frac{s}{c} \right) + \frac{1}{4\pi} \Theta \left(\tau - \frac{s}{c} \right) \frac{1}{c} \frac{m_-}{\sqrt{\tau^2 - (\frac{s}{c})^2}} J_1 \left(m_- c \sqrt{\tau^2 - (\frac{s}{c})^2} \right). \quad (285)$$

Observamos que o primeiro termo da Eq. (285) é não nulo apenas quando $\tau = \frac{s}{c}$, dada a propriedade do delta, e a função de Heaviside garante que o segundo termo só sobrevive caso $\tau > \frac{s}{c}$, o que mostra a unificação do conjunto (283). Finalmente, usamos G_{Φ} para calcular Φ_- pela Eq. (258). Explicitando as dependências nas componentes espaciais e a temporal:

$$\Phi_-(\mathbf{r}, t) = \int G_{\Phi}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', ct - ct') Q(\mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' d(ct'). \quad (286)$$

Com a Eq. (285)

$$\Phi_-(\mathbf{r}, t) = \int \left\{ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} \delta \left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) + \frac{m_-}{4\pi} \Theta \left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \frac{J_1 \left(m_- c \sqrt{(t - t')^2 - (\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{c})^2} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - (\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{c})^2}} \right\} Q(\mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' dt',$$

ou,

$$\begin{aligned}\Phi_-(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(t_r - t') Q(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt' \\ & + \frac{m_-}{4\pi} \int \Theta(t_r - t') \frac{J_1\left(m_- c \sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c}\right)^2}\right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c}\right)^2}} Q(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt'.\end{aligned}\quad (287)$$

onde, como sabemos, $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ é o tempo retardado. A Eq. (287) é análoga à equação que se encontra no trabalho de Näf (NÄF; JETZER, 2011). Ainda podemos escrever:

$$\begin{aligned}\Phi_-(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} Q(\mathbf{r}', t_r) d^3\mathbf{x}' \\ & + \frac{m_-}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \int_{-\infty}^{t_r} \frac{J_1\left(m_- c \sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c}\right)^2}\right)}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c}\right)^2}} Q(\mathbf{r}', t') dt'.\end{aligned}\quad (288)$$

Com a relação de $\tau = t - t'$, a Eq. (288) transforma-se para:

$$\begin{aligned}\Phi_-(\mathbf{x}, t) = & \frac{2G}{3c^4} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T(\mathbf{x}', t_r) d^3\mathbf{x}' \\ & - m_- \frac{2G}{3c^4} \int d^3\mathbf{x}' \int_{\frac{s}{c}}^{\infty} \frac{J_1\left(m_- c \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{s}{c}\right)^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{s}{c}\right)^2}} T(\mathbf{x}', t - \tau) d\tau.\end{aligned}\quad (289)$$

onde usamos a Eq. (255) e $\chi = 8\pi G/c^4$.

Essa é solução geral de $\Phi_-(\mathbf{x}, t)$. Para especificar ainda mais a sua forma funcional, precisaríamos modelar a fonte, ou seja, dar o tensor-energia momento associado. O traço de $T_{\mu\nu}$ para essa fonte seria, então, substituído em (289) e as integrais resolvidas. Com isso, estaríamos de posse do modo escalar massivo $\Phi_-(\mathbf{x}, t)$ da onda gravitacional. O próximo passo no roteiro seria substituir Φ_- em (252) para calcular o segundo modo escalar Φ_+ . Ambos os modos escalares Φ_- e Φ_+ poderiam ser combinados com o modo tensorial $\tilde{h}_{\mu\nu}$ para formar o tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ da Eq. (250). Este último é o tensor a onda gravitacional da teoria de Starobinsky de ordem superior para fonte escolhida.

Os passos descritos acima poderiam ser executados considerando um sistema binário como fonte. A expectativa é encontrar uma equação para a potência irradiada na forma de ondas gravitacionais que generaliza a Eq. (186), obtida na Seção 3.4.1 no contexto da relatividade geral. Como primeira aproximação, é habitual considerar o ponto de observação a grandes

distâncias da fonte. Nesta circunstância,

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \simeq \frac{1}{|\mathbf{x}|} \simeq \frac{1}{r},$$

e a Eq. (289) simplifica-se um pouco:

$$\Phi_{-}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{3c^4} \frac{1}{r} \int T(\mathbf{x}', t_r) d^3\mathbf{x}' - m_{-} \frac{2G}{3c^4} \int_r^{\infty} d\tau \frac{J_1\left(m_{-}c\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2}} \int d^3\mathbf{x}' T(\mathbf{x}', t - \tau). \quad (290)$$

A continuidade do roteiro apresentado nos últimos dois parágrafos fica como aplicação futura dos resultados apresentados nesta dissertação de mestrado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi dividido em três partes essenciais: estudo da relatividade geral (RG), estudo das ondas gravitacionais (OGs) no regime da RG, e as OGs no modelo de Starobinsky de ordem superior.

No estudo da Relatividade Geral, foi discutido o princípio da equivalência que possui um papel de suma importância para a RG. Apresentamos um breve estudo sobre tensores, em geral, e a métrica, em particular. Definimos os símbolos de Christoffel e construímos a equação da geodésica como uma generalização da equação da reta para o espaço curvo. Em seguida, os tensores de Riemann, de Ricci, e o escalar de curvatura foram apresentados para podermos deduzir o tensor de Einstein, e conseqüentemente, construir as equações de Einstein. Calculamos a constante χ presente nas equações de campo abordando o limite de campo fraco. A última fase no estudo da RG foi a dedução das equações de Einstein via a integral de ação de Einstein-Hilbert (RYDER, 2009).

A segunda etapa do presente trabalho foi a análise das ondas gravitacionais no regime da RG. As equações de Einstein foram linearizadas com uma expansão da métrica dada por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Com isso, encontramos uma equação de onda não homogênea para $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (1/2)\eta_{\mu\nu}h$, cuja solução já é conhecida do Eletromagnetismo (JACKSON, 1999). Ao impormos a condição de vácuo, deparamo-nos com a solução de ondas planas, escritas em termos das matrizes de polarização. Tais matrizes caracterizam as ondas transversais no modos $+$ e \times , relacionados à maneira como partículas se comportam quando da passagem das OGs. Após o estudo das OGs planas, resgatamos a equação com fonte para $\bar{h}_{\mu\nu}$, Eq. (103); então, construímos uma solução dependente da segunda derivada temporal do momento de quadrupolo. Identificamos a necessidade de introduzir o pseudo-tensor energia momento para avaliar a energia transportada pelas ondas gravitacionais, e concluímos que o fluxo de energia da radiação gravitacional vai com o quadrado da terceira derivada do momento de quadrupolo. Especificamos a forma funcional desta quantidade para um sistema de duas massas em órbita circular. O resultado (186) estabelece que a potência irradiada escala com o fator G/c^5 , o que significa que a intensidade da radiação gravitacional é sempre extremamente fraca.

Na última etapa do trabalho, partimos para o estudo da gravitação de Starobinsky de ordem superior. Foram contruídas as equações de campo desta teoria através da variação da ação (1). Esse desenvolvimento está presente na subseção 4.1, e mais detalhadamente no Apêndice F.

Para encontrar uma solução do tipo OGs é necessária a linearização das equações de campo. A linearização do nosso modelo de gravidade modificada foi feita na subseção 4.2, e resulta na Eq. (217). Obtemos uma equação com derivadas de sexta ordem no modelo linea-

rizado. Devido ao grau de complexidade desta equação, optamos por realizar a decomposição da métrica em dois modos escalares e um modo tensorial. Com isso, obtivemos um conjunto de três equações diferenciais de segunda ordem. A solução da Eq. (251) para o campo de spin dois é encontrada facilmente por analogia ao roteiro desenvolvido no regime da RG; dessa forma, obtivemos a Eq. (254). As Eqs. (252) e (253) para os campos escalares Φ_+ e Φ_- possuem dependência mútua: é preciso conhecer a forma funcional de Φ_- para integrar a equação diferencial de Φ_+ ; por essa razão, passamos para a resolução da Eq. (253). A solução geral para Φ_- é dada pela Eq. (290), foi desenvolvida a partir da função de Green e apresenta uma dependência da função de Bessel J_1 além do termo ordinário que depende do tempo retardado.

A solução geral para Φ_+ será construída futuramente, como uma continuação natural do trabalho de mestrado. Com isso, teremos a solução das três Eqs. (251), (252) e (253). Então, o modo de spin dois $\tilde{h}_{\mu\nu}$ e os modos escalares Φ_+ e Φ_- poderão ser substituídos na Eq. (250) para $\bar{h}_{\mu\nu}$ e encontraremos a solução de ondas gravitacionais no modelo de Starobinsky de ordem superior. Posteriormente, pretendemos encontrar a equação de t_μ^ν para o modelo de Starobinsky de ordem superior, que seja análoga à Eq. (154) da RG. Nossa equação para o pseudotensor energia momento deve conter os termos encontrados por Berry e Gair na expressão para o pseudotensor no contexto de teorias $f(R)$, no caso de R^2 (BERRY; GAIR, 2011). Com isso, poderemos encontrar a energia irradiada na forma de OGs de gravidade modificada emitidas por um sistema binário, seguindo o roteiro desenvolvido na subseção 3.4.1.

As soluções a serem encontradas pelos autores permitirá um estudo mais aprofundado de outras características das OGs no modelo de Starobinsky de ordem superior. Poderemos calcular a variação da velocidade angular para fontes binárias como função do tempo, e expressar a energia total do sistema em função de suas velocidades angulares. Outra perspectiva é a análise da fase espiral do sistema binário com vistas à caracterização da coalescência das massas e a determinação da amplitude de chirp, por exemplo. Poderemos ainda, estudar a geração das OGs por órbitas elípticas keplerianas e o espectro emitido, além de sua evolução orbital sob uma análise de back-reaction (MAGGIORE, 2008). Ademais, a fonte de geração das OGs pode ser não apenas de binárias compactas, mas também de um colapso estelar. Tais condições poderão ser estudadas numa perspectiva da relatividade numérica, o que nos daria uma visão mais concreta sobre a viabilidade do nosso modelo de gravitação modificado.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al.. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. **Physical Review Letters**, College Park, v. 116, n. 6, p. 061102, 11 fev. 2016. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.116.061102>. Acesso em: 15 jan. 2019
- ACCIOLY, A.; GIACCHINI, B. L.; SHAPIRO, I. L.. Low-Energy Effects in a Higher-Derivative Gravity Model with Real and Complex Massive Poles. **Physical Review D**, College Park, v. 96, n. 10, p. 104004, 8 nov. 2017. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.96.104004>. Acesso em: 27 mar. 2019
- ACEVEDO, O. A.; MORAIS, E. M. de; PIMENTEL, B. M. O Princípio de Equivalência. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 41, n. 3, p. e20180329, fev. 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2018-0329>. Acesso em: 27 mar. 2020
- ADLER, Ronald; BAZIN, Maurice; SCHIFFER, Menahem. **Introduction to General Relativity**. 2nd ed.. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975.
- AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. **Dark Energy: Theory and Observations**. New York: Cambridge University Press, 2010.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. 6. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- BERRY, C. P. L.; GAIR, J. R.. Linearized f(R) Gravity: Gravitational Radiation and Solar System Tests. **Physical Review D**, College Park, v. 83, n. 10, p. 104022, 11 maio 2011. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.83.104022>. Acesso em: 27 abr. 2020
- CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry: An Introduction to General Relativity**. Harlow: Pearson Education Limited, 2014.
- COSTA, César Augusto. **Simulação da Resposta do Detector Mário Schenberg a Ondas Gravitacionais Oriundas de Fontes Astrofísicas**. 2006. 126 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2006.
- CRISPINO, L. C. B.; LIMA, M. C. de.. Expedição Norte-americana e Iconografia Inédita de Sobral em 1919. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 40, n. 1, p. e1601, 22 jun. 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0092>.

Acesso em: 27 abr. 2020

CRISPINO, L. C. B.. Expedição do Observatório Real de Greenwich para Sobral em 1919 - Anotações Tomadas pela Comissão Britânica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 41, n. 1, p. e20190202, 13 dez. 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2019-0202>. Acesso em: 27 abr. 2020

CUZINATTO, R.R.; MELO, C.A.M. de; MEDEIROS, L.G.; POMPEIA, P.J.. Gauge Formulation for Higher Order Gravity. **The European Physical Journal C**, Heidelberg, v. 53, n. 1, p. 99-108, 1 nov. 2008. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0441-1>. Acesso em: 10 abr. 2019

CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J.. Cosmic Acceleration from Second Order Gauge Gravity. **Astrophysics And Space Science**, Heidelberg, v. 332, n. 1, p. 201-208, 21 set. 2010. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-010-0483-y>. Acesso em: 10 abr. 2019

CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J.. Observational Constraints on a Phenomenological $f(R, \partial R)$ -Model. **General Relativity and Gravitation**, Heidelberg, v. 47, n. 3, p. 29, 24 fev. 2015. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-015-1862-z>. Acesso em: 10 abr. 2019

CUZINATTO, R.R.; MELO, C.A.M. de; MEDEIROS, L.G.; POMPEIA, P.J.. Scalar-multi-tensorial Equivalence for Higher Order $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$ Theories of Gravity. **Physical Review D**, College Park, v. 93, n. 12, p. 1-12, 13 jun. 2016. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.93.124034>. Acesso em: 10 abr. 2019

CUZINATTO, R. R.; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J.. Higher-Order Modified Starobinsky Inflation. **Journal Of Cosmology And Astroparticle Physics**, [s.l.], v. 2019, n. 02, p. 055, 27 fev. 2019a. IOP Publishing. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/055>. Acesso em: 10 abr. 2019

CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J.. $f(R, \nabla_\mu R, \nabla_{\mu_1} \nabla_{\mu_2} R, \dots, \nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_n} R)$ Theories of Gravity in Einstein Frame: a Higher Order Modified Starobinsky Inflation Model in the Palatini Approach. **Physical Review D**, College Park, v. 99, n. 8, p. 1-2, 30 abr. 2019b. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.99.084053>. Acesso em: 10 abr. 2019

De SABBATA, V.; GASPERINI, M. **Introduction to gravitation**. World Scientific Publishing Co Pte Ltd., 1985.

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. New York: Oxford University Press Inc., 1992.

EDDINGTON, A. S. et al. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. **Philosophical Transactions Of The Royal Society Of London. Series A, Containing Papers Of A Mathematical Or Physical Character**, [s.l.], v. 220, n. 571-581, p. 291-333, jan. 1920. The Royal Society. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1920.0009>. Acesso em: 20 jul. 2020

EINSTEIN, A.. Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen Der Physik**, [s.l.], v. 354, n. 7, p. 769-822, 1916. Wiley. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19163540702> — Uma versão deste texto em português se encontra em Textos Fundamentais de Física Moderna, O Princípio da Relatividade, Vol. I, Edições da Fundação Calouste Gulbenkian, 1972.

FOSTER, James; NIGHTINGALE, J. David. **A short course in General Relativity**. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2006.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. 7. ed. S.l: Elsevier Inc, 2007.

GREINER, W.; REINHARDT, J. **Quantum Electrodynamics**. 3. ed. Heidelberg: Springer, 2003.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. S.l: Pearson Prentice Hall, 1999.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2. ed. S.l: Pearson, Prentice Hall, 2005.

HOOFT, Gerard 'T; VELTMAN, M.J.G.. One loop Divergencies in the Theory of Gravitation. **Annales de L'I.H.P. Physique Théorique**, Paris, v. 20, n. 1, p. 69-94, 1974.

HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H.. Discovery of a Pulsar in a Binary System. **The Astrophysical Journal**, [s.l.], v. 195, n. 1, p. L51-L53, jan. 1975. IOP Publishing. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/181708>. Acesso em:10 jan. 2020

KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The Early Universe**. New York: Westview Press, 1994.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. Berkeley: Hamilton Printing Company, 1999.

LAZAR, Markus. Green functions and propagation in the Bopp–Podolsky electrodynamics. **Wave Motion**, [s.l.], v. 91, p. 102388, nov. 2019. Elsevier BV. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102388>. Acesso em:10 jan. 2020

LENZI, H. C.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N.. A Deflexão Gravitacional da Luz: de Newton a Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 41, n. 1, e20190238, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2019-0238>. Acesso em:10 jan. 2020

MAGGIORE, M. **Gravitational Waves: Volume 1 Theory and Experiments**. New York: Oxford University Press Inc., 2008.

MARION, Jerry B.; THORTON, Stephen T.. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5. ed. Boston: Brooks/cole Cengage Learning, 2008.

MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W.. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. **American Journal Of Science**, [s.l.], v. 3-34, n. 203, p. 333-345, 1 nov. 1887. American Journal of Science (AJS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2475/ajs.s3-34.203.333>. Acesso em:10 jan. 2020

MISNER, C.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.

NÄF, J.; JETZER, P.. Gravitational Radiation in Quadratic $f(R)$ Gravity. **Physical Review D**, College Park, v. 84, n. 2, p. 024027, 15 jul. 2011. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.84.024027>. Acesso em:10 jan. 2020

NEWTON, I. **Philosophia Naturalis Principia Mathematica**. 3. ed. Londres: University of Glasgow, 1871.

OLIVEIRA, Nei F.; AGUIAR, Odylio D.. The Mario Schenberg Gravitational Wave Antenna. **Brazilian Journal of Physics**, [s.l.], v. 46, n. 5, p. 596-603, 15 ago. 2016. Springer Science and Business Media LLC. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s13538-016-0436-1>. Acesso em: 20 jul. 2020

OHANIAN, Hans C.; RUFFINI, Remo. **Gravitation and Spacetime**. New York: Cambridge University Press, 2013.

PODOLSKY, B.; SCHWED, P.. Review of a Generalized Electrodynamics. **Reviews of Modern Physics**, College Park, v. 20, n. 1, p. 40-50, 1 jan. 1948. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.20.40>. Acesso em:17 mar. 2020

RYDEN, B. S. **Introduction to Cosmology**. Boston: Addison-Wesley, 2003.

RYDER, L. **Introduction to General Relativity**. 1, draft. ed. New York: Cambridge University Press, 2009.

SILVA NETO, Gesiel Rodrigues da. **Soluções Esfericamente Simétricas na Gravitacão de Starobinsky-Podolsky**. 2018. 83 f. Dissertaçãõ (Mestrado) - Curso de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018.

SILVA NETO R. G.; MEDEIROS, L. G.. Spherically symmetric solutions in higher-derivative theories of gravity. **Physical Review D**, College Park, v. 101, n. 12, 29 jun. 2020. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.101.124061>. Acesso em:17 jun. 2020

STAROBINSKY, A. A.. A New Type of Isotropic Cosmological Models without Singularity. **Physics Letters B**, College Park, v. 91, n. 1, p. 99-102, mar. 1980. Elsevier BV. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(80\)90670-x](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(80)90670-x) Acesso em:17 mar. 2020

STELLE, K. S.. Renormalization of Higher-Derivative Quantum Gravity. **Physical Review D**, College Park, v. 16, n. 4, p. 953-969, 15 ago. 1977. American Physical Society (APS). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.16.953>. Acesso em:01 mar. 2020

TEYSSANDIER, P. Linearised R+R 2 gravity: a new gauge and new solutions. **Classical And Quantum Gravity**, [s.l.], v. 6, n. 2, p. 219-229, 1 fev. 1989. IOP Publishing. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/6/2/016>. Acesso em:27 jul. 2020

THORNE, K. S. Ripples of Curvature. In: THORNE, Kip Stephen. **Black Holes & Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy**. New York: W. W. Norton & Company, 1994. Cap. 10. p. 357-396

UTIYAMA, Ryoyu; DEWITT, Bryce S.. Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields. **Journal of Mathematical Physics**, [s.l.], v. 3, n. 4, p. 608-618, jul. 1962. AIP Publishing. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1724264>. Acesso em:17 fev. 2020

WEISBERG, Joel M.; TAYLOR, Joseph H.. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis. **Astronomical Society Of The Pacific Conference Series**, [s.l.], v. 328, n. 1, p. 1-25, jul. 2005.

WOODARD, Richard. Ostrogradsky's Theorem on Hamiltonian Instability. **Scholarpedia**, [s.l.], v. 10, n. 8, p. 32243, 2015. Scholarpedia. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4249/scholarpedia.32243> Acesso em:27 jul. 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A — Substituição da Métrica $g_{\mu\nu}$ pela Métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ no Regime Linear

Primeiramente, estudaremos a forma contravariante do tensor métrico no regime de campo fraco, pois a ela não é idêntica à $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Como veremos, ocorre uma mudança de sinal na expressão da métrica contravariante. Seja o ansatz:

$$g^{\mu\nu} = A\eta^{\mu\nu} + Bh^{\mu\nu}, \quad (291)$$

como $g_{\mu\nu}$ deve ser um tensor recíproco:

$$g^{\rho\nu} g_{\mu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (292)$$

então:

$$\begin{aligned} g^{\rho\nu} g_{\mu\rho} &= \delta_{\mu}^{\nu} = (\eta_{\mu\rho} + h_{\mu\rho})(A\eta^{\rho\nu} + Bh^{\rho\nu}) \\ &= A\eta^{\rho\nu}\eta_{\mu\rho} + Bh^{\rho\nu}\eta_{\mu\rho} + A\eta^{\rho\nu}h_{\mu\rho} + Bh^{\rho\nu}h_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Como $\eta^{\rho\nu}\eta_{\mu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}$ e desprezamos o termo de ordem superior $\mathcal{O}(h^2)$, temos:

$$\delta_{\mu}^{\nu} = A\delta_{\mu}^{\nu} + Bh^{\rho\nu}\eta_{\mu\rho} + A\eta^{\rho\nu}h_{\mu\rho},$$

ou,

$$\delta_{\mu}^{\nu} = A\delta_{\mu}^{\nu} + (A + B)\eta^{\rho\nu}h_{\mu\rho}.$$

Para que a equação seja satisfeita, devemos impor

$$A = 1, \quad (293)$$

e,

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -1. \quad (294)$$

Substituindo (293) e (294) no ansatz (291) resulta:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} . \quad (295)$$

A seguir mostramos o motivo de a métrica $g_{\mu\nu}$ ser usada no lugar da métrica de Minkowski no limite da teoria linearizada para a contração de índices. A rigor, por exemplo,

$$h_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha} .$$

Porém,

$$h_{\mu}^{\nu} = (\eta^{\nu\alpha} - h^{\nu\alpha}) h_{\mu\alpha} = \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha} - (h^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha}) ,$$

onde descartamos o termo em parênteses por ser de ordem superior, ou seja $\mathcal{O}(h^2) \simeq 0$.

Assim:

$$h_{\mu}^{\nu} = \eta^{\nu\alpha} h_{\mu\alpha} , \quad (296)$$

e

$$h = h_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} , \quad (297)$$

Como também são desprezados os termos do tipo $h\partial h$, temos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} h &= \partial^{\nu} h = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \partial_{\mu} h \\ &= \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} h - h^{\mu\nu} \partial_{\mu} h \\ &= \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} h , \end{aligned}$$

validando também neste exemplo o uso de $\eta_{\mu\nu}$ no lugar de $g_{\mu\nu}$ para a contração de índices.

As equações (296) e (297) são as equações (87) e (88) do texto principal.

APÊNDICE B — Tensor de Riemann Linearizado

O tensor de Riemann é:

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\rho} - \Gamma_{\beta\rho}^{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho},$$

em que os símbolos de Christoffel são dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu}h_{\nu\beta} + \partial_{\nu}h_{\beta\mu} - \partial_{\beta}h_{\mu\nu}).$$

Assim,

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} = \frac{1}{2} [(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) (\partial_{\alpha}h_{\rho\nu} + \partial_{\rho}h_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}h_{\alpha\rho})] [(\eta^{\rho\nu} - h^{\rho\nu}) (\partial_{\beta}h_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}h_{\beta\sigma})],$$

i.e.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} &= \frac{1}{2} [\eta^{\mu\nu} (\partial_{\alpha}h_{\rho\nu} + \partial_{\rho}h_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}h_{\alpha\rho}) - h^{\mu\nu} (\partial_{\alpha}h_{\rho\nu} + \partial_{\rho}h_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}h_{\alpha\rho})] \\ &\quad \times [\eta^{\rho\nu} (\partial_{\beta}h_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}h_{\beta\sigma}) - h^{\rho\nu} (\partial_{\beta}h_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}h_{\beta\sigma})], \end{aligned}$$

onde vemos que nos colchetes teremos produtos $(h\partial h) \simeq 0$, que não de ordem quadrática e, portanto, serão negligenciados no processo de linearização:

$$h^{\mu\nu} (\partial_{\alpha}h_{\rho\nu} + \partial_{\rho}h_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}h_{\alpha\rho}) = h^{\rho\nu} (\partial_{\beta}h_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}h_{\beta\sigma}) = 0.$$

Ademais,

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} = \left[\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} (\partial_{\alpha}h_{\rho\nu} + \partial_{\rho}h_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}h_{\alpha\rho}) \right] \left[\frac{1}{2}\eta^{\rho\nu} (\partial_{\beta}h_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}h_{\beta\sigma}) \right],$$

conterá termos como $(\partial h)^2 \simeq 0$, que também são de ordem superior. Desse modo:

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\rho} \simeq 0.$$

Por analogia, temos:

$$\Gamma_{\beta\rho}^{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} \simeq 0.$$

Então:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\nu},$$

e

$$\begin{aligned} R^\mu_{\nu\alpha\beta} &= \partial_\alpha \left[\frac{1}{2} \eta^{\rho\mu} (\partial_\nu h_{\rho\beta} + \partial_\beta h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\beta\nu}) \right] - \partial_\beta \left[\frac{1}{2} \eta^{\rho\mu} (\partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\alpha h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\alpha\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\mu} (\partial_\alpha \partial_\nu h_{\rho\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta h_{\nu\rho} - \partial_\alpha \partial_\rho h_{\beta\nu}) - \frac{1}{2} \eta^{\rho\mu} (\partial_\beta \partial_\nu h_{\rho\alpha} + \partial_\beta \partial_\alpha h_{\nu\rho} - \partial_\beta \partial_\rho h_{\alpha\nu}) \\ &= \frac{1}{2} [\eta^{\rho\mu} (\partial_\alpha \partial_\nu h_{\rho\beta} - \partial_\alpha \partial_\rho h_{\beta\nu}) - \eta^{\rho\mu} (\partial_\beta \partial_\nu h_{\rho\alpha} - \partial_\beta \partial_\rho h_{\alpha\nu})], \end{aligned}$$

i.e.

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\nu h^\mu_\beta - \partial_\alpha \partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\beta \partial_\nu h^\mu_\alpha + \partial_\beta \partial^\mu h_{\alpha\nu}), \quad (298)$$

que é justamente a Eq. (91).

APÊNDICE C — Atingibilidade do Calibre Harmônico

O calibre harmônico, dado pela Eq. (95), possui um vínculo que deve ser satisfeito para que possa ser utilizado. Este vínculo é expresso pela Eq. (96). O calibre harmônico é atingível se há uma transformação de coordenadas na qual a condição de gauge é respeitada. Neste apêndice, demonstramos que esse vínculo é satisfeito, ou seja, que a Eq. (95) é válida.

Vamos considerar uma transformação de coordenadas infinitesimal

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \quad (299)$$

onde a diferença entre x'^{μ} e x^{μ} é apenas um termo infinitesimal dado por $\delta x^{\mu} = \xi^{\mu}$. Logo, $x^{\mu} = x'^{\mu} - \xi^{\mu}$. A transformação de coordenada é compatível com:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \xi^{\mu}. \quad (300)$$

Para uma transformação de um vetor covariante A'_{ν} , temos:

$$A'_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} A_{\mu}, \quad (301)$$

usando a relação (300), segue que:

$$\begin{aligned} A'_{\nu}(x') &= (\delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \xi^{\mu}) A_{\mu}(x) \\ &= (\delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \xi^{\mu}) A_{\mu}(x' - \xi), \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como:²⁸

$$\begin{aligned} A'_{\nu}(x') &= (\delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu} \xi^{\mu}) (A_{\mu} - \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}) \\ &= \delta_{\nu}^{\mu} A_{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu} - A_{\mu} \partial_{\nu} \xi^{\mu} + \partial_{\nu} \xi^{\mu} \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\mu}. \end{aligned}$$

O termo $(\xi)^2$ resultante é negligenciado, pois $|\xi| \ll 1$, assim:

$$A'_{\nu}(x') = A_{\nu} - \xi^{\alpha} \partial_{\alpha} A_{\nu} - A_{\mu} \partial_{\nu} \xi^{\mu}.$$

²⁸Pelo teorema de Taylor,

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{2!}f''(x_0)\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3).$$

Trunca-se a expansão de Taylor devido ao fato de os termos ξ serem demasiadamente pequenos, $|\xi| \ll 1$.

Conseqüentemente,

$$\delta A_\nu = A'_\nu(x') - A_\nu(x) = -\xi^\alpha \partial_\alpha A_\nu - A_\mu \partial_\nu \xi^\mu. \quad (302)$$

Para um vetor contravariante, A^μ , obtemos:

$$\delta A^\mu = A^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu - \xi^\alpha \partial_\alpha A^\mu. \quad (303)$$

Um procedimento análogo é aplicável para um tensor de ordem dois. De fato:

$$\begin{aligned} A'_{\mu\nu}(x') &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A_{\alpha\beta}(x) \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \xi^\beta) (A_{\alpha\beta} - \xi^\mu \partial_\mu A_{\alpha\beta}) \\ &= A_{\mu\nu} - \xi^\alpha \partial_\alpha A_{\mu\nu} - A_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - A_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (304)$$

Logo,

$$\delta A_{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha A_{\mu\nu} - A_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - A_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha. \quad (305)$$

Para um tensor de ordem dois contravariante, temos:

$$\delta A^{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha A^{\mu\nu} + A^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + A^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu. \quad (306)$$

Podemos utilizar as transformações (305) e (306) para a métrica:

$$\begin{cases} \delta g_{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha \\ \delta g^{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu \end{cases}. \quad (307)$$

Nota-se que:

$$\nabla^\nu \xi^\mu + \nabla^\mu \xi^\nu = g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha \xi^\mu + g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \xi^\nu. \quad (308)$$

Reescreveremos a Eq.(308) usando a definição de derivada covariante. Em verdade,

$$\nabla^\nu \xi^\mu + \nabla^\mu \xi^\nu = g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu + g^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi^\beta + g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \xi^\beta. \quad (309)$$

Do postulado da metricidade da RG, temos:

$$\begin{cases} -\partial_\beta g^{\mu\nu} = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu g^{\alpha\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^\nu g^{\mu\alpha} \\ \partial_\beta g_{\mu\nu} = \Gamma_{\beta\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} \end{cases}. \quad (310)$$

Utilizamos o conjunto de (310) em (309) para encontrar:

$$\begin{cases} \delta g^{\mu\nu} = \nabla^\nu \xi^\mu + \nabla^\mu \xi^\nu \\ \delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\mu \xi_\nu \end{cases} . \quad (311)$$

No limite do campo fraco, as relações de (311) podem ser reescritas utilizando as derivadas parciais:

$$\begin{cases} \delta g^{\mu\nu} = \partial^\nu \xi^\mu + \partial^\mu \xi^\nu \\ \delta g_{\mu\nu} = -\partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \end{cases} . \quad (312)$$

Isso acontece porque, nesse limite, a métrica é linearizada: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$; e, dado que $|\xi_\mu| \ll 1$, teremos produtos negligenciáveis.

Uma transformação infinitesimal para o termo $h_{\mu\nu}$ é dada na mesma forma que (299):

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} . \quad (313)$$

Usando a Eq. (312), segue que:

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \\ &= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\mu} \partial_\nu \xi^\alpha - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha . \end{aligned} \quad (314)$$

Definido $\bar{h}_\mu^\nu \equiv h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu h$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{h}'_\mu{}^\nu &= h'_\mu{}^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu h' \\ &= h_\mu^\nu - \eta_{\alpha\mu} \partial^\nu \xi^\alpha - \delta_\alpha^\nu \partial_\mu \xi^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu [\eta^{\sigma\lambda} (h_{\sigma\lambda} - \eta_{\alpha\lambda} \partial_\sigma \xi^\alpha - \eta_{\alpha\sigma} \partial_\lambda \xi^\alpha)] \\ &= h_\mu^\nu - \eta_{\alpha\mu} \partial^\nu \xi^\alpha - \delta_\alpha^\nu \partial_\mu \xi^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu [h - \delta_\alpha^\sigma \partial_\sigma \xi^\alpha - \delta_\alpha^\lambda \partial_\lambda \xi^\alpha] \\ &= \bar{h}_\mu^\nu - \eta^{\beta\nu} \partial_\beta \xi_\mu - \partial_\mu \xi^\nu + \delta_\mu^\nu \partial_\alpha \xi^\alpha . \end{aligned}$$

Tomando o divergente da relação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \bar{h}'_\mu{}^\nu &= \partial_\nu \bar{h}_\mu^\nu - \eta^{\beta\nu} \partial_\beta \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \xi^\nu + \delta_\mu^\nu \partial_\alpha \partial_\nu \xi^\alpha \\ &= \partial_\nu \bar{h}_\mu^\nu - \eta^{\beta\nu} \partial_\beta \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \xi^\nu + \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\alpha \\ &= \partial_\nu \bar{h}_\mu^\nu - \eta^{\beta\nu} \partial_\beta \partial_\nu \xi_\mu , \end{aligned}$$

ou

$$\partial_\nu \bar{h}'_\mu{}^\nu = \partial_\nu \bar{h}_\mu^\nu - \square \xi_\mu , \quad (315)$$

onde $\square \equiv \eta^{\beta\nu} \partial_\beta \partial_\nu$ no regime linear.

Agora, de todas as transformações infinitesimais $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ possíveis, escolhamos aquelas que satisfazem o calibre

$$\square \xi_\mu = \partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu. \quad (316)$$

Com essa escolha, a Eq. (315) dá:

$$\partial_\nu \bar{h}'_\mu{}^\nu = 0$$

Isso mostra que existe uma transformação de coordenadas – aquela que respeita (316) – que torna válida a condição associada ao calibre harmônico (95) – tomada no sistema de coordenadas linha.

Existe, ainda, uma liberdade de calibre residual. Com isso, queremos dizer que é possível tomar uma escolha adicional para ξ^μ , à saber:

$$\square \xi_\mu = 0. \quad (317)$$

Esta é a a condição (96) do corpo principal do texto. A Eq. (317) em conjunto com a relação (316) leva à:

$$\partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu = 0,$$

que é a própria Eq. (95) – tomada no sistema de coordenadas original. Dessa forma, todo o raciocínio da Seção 3.1 é construído consistentemente.

APÊNDICE D — Polarização das Ondas Gravitacionais

Dada a Eq. (123) relacionada à solução (106) para $\bar{h}^{\mu\nu}$, temos que $\Gamma_{00}^\mu = 0$, pois,

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} (\partial_0 h_{\beta 0} + \partial_0 h_{0\beta} - \partial_\beta h_{00}) ,$$

e, como adotamos o TT gauge, as componentes $h_{\beta 0} = h_{0\beta} = 0$. Isso implica que a equação da geodésica simplifica-se para

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 ,$$

que é satisfeita por

$$\dot{x}^\mu = c\delta_0^\mu ,$$

com $c = \text{constante}$ (o ponto indica a derivação com respeito à τ), e temos que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ e $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, logo:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2 .$$

Dividindo ambos lados por $d\tau^2$, temos:

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -c^2 .$$

Portanto, curvas tendo coordenadas espaciais constantes são geodésicas do tipo tempo. Segue que um pequeno vetor do tipo espaço $\xi^\mu = (0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ que dá a separação coordenada entre duas partículas vizinhas é constante. Contudo, isso não significa que a separação espacial que leva em conta a distorção do espaço tempo d pela passagem da onda gravitacional é constante.

$$d^2 = \tilde{g}_{ij} \xi^i \xi^j , \tag{318}$$

onde

$$\tilde{g}_{ij} \equiv g_{ij} = (\eta_{ij} + h_{ij}) = \delta_{ij} + h_{ij} , \tag{319}$$

sendo delta δ_{ij} a métrica euclidiana. Se colocamos:

$$\zeta^i \equiv \xi^i + \frac{1}{2}h_k^i \xi^k, \quad (320)$$

então,

$$\delta_{ij} \zeta^i \zeta^j = \delta_{ij} \left(\xi^i + \frac{1}{2}h_k^i \xi^k \right) \left(\xi^j + \frac{1}{2}h_k^j \xi^k \right) = \delta_{ij} \left(\xi^i \xi^j + \frac{1}{2}\xi^i h_k^j \xi^k + \frac{1}{2}\xi^j h_k^i \xi^k \right),$$

onde negligenciamos o termo (h^2) por ser de ordem superior. Assim,

$$\delta_{ij} \zeta^i \zeta^j = \delta_{ij} \xi^i \xi^j + \frac{1}{2}\xi^i h_{ik} \xi^k + \frac{1}{2}\xi^j h_{jk} \xi^k.$$

Renomeando índices mudos, temos:

$$\delta_{ij} \zeta^i \zeta^j = \delta_{ij} \xi^i \xi^j + h_{ij} \xi^i \xi^j = (\delta_{ij} + h_{ij}) \xi^i \xi^j = d^2.$$

Isso mostra que podemos considerar $\delta_{ij} \zeta^i \zeta^j$ como (o d^2) a separação de partículas vizinhas.

No TT gauge, temos $h_i^3 = 0$, e se substituirmos essa condição em (320) teremos:

$$\zeta^3 = \xi^3 = \text{constante}.$$

Portanto, uma partícula teste que está separada na direção de propagação da onda não será afetada pela passagem da onda. Logo, a onda gravitacional é transversa. Se fizermos, $A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu}$, com α real e positivo, e $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, 0)$, então (320) nos dá:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}\alpha e_1^{ij} e^{ik_\alpha x^\alpha} \xi_j, \quad (321)$$

i.e.

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} e_1^{ij} \eta_{jk} \xi^k, \quad (322)$$

ou

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha} (e_1^{i1} \xi^1 + e_1^{i2} \xi^2). \quad (323)$$

A parte real de (323) envolverá apenas o cosseno na fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}\alpha [\cos k(x^0 - x^3)] (e_1^{i1} \xi^1 + e_1^{i2} \xi^2). \quad (324)$$

Calculamos ζ^1, ζ^2 e ζ^3 , usando $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, 0)$. Primeiro:

$$\zeta^3 = \xi^3 + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] (e_1^{31}\xi^1 + e_1^{32}\xi^2) ,$$

onde $e_1^{32} = e_1^{33} = \xi^3 = 0$, cf. Eq. (124). Portanto,

$$\zeta^3 = 0 . \quad (325)$$

Para ζ^2 , a Eq. (324) dá:

$$\zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] (e_1^{21}\xi^1 + e_1^{22}\xi^2) .$$

Como $e_1^{22} = -1$ e $e_1^{23} = 0$, tem-se

$$\zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] (-\xi^2) . \quad (326)$$

Usando a Eq. (324) para calcular ζ^1 , temos:

$$\zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] (e_1^{11}\xi^1 + e_1^{12}\xi^2) ,$$

em que $e_1^{11} = 1$ e $e_1^{12} = 0$. Dessa forma,

$$\zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] (\xi^1) . \quad (327)$$

Colecionando (325), (326) e (327), escrevemos ζ^i como:

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] \begin{pmatrix} \xi^1 \\ -\xi^2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (328)$$

ou

$$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = \left(\xi^1, \xi^2, 0 \right) + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] \left(\xi^1, -\xi^2, 0 \right) . \quad (329)$$

Agora, refazemos o mesmo procedimento desde a Eq. (321) até (327), porém para $A^{\mu\nu} = \beta e_2^{\mu\nu}$. A parte real de (320) será:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] (e_2^{i1}\xi^1 + e_2^{i2}\xi^2) .$$

Calculamos ζ^1, ζ^2 e ζ^3 , usando $\xi^i = (\xi^1, \xi^2, 0)$:

$$\zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] (e_2^{31}\xi^1 + e_2^{32}\xi^2) ,$$

onde $e_2^{31} = e_2^{32} = \xi^3 = 0$, de acordo com a Eq. (124). Portanto,

$$\zeta^3 = 0. \quad (330)$$

Para ζ^2 :

$$\zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] (e_2^{21}\xi^1 + e_2^{22}\xi^2) ,$$

em que $e_2^{22} = 0$ e $e_2^{21} = 1$. Logo:

$$\zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] (\xi^1) . \quad (331)$$

Para ζ^1 :

$$\zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] (e_2^{11}\xi^1 + e_2^{12}\xi^2) ,$$

onde $e_2^{12} = 1$ e $e_2^{11} = 0$. Por isso:

$$\zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] (\xi^2) . \quad (332)$$

Eqs. (330), (331) e (332) são colecionadas no vetor $\vec{\zeta}$:

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (333)$$

i.e.

$$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = \left(\xi^1, \xi^2, 0 \right) + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] \left(\xi^2, \xi^1, 0 \right) . \quad (334)$$

Reunindo as equações (329) e (334), temos:

$$\begin{cases} \vec{\zeta} = \left(\xi^1, \xi^2, 0 \right) + \frac{1}{2}\alpha [\cos k (x^0 - x^3)] \left(\xi^1, -\xi^2, 0 \right) , & \text{para } A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu} \\ \vec{\zeta} = \left(\xi^1, \xi^2, 0 \right) + \frac{1}{2}\beta [\cos k (x^0 - x^3)] \left(\xi^2, \xi^1, 0 \right) , & \text{para } A^{\mu\nu} = \beta e_2^{\mu\nu} \end{cases} \quad (335)$$

Dado que a onda gravitacional é uma onda transversal, então, não haverá diferença na distância entre as partículas teste na direção do eixo de propagação da onda gravitacional; porém, acontecerá diferentemente nas direções das outras coordenadas. Tomemos como ponto de partida um círculo de partículas teste, e consideraremos o efeito das relações de (335) que descrevem a passagem da onda pelo sistema. Para a análise, tomemos os valores particulares do cosseno no conjunto $\{-1, 0, 1\}$, ou seja, ajustamos os valores de $k(x^0 - x^3)$ para que tal resultado aconteça. Da primeira relação de (335), teremos:

(i) Para $\cos k(x^0 - x^3) = 0$:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 \end{cases} . \quad (336)$$

(ii) Para $\cos k(x^0 - x^3) = 1$:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\alpha\xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 - \frac{1}{2}\alpha\xi^2 \end{cases} . \quad (337)$$

(iii) Para $\cos k(x^0 - x^3) = -1$:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 - \frac{1}{2}\alpha\xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\alpha\xi^2 \end{cases} . \quad (338)$$

Como é adotado um anel de partícula de testes, temos que para o caso (336) não há diferenças entre as distâncias relativas entre as partículas, assim, o círculo permanece como estava quando a onda passa pelo conjunto, ou seja, não há perturbação do anel para o valor $\cos k(x^0 - x^3) = 0$. Para (337), vemos um alongamento no eixo ζ^1 provocado pela adição da quantidade $\alpha\xi^1/2$ à ξ^1 , e um encurtamento da distancia no eixo ζ^2 causado pela subtração da quantidade $\alpha\xi^2/2$ de ξ^2 . No caso da Eq. (338), temos o contrário: há um encurtamento no eixo ζ^1 e um alongamento no eixo ζ^2 , observa-se a diferença de sinais entre a primeira e a segunda linhas.²⁹ Isso explica o padrão de alongamento do anel de partículas na forma de cruz (+) que vemos na primeira linha da Fig. 2. Esse é o primeiro modo de polarização da onda gravitacional, muitas vezes representado como h_+ .

Agora, tomemos a segunda relação de (335), a que diz respeito ao modo de polarização $e_2^{\mu\nu}$. Teremos:

²⁹Essa conclusão só é possível dado que tomamos α como um número real e positivo. A possibilidade de um α complexo é eliminada quando tomamos a parte real da exponencial que garante o comportamento oscilatório da onda gravitacional.

(i) Para $\cos k(x^0 - x^3) = 0$:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 \\ \zeta^2 = \xi^2 \end{cases} . \quad (339)$$

(ii) Para $\cos k(x^0 - x^3) = 1$:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 + \frac{1}{2}\beta\xi^2 \\ \zeta^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\beta\xi^1 \end{cases} . \quad (340)$$

(iii) Para $\cos k(x^0 - x^3) = -1$:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 - \frac{1}{2}\beta\xi^2 \\ \zeta^2 = \xi^2 - \frac{1}{2}\beta\xi^1 \end{cases} . \quad (341)$$

Fazemos, $(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 = R^2$ e adotamos convenientemente, com intuito de facilitar as contas, $\beta = 2$ e $R^2 = 2$. Com isso, a relação (340) dá:

$$(\xi^1 + \xi^2)^2 + (\xi^2 + \xi^1)^2 = 2 \Rightarrow \xi^1 + \xi^2 = \pm 1 ,$$

i.e.

$$\xi^1 = -\xi^2 \pm 1 ; \quad \xi^2 = -\xi^1 \pm 1 . \quad (342)$$

Substituindo a relação (342) em (340), temos:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 + (-\xi^1 \pm 1) = \pm 1 \\ \zeta^2 = \xi^2 + (-\xi^2 \pm 1) = \pm 1 \end{cases} .$$

Portanto,

$$\zeta^1 = \zeta^2 . \quad (343)$$

Essa configuração dá um alongamento do anel na direção inclinada sudeste-nordeste ao longo da reta $\zeta^2 = \zeta^1$. De modo análogo, usando a relação (341) com $\beta = 2$ e $R^2 = 2$ em $(\zeta^1)^2 + (\zeta^2)^2 = R^2$, teremos:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 - \frac{1}{2}\beta\xi^2 \\ \zeta^2 = \xi^2 - \frac{1}{2}\beta\xi^1 \end{cases} .$$

$$(\xi^1 - \xi^2)^2 + (\xi^2 - \xi^1)^2 = 2 \Rightarrow (\xi^1 - \xi^2) = \pm 1,$$

então,

$$\xi^1 = \xi^2 \pm 1; \xi^2 = \xi^1 \mp 1. \quad (344)$$

Substituindo (344) em (341), temos:

$$\begin{cases} \zeta^1 = \xi^1 - (\xi^1 \mp 1) = \pm 1 \\ \zeta^2 = \xi^2 - (\xi^2 \pm 1) = \pm 1 \end{cases}.$$

Portanto, desta vez:

$$\zeta^1 = -\zeta^2. \quad (345)$$

Essa configuração dá um alongamento do anel de partículas na direção inclinada noroeste-sudoeste ao longo da reta $\zeta^2 = -\zeta^1$. Das equações (343) e (345) temos o formato em “xis” (\times) associado à polarização $e_2^{\mu\nu}$. Essa polarização é tradicionalmente representada por h_\times . A segunda linha da Fig.2 mostra o padrão de deformação relacionado à h_\times .

APÊNDICE E — Pseudotensor Energia-Momento

O fluxo de energia de uma radiação gravitacional é expressa pelos componentes do pseudotensor de energia momento $t^{\mu\nu}$. Na ausência de uma interação gravitacional, a conservação de energia e momento é expressa pela equação relativística

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (346)$$

que implica na conservação do quadrivetor momento P definido como:³⁰

$$P_\mu = \frac{1}{c} \int T_\mu^\nu dS_\nu = \frac{1}{c} \int T_\mu^0 d^3x. \quad (347)$$

Agora, escolhendo duas superfícies Σ_1 e Σ_2 em dois valores de tempo diferentes t_1 e t_2 , temos:

$$c\Delta P_\mu = \int_{\Sigma_2} T_\mu^\nu dS_\nu - \int_{\Sigma_1} T_\mu^\nu dS_\nu = \oint_\Sigma T_\mu^\nu dS_\nu,$$

onde Σ é uma hipersuperfície fechada conectando Σ_1 e Σ_2 . Usando Teorema de Gauss:

$$c\Delta P_\mu = \oint_\Sigma T_\mu^\nu dS_\nu = \int_\Omega d^4x \partial_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (348)$$

onde a última igualdade segue da Eq. (346). Porém, na presença da gravidade, a Eq. (346) não vale, por outro lado, ela tem a forma covariante

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0. \quad (349)$$

Daí temos:

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = \partial_\nu T_\mu^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_\mu^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha T_\alpha^\nu = 0, \quad (350)$$

onde,³¹

³⁰Note-se que: $T_\mu^\nu dS_\nu = T_\mu^0 dS_0 + T_\mu^j dS_j$. O segundo termo é nulo sob a integral em (347) ao considerarmos uma hipersuperfície do tipo espaço.

³¹A Eq. (351) está demonstrado na Eq. 3.212 de Ryder (RYDER, 2009). Já a Eq. (352) é mostrada a seguir:

$$\Gamma_{\nu\mu\alpha} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}).$$

Então:

$$\Gamma_{\nu\mu\alpha} T^{\alpha\nu} = \frac{1}{2} [\partial_\mu g_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu} + (\partial_\nu g_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} T^{\alpha\nu})].$$

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\nu} = \partial_{\alpha} (\ln \sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} \sqrt{-g}, \quad (351)$$

e

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} = \Gamma_{\nu\mu\alpha} T^{\alpha\nu} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu}. \quad (352)$$

Com as equações (351) e (352), pode-se escrever (350) como:

$$\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = \partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu} + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} \sqrt{-g} \right) T_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu} = 0. \quad (353)$$

Notemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_{\nu} \sqrt{-g}) T_{\mu}^{\nu} + \partial_{\nu} T_{\mu}^{\nu}. \quad (354)$$

Renomeando o índice ν para α na Eq. (354) e substituindo o resultado em (353), temos:

$$\partial_{\nu} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu}. \quad (355)$$

A versão de (348) para o espaço-tempo curvo é:

$$c\Delta P_{\mu} = \int_{\Sigma_2} \sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu} dS_{\nu} - \int_{\Sigma_1} \sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu} dS_{\nu} = \oint_{\Sigma} \sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu} dS_{\nu} = \int_{\Omega} d^4x \partial_{\nu} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}), \quad (356)$$

que não se anula devido à (355). Para remediar essa situação, definimos o termo do lado direito da Eq. (355) — que é justamente quem deteriora a conservação — como o negativo do pseudotensor $t^{\mu\nu}$:

$$\partial_{\nu} (\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu}) \equiv -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu}. \quad (357)$$

Isso é conveniente pois, substituindo (357) em (355), temos:

$$\partial_{\nu} (\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu}) = -\partial_{\nu} (\sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu}), \quad (358)$$

assim,

$$\partial_{\nu} [\sqrt{-g} (T_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu})] = 0. \quad (359)$$

Ao renomear índices de α e ν no primeiro termo dentro do parênteses nesta última equação e usando a simetria de $g_{\mu\nu}$ e de $T^{\mu\nu}$ pela troca de índices, teremos que o único termo sobrevivente é $\partial_{\mu} g_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu}$, o que prova a Eq. (352).

Deste modo, podemos definir o quadrivetor

$$P_\mu = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} (T_\mu^\nu + t_\mu^\nu) dS_\nu, \quad (360)$$

que é conservado:

$$cP_\mu = \oint_\Sigma \sqrt{-g} (T_\mu^\nu + t_\mu^\nu) dS_\nu = \int_\Omega d^4x \partial_\nu [\sqrt{-g} (T_\mu^\nu + t_\mu^\nu)] = 0. \quad (361)$$

Em regime de campo fraco, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e a Eq. (357) reduz-se à:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = -\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta}. \quad (362)$$

onde $\tau^{\alpha\beta}$ é o tensor $T^{\alpha\beta}$ avaliado em até primeira ordem de $h_{\alpha\beta}$. Com efeito, a partir de (357), temos:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_\mu g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sqrt{-(\eta + h)} \partial_\mu (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) T^{\alpha\beta},$$

com $\eta = -1$, e $h = \det h_{\alpha\beta}$. Então:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) \simeq -\frac{1}{2} \sqrt{-(-1 + h)} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} \simeq -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}h\right) \partial_\mu h_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta}.$$

Como temos um termo de ordem superior a ser descartado, ficamos com:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = -\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta},$$

que é a Eq. (362), como queríamos mostrar.

Usando (102):

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = \square \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) = -2\chi \tau_{\alpha\beta}, \quad (363)$$

temos que

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{-2\chi} \square \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right). \quad (364)$$

Substituindo (364) em (362):

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = \frac{1}{4\chi} \left[\partial_\mu h^{\alpha\beta} \left(\partial^\nu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial^\nu \partial_\nu h \eta_{\alpha\beta} \right) \right] = \frac{1}{4\chi} \left[\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\nu \partial_\nu h \right]. \quad (365)$$

Note que:

$$\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu \partial_\nu h_{\alpha\beta} = \partial_\nu (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}) - \partial_\nu \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}, \quad (366)$$

e

$$\partial_\mu h \partial^\nu \partial_\nu h = \partial_\nu (\partial_\mu h \partial^\nu h) - \partial_\nu \partial_\mu h \partial^\nu h. \quad (367)$$

Inserindo (366) e (367) em (365), temos:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = \frac{1}{4\chi} \left\{ \partial_\nu (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\mu h \partial^\nu h) \right. \\ \left. + \left[-\partial_\nu \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu h \partial^\nu h \right] \right\}. \end{aligned} \quad (368)$$

Modificaremos o termo em colchetes da Eq. (368), mas antes observamos que:

$$-\partial_\nu \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu h \partial^\nu h = -\partial_\rho \partial_\nu h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta} \delta_\mu^\nu + \frac{1}{2} \partial_\rho \partial_\nu h \partial^\rho h \delta_\mu^\nu. \quad (369)$$

Observe agora que:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) &= \partial_\nu \partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta} + \partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial^\rho h_{\alpha\beta} \\ &= \partial_\nu \partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta} + \partial^\rho h^{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\rho h_{\alpha\beta} \\ &= 2\partial_\nu \partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

assim,

$$\frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) = \partial_\nu \partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}. \quad (370)$$

Ademais:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h) &= \partial_\nu \partial_\rho h \partial^\rho h + \partial_\rho h \partial_\nu \partial^\rho h \\ &= \partial_\nu \partial_\rho h \partial^\rho h + \partial^\rho h \partial_\rho \partial_\nu h \\ &= 2\partial_\nu \partial_\rho h \partial^\rho h, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h) = \partial_\nu \partial_\rho h \partial^\rho h. \quad (371)$$

Colocando as Eqs. (370) e (371) em (369), segue que:

$$-\partial_\nu \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu h \partial^\nu h = -\frac{1}{2} \delta_\mu^\nu \partial_\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu \partial_\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h). \quad (372)$$

Da Eq. (372) em (368), obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = \frac{1}{4\chi} \left\{ \partial_\nu (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} \partial_\nu (\partial_\mu h \partial^\nu h) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu \partial_\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu \partial_\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h) \right\}, \end{aligned} \quad (373)$$

e os colchetes da segunda linha de (368) fica alterado, como queríamos. Então,

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} t_\mu^\nu) = \frac{1}{4\chi} \partial_\nu \left\{ (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\partial_\mu h \partial^\nu h) - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h) \right\}.$$

Fatorando o sinal global de derivação, chegamos finalmente à:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} t_\mu^\nu = \frac{1}{4\chi} \left\{ (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\partial_\mu h \partial^\nu h) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu (\partial_\rho h^{\alpha\beta} \partial^\rho h_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu (\partial_\rho h \partial^\rho h) \right\}, \end{aligned} \quad (374)$$

que é a Eq. (154) usada no capítulo 3.4.

APÊNDICE F — Equações de Campo do Modelo de Starobinsky de Ordem Superior

Neste apêndice apresentamos a derivação das equações de campo do modelo de Starobinsky de ordem superior, ou modelo de Starobinsky-Podolsky. Fazemos isso tomando a variação da integral de ação associada, Eq. (189):

$$S_{\text{EHSP}} = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right),$$

com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$. Ela contém a contribuição de Einstein-Hilbert,

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

o termo estudado por Starobinsky no contexto cosmológico,

$$S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa_0} R^2 \right),$$

e o termo inspirado na contribuição de Podolsky (PODOLSKY; SCHWED, 1948),

$$S_P = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right).$$

Ao estudar a variação da ação completa, podemos usar a propriedade de linearidade da operação de variação δ , calcular a variação de cada termo separadamente — δS_{EH} , δS_S e δS_P — e, então, somar os resultados para obter δS_{EHSP} :

$$\delta S_{\text{EHSP}} = \delta S_{\text{EH}} + \delta S_S + \delta S_P. \quad (375)$$

O cálculo de δS_{EH} foi feito na Seção 2.6.2 — vide Eq. (81) — e vale

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (376)$$

A dedução das formas explícitas de δS_S e δS_P em termos de objetos associados à curvatura constam das seções a seguir.

Variação do termo de Starobinsky na ação completa

O termo associado a Starobinsky é:

$$S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \delta \left(\sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa_0} R^2 \right) .$$

Logo,

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \int d^4x \left[\delta (\sqrt{-g}) R^2 + \sqrt{-g} \delta (R^2) \right] ,$$

ou,

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \int d^4x \left[\delta (\sqrt{-g}) R^2 + 2\sqrt{-g} R \delta (R) \right] . \quad (377)$$

As variações $\delta (\sqrt{-g})$ e $\delta (R)$ são (DE SABBATA; GASPERINI, 1985):

$$\delta (\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} , \quad (378)$$

e

$$\delta (R) = \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu}) . \quad (379)$$

Substituindo em (377) e colocando $\sqrt{-g}$ em evidência, temos:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 (\delta g^{\mu\nu}) + 2R R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) + 2R g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \right] . \quad (380)$$

Pela identidade de Palatini (RYDER, 2009),

$$\delta (R_{\mu\nu}) = \nabla_\alpha \delta (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu \delta (\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) . \quad (381)$$

Agora precisamos escrever as variações de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ e $\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$ usando a forma funcional dos Símbolos de Christoffel em termos do tensor métrico. De fato:

$$\delta (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = \delta \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \right] ,$$

i.e.

$$\begin{aligned} \delta (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \delta (g^{\alpha\beta}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [\delta (\partial_\mu g_{\nu\beta}) + \delta (\partial_\nu g_{\beta\mu}) - \delta (\partial_\beta g_{\mu\nu})] . \end{aligned} \quad (382)$$

Porém, a métrica é um tensor recíproco:

$$g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\rho} = \delta_\rho^\alpha ,$$

assim, fazendo uma pequena variação no campo $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ conforme (RYDER, 2009), temos:

$$\begin{aligned} \delta_\rho^\alpha &= (g^{\alpha\sigma} + \delta g^{\alpha\sigma}) (g_{\sigma\rho} + \delta g_{\sigma\rho}) \\ &= g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\rho} + g^{\alpha\sigma} \delta (g_{\sigma\rho}) + g_{\sigma\rho} \delta (g^{\alpha\sigma}) + \delta g^{\alpha\sigma} \delta (g_{\sigma\rho}) . \end{aligned}$$

Descartando $\delta g^{\alpha\sigma} \delta g_{\sigma\rho}$ como infinitésimo de segunda ordem,

$$g^{\alpha\sigma} \delta (g_{\sigma\rho}) = -g_{\sigma\rho} \delta (g^{\alpha\sigma}) .$$

Aplicando $g^{\rho\beta}$ em ambos lados:

$$g^{\rho\beta} g^{\alpha\sigma} \delta (g_{\sigma\rho}) = -g^{\rho\beta} g_{\sigma\rho} \delta (g^{\alpha\sigma}) ,$$

ou

$$\delta (g^{\alpha\beta}) = -g^{\rho\beta} g^{\alpha\sigma} \delta (g_{\sigma\rho}) . \quad (383)$$

Substituindo esse termo em (382), temos:

$$\begin{aligned} \delta (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) (-g^{\rho\beta} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\sigma\rho})] \\ &\quad + \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} (\delta (\partial_\mu g_{\nu\beta}) + \delta (\partial_\nu g_{\beta\mu}) - \delta (\partial_\beta g_{\mu\nu}))] , \end{aligned}$$

onde reconhecemos $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Fazendo a mudança de índice $\sigma \rightarrow \beta$,

$$\delta (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = -g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\delta (\partial_\mu g_{\nu\beta}) + \delta (\partial_\nu g_{\beta\mu}) - \delta (\partial_\beta g_{\mu\nu})) . \quad (384)$$

Além disso:

$$\nabla_\mu \delta (g_{\nu\beta}) = \delta \partial_\mu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \delta g_{\rho\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\rho \delta g_{\nu\rho} ,$$

ou seja,

$$\delta \partial_\mu g_{\nu\beta} = \nabla_\mu \delta (g_{\nu\beta}) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \delta g_{\rho\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\rho \delta g_{\nu\rho} .$$

Fazendo a permutação cíclica dos índices:

$$\begin{aligned}\delta\partial_\mu g_{\nu\beta} &= \nabla_\mu\delta(g_{\nu\beta}) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho\delta g_{\rho\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\rho\delta g_{\nu\rho}; \\ \delta\partial_\nu g_{\beta\mu} &= \nabla_\nu\delta(g_{\beta\mu}) + \Gamma_{\nu\beta}^\rho\delta g_{\rho\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\rho\delta g_{\beta\rho}; \\ -\delta\partial_\beta g_{\mu\nu} &= -\nabla_\beta\delta(g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\beta\mu}^\rho\delta g_{\rho\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\rho\delta g_{\mu\rho}.\end{aligned}$$

Somando as equações acima, observando que

$$\Gamma_{\mu\beta}^\rho\delta g_{\nu\rho} - \Gamma_{\beta\mu}^\rho\delta g_{\rho\nu} = 0,$$

e

$$\Gamma_{\nu\beta}^\rho\delta g_{\rho\mu} - \Gamma_{\beta\nu}^\rho\delta g_{\mu\rho} = 0,$$

e que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho\delta g_{\rho\beta} = \Gamma_{\nu\mu}^\rho\delta g_{\beta\rho},$$

então, temos:

$$[\delta\partial_\mu g_{\nu\beta} + \delta\partial_\nu g_{\beta\mu} - \delta\partial_\beta g_{\mu\nu}] = [\nabla_\mu\delta(g_{\nu\beta}) + \nabla_\nu\delta(g_{\beta\mu}) - \nabla_\beta\delta(g_{\mu\nu})] + 2\Gamma_{\mu\nu}^\rho\delta g_{\rho\beta}. \quad (385)$$

Substituindo (385) em (384):

$$\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = -g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\rho + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\nabla_\mu\delta(g_{\nu\beta}) + \nabla_\nu\delta(g_{\beta\mu}) - \nabla_\beta\delta(g_{\mu\nu})] + g^{\alpha\beta}\Gamma_{\mu\nu}^\rho\delta g_{\rho\beta},$$

i.e.

$$\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\nabla_\mu\delta(g_{\nu\beta}) + \nabla_\nu\delta(g_{\beta\mu}) - \nabla_\beta\delta(g_{\mu\nu})]. \quad (386)$$

Uma observação importante é que $\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)$ é um tensor o que não acontece com $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, afinal $\delta\Gamma$ depende do tensor métrico e de derivadas covariantes (as quais são, como vimos, tensores).

Agora, substituindo a Eq. (386) na identidade de Palatini (381), temos:

$$\begin{aligned}\delta(R_{\mu\nu}) &= \nabla_\alpha \left\{ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu\delta(g_{\nu\beta}) + \nabla_\nu\delta(g_{\beta\mu}) - \nabla_\beta\delta(g_{\mu\nu})] \right\} \\ &\quad - \nabla_\nu \left\{ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu\delta(g_{\alpha\beta}) + \nabla_\alpha\delta(g_{\beta\mu}) - \nabla_\beta\delta(g_{\mu\alpha})] \right\}.\end{aligned} \quad (387)$$

Ainda, a partir de (383), segue que:

$$\delta(g_{\mu\sigma}) = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta(g^{\rho\nu}) . \quad (388)$$

Fazendo a substituição de (388) em (387), resulta:

$$\begin{aligned} \delta(R_{\mu\nu}) = & -\nabla_\alpha \left\{ \frac{1}{2} [\nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g_{\sigma\beta}) g_{\nu\rho} \delta(g^{\rho\sigma}) + \nabla_\nu (g^{\alpha\beta} g_{\beta\rho}) g_{\sigma\mu} \delta(g^{\rho\sigma}) - \nabla_\beta g^{\alpha\beta} g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} \delta(g^{\rho\sigma})] \right\} \\ & + \nabla_\nu \left\{ \frac{1}{2} [\nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\rho}) g_{\sigma\beta} \delta(g^{\rho\sigma}) + \nabla_\alpha (g^{\alpha\beta} g_{\beta\rho}) g_{\sigma\mu} \delta(g^{\rho\sigma}) - \nabla_\beta (g^{\alpha\beta} g_{\sigma\alpha}) g_{\mu\rho} \delta(g^{\rho\sigma})] \right\} , \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \delta(R_{\mu\nu}) = & -\frac{1}{2} \nabla_\alpha \{ [g_{\nu\rho} \nabla_\mu \delta(g^{\rho\alpha}) + g_{\sigma\mu} \nabla_\nu \delta(g^{\alpha\sigma}) - g^{\alpha\beta} g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} \nabla_\beta \delta(g^{\rho\sigma})] \} \\ & + \frac{1}{2} \nabla_\nu \{ [g_{\sigma\beta} \nabla_\mu \delta(g^{\beta\sigma}) + g_{\sigma\mu} \nabla_\alpha \delta(g^{\alpha\sigma}) - g_{\mu\rho} \nabla_\beta \delta(g^{\rho\beta})] \} . \end{aligned}$$

Porém, é necessário encontrar $g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu})$ para uso posterior em (380). Então:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) = & -\frac{1}{2} \nabla_\alpha \{ [(\delta_\rho^\mu) \nabla_\mu \delta(g^{\rho\alpha}) + (\delta_\sigma^\nu) \nabla_\nu \delta(g^{\alpha\sigma}) - (\delta_\rho^\nu) g_{\sigma\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \delta(g^{\rho\sigma})] \} \\ & + \frac{1}{2} \nabla_\nu \{ [g^{\mu\nu} g_{\sigma\beta} \nabla_\mu \delta(g^{\beta\sigma}) + (\delta_\sigma^\nu) \nabla_\alpha \delta(g^{\alpha\sigma}) - (\delta_\rho^\nu) \nabla_\beta \delta(g^{\rho\beta})] \} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) = & \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta) g_{\sigma\nu} \delta(g^{\nu\sigma}) + (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu) \frac{1}{2} g_{\sigma\beta} \delta(g^{\beta\sigma}) \\ & - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\mu \delta(g^{\mu\alpha}) - \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\beta \delta(g^{\nu\beta}) . \end{aligned}$$

Assim, renomeando índices, temos:

$$g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \square g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \square g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta(g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta(g^{\mu\nu}) .$$

Logo,

$$g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) = \square g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta(g^{\mu\nu}) , \quad (389)$$

que é a Eq. (198) do texto principal. Substituindo essa relação em (380), teremos:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 \delta g^{\mu\nu} + 2RR_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) + 2R [\square g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta (g^{\mu\nu})] \right\} .$$

Podemos reescrevê-la como:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} \right) \delta (g^{\mu\nu}) + 2 \int d^4x \sqrt{-g} [R \square g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) - R \nabla_\mu \nabla_\nu \delta (g^{\mu\nu})] \right\} .$$

Definimos:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2RR_{\mu\nu} \right) \delta (g^{\mu\nu}) + 2I \right\} , \quad (390)$$

onde

$$I \equiv \int d^4x \sqrt{-g} [R \square g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) - R \nabla_\mu \nabla_\nu \delta (g^{\mu\nu})] .$$

Definindo:

$$m \equiv g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) \text{ e } m^{\mu\nu} \equiv \delta (g^{\mu\nu}) , \quad (391)$$

temos:

$$\begin{aligned} I &= \int d^4x \sqrt{-g} [R \square m - R \nabla_\mu \nabla_\nu m^{\mu\nu}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} R \nabla_\sigma \nabla^\sigma m - \int d^4x \sqrt{-g} R \nabla_\mu \nabla_\nu m^{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Usando que $R \nabla_\sigma \nabla^\sigma m = \nabla_\sigma (R \nabla^\sigma m) - \nabla_\sigma R \nabla^\sigma m$, e $R \nabla_\mu \nabla_\nu m^{\mu\nu} = \nabla_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) - \nabla_\mu R \nabla_\nu m^{\mu\nu}$, resulta que:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma (R \nabla^\sigma m) - \nabla_\sigma R \nabla^\sigma m] - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) - \nabla_\mu R \nabla_\nu m^{\mu\nu}] , \quad (392)$$

que tem a forma

$$I = J - K, \quad (393)$$

onde

$$J \equiv \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma (R \nabla^\sigma m) - \nabla_\sigma R \nabla^\sigma m], \quad (394)$$

e

$$K \equiv \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) - \nabla_\mu R \nabla_\nu m^{\mu\nu}]. \quad (395)$$

A seguir, vamos trabalhar com a integral J . Temos:

$$J = \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\sigma (R \partial^\sigma m) + \Gamma_{\sigma\alpha}^\sigma (R \partial^\alpha m)] - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma R \nabla^\sigma m].$$

Observando que (DE SABBATA; GASPERINI, 1985)

$$\Gamma_{\sigma\alpha}^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g}, \quad (396)$$

e,

$$\nabla_\sigma R \nabla^\sigma m = \nabla_\sigma [(\nabla^\sigma R) m] - (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m,$$

temos:

$$J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\partial_\sigma (R \partial^\sigma m) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} (R \partial^\alpha m) \right] - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma [(\nabla^\sigma R) m] - (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m],$$

ou

$$J = \int d^4x [\sqrt{-g} \partial_\sigma (R \partial^\sigma m) + \partial_\alpha \sqrt{-g} (R \partial^\alpha m)] - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma [(\nabla^\sigma R) m] - (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m].$$

Renomeando índices do primeiro termo e percebendo que são uma derivada total,

$$J = \int d^4x \partial_\sigma (\sqrt{-g} R \partial^\sigma m) - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma [(\nabla^\sigma R) m] - (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m].$$

Pelo teorema de Gauss a primeira integral dá um termo de superfície e não contribui. Assim:

$$J = - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma [(\nabla^\sigma R) m] - (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m] . \quad (397)$$

Agora calcularemos K , Eq. (395). Veja:

$$\begin{aligned} K &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu R \nabla_\nu m^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ \partial_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu (R \nabla_\nu m^{\alpha\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu (R \nabla_\nu m^{\mu\alpha}) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (R \nabla_\alpha m^{\mu\nu}) \} \\ &\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} \} . \end{aligned}$$

Renomeando índices de $\nu \leftrightarrow \alpha$,

$$\begin{aligned} K &= \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu (R \nabla_\nu m^{\alpha\nu})] \\ &\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} \} , \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} K &= \int d^4x [\sqrt{-g} \partial_\mu (R \nabla_\nu m^{\mu\nu}) + \partial_\alpha \sqrt{-g} (R \nabla_\nu m^{\alpha\nu})] \\ &\quad - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} \} . \end{aligned}$$

Percebemos a derivada total no primeiro termo renomeando índices. Ficamos com:

$$K = \int d^4x \partial_\mu [\sqrt{-g} (R \nabla_\nu m^{\mu\nu})] - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} \} .$$

A primeira integral dá termos de superfície e não contribui para a variação da ação. Dessa forma:

$$K = - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} \} . \quad (398)$$

Inserindo (394) e (395) em (393), temos:

$$\begin{aligned}
I &= \left\{ - \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\sigma [(\nabla^\sigma R) m] - (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m] \right\} \\
&\quad - \left\{ - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} \} \right\} \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [(\partial^\sigma R) m] - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu \partial_\mu R) m^{\mu\nu} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] .
\end{aligned}$$

Tomemos a primeira integral:

$$\begin{aligned}
A &\equiv - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [(\partial^\sigma R) m] \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} \{ \partial_\sigma [(\partial^\sigma R) m] + \Gamma_{\sigma\alpha}^\sigma [(\partial^\alpha R) m] \} \\
&= - \int d^4x \{ \sqrt{-g} \partial_\sigma [(\partial^\sigma R) m] + \partial_\alpha \sqrt{-g} [(\partial^\alpha R) m] \} ,
\end{aligned}$$

i.e.

$$A = - \int d^4x \partial_\sigma \{ \sqrt{-g} [(\partial^\sigma R) m] \} ,$$

que também é termo de superfície e não contribuirá. Então, a integral para I acima torna-se:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m . \quad (399)$$

Seja:

$$B \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu [(\nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] .$$

Temos:

$$\begin{aligned}
B &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ \partial_\nu [(\partial_\mu R) m^{\mu\nu}] - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha [(\partial_\alpha R) m^{\mu\nu}] + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu [(\partial_\mu R) m^{\alpha\nu}] + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu [(\partial_\mu R) m^{\mu\alpha}] \} \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \partial_\nu [(\partial_\mu R) m^{\mu\nu}] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} [(\partial_\mu R) m^{\mu\alpha}] \right\} ,
\end{aligned}$$

onde usamos (396). Então:

$$B = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \partial_\nu [(\partial_\mu R) m^{\mu\nu}] + \partial_\alpha \sqrt{-g} [(\partial_\mu R) m^{\mu\alpha}] \right\} .$$

Após renomeação de índices mudos, percebemos que:

$$B = \int d^4x \partial_\nu \left\{ \sqrt{-g} [(\partial_\mu R) m^{\mu\nu}] \right\} .$$

Assim, vemos que a integral B também é termo de superfície e não contribui para a ação. A Eq. (399) fica:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) m - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) m^{\mu\nu}] .$$

Substituindo as definições (391) $m \equiv g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})$ e $m^{\mu\nu} \equiv \delta(g^{\mu\nu})$, resulta:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) \delta(g^{\mu\nu})] . \quad (400)$$

Por fim substituindo a Eq. (400) em (390):

$$\begin{aligned} \delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{2\kappa_0} \frac{1}{c} \left\{ \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2R R_{\mu\nu} \right) \delta(g^{\mu\nu}) \right. \\ \left. + 2 \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\sigma \nabla^\sigma R) g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}) - (\nabla_\nu \nabla_\mu R) \delta(g^{\mu\nu})] \right\} , \end{aligned}$$

que pode ser rearranjada como:

$$\delta S_S = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa_0} 2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2(\square R) g_{\mu\nu} - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu R) \right\} \delta(g^{\mu\nu}) . \quad (401)$$

Esta é a Eq. (199) usada no corpo principal do texto. É a contribuição do termo de Starobinsky para a variação da ação.

Variação do termo de Podolsky na ação completa

O termo associado a Podolsky que aparece na ação S_{EHSP} é:

$$\delta S_P = \frac{1}{2\chi} \frac{1}{c} \int d^4x \delta \left(\sqrt{-g} \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \nabla_\mu R \nabla^\mu R \right) .$$

Assim,

$$\delta S_P = \frac{1}{2\chi} \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ (\delta\sqrt{-g}) (g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \nabla_\nu R) + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\mu R \nabla_\nu R \right. \\ \left. + 2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu (\delta R)) \right\} .$$

Lembrando de (378), (379) e renomeando de índices no primeiro termo, e colocando $\sqrt{-g}$ em evidência, temos:

$$\delta S_P = \frac{1}{2\chi} \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) (g^{\rho\sigma} \nabla_\rho R \nabla_\sigma R) \right. \\ \left. + (\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\mu R \nabla_\nu R + 2g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu \delta R) \right\} . \quad (402)$$

Vamos estudar o último termo dessa equação. Para isso, definimos:

$$W = 2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu \delta R) . \quad (403)$$

Lembramos que

$$\nabla_\nu [g^{\mu\nu} (\nabla_\mu R) (\delta R)] = g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) + g^{\mu\nu} \nabla_\mu R (\nabla_\nu \delta R) . \quad (404)$$

Substituindo (404) em (403) temos:

$$W = 2 \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\nu (g^{\mu\nu} \nabla_\mu R \delta R) - g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R)] .$$

A derivada covariante atuando em um escalar pode ser substituída por uma derivada ordinária, assim:

$$W = 2 \left[\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu (\partial^\nu R \delta R) - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) \right] \\ = 2 \left[\int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\nu (\partial^\nu R \delta R) + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu (\partial^\alpha R \delta R)] - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) \right] \\ = 2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\partial_\nu (\partial^\nu R \delta R) + \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g} \right) (\partial^\alpha R \delta R) \right] \\ - 2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) .$$

Logo,

$$W = 2 \int d^4x [\sqrt{-g} \partial_\nu (\partial^\nu R \delta R) + \partial_\alpha \sqrt{-g} (\partial^\alpha R \delta R)] - 2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) . \quad (405)$$

Percebemos que a primeira linha de (405) é:

$$\int d^4x [\sqrt{-g} \partial_\nu (\partial^\nu R \delta R) + \partial_\nu \sqrt{-g} (\partial^\nu R \delta R)] = \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} \partial^\nu R \delta R) . \quad (406)$$

A substituição de (406) em (405) implica que:

$$W = 2 \left[\int d^4x [\partial_\nu (\sqrt{-g} \partial^\nu R \delta R)] - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) \right] .$$

A primeira integral não contribui para a ação porque é um termo de superfície. Dessa forma,

$$W = -2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) (\delta R) . \quad (407)$$

Empregando a Eq. (379) em (407) resulta:

$$W = -2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) [R_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} \delta (R_{\mu\nu})] . \quad (408)$$

Devido à Eq. (389), a equação acima torna-se:

$$\begin{aligned} W &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \nabla_\mu R) [R_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} \square \delta (g^{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta (g^{\mu\nu})] \\ &= -2 \int d^4x \sqrt{-g} (\square R) [R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square - \nabla_\mu \nabla_\nu] \delta (g^{\mu\nu}) , \end{aligned}$$

i.e,

$$W = \int d^4x \sqrt{-g} [-2 \square R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R] \delta (g^{\mu\nu}) . \quad (409)$$

Agora, podemos substituir (409) em (402) e colocar todos os termos $\delta (g^{\mu\nu})$ em evidência, obtendo:

$$\delta S_P = \frac{1}{2\chi} \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma R \nabla_\sigma R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2 \square R R_{\mu\nu} \right. \\ \left. - 2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R \delta g^{\mu\nu} \right\}, \quad (410)$$

que é a Eq. (202). Trata-se da contribuição de Podolsky para a variação da ação do modelo de Starobinsky de ordem superior.

As equações de campo da ação completa

Substituindo (376), (401) e (410) em (375), temos:

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa_0} \left[2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2(\square R) g_{\mu\nu} - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu R) \right] \\ \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma R \nabla_\sigma R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2 \square R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R \right) = 0. \quad (411)$$

Porém, a ação completa inclui a lagrangiana de matéria, ou seja

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{\chi} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_g) - \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \right\} = 0,$$

em que o primeiro termo dá justamente o lado esquerdo de (411). Definimos a variação da Lagrangiana de matéria (DE SABBATA; GASPERINI, 1985) como:

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Com isso, escrevemos finalmente:

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa_0} \left[2R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \right) + 2(\square R) g_{\mu\nu} - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu R) \right] \\ \frac{\beta}{2\kappa_0^2} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma R \nabla_\sigma R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2 \square R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \square^2 R + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \square R \right) = \chi T_{\mu\nu}. \quad (412)$$

Esta é a Eq. (203), a equação de campo da teoria de gravitação de Starobinsky de ordem superior.

APÊNDICE G — Atingibilidade do Calibre Harmônico para o Modo Tensorial $\tilde{h}_{\mu\nu}$

No Apêndice C foi mostrado que as equações de campo linearizadas da RG podem ser simplificadas aplicando o calibre harmônico, dado pela Eq. (95), desde que a condição (96) seja satisfeita pelo parâmetro da transformação infinitesimal de coordenadas. Assim, a construção da equação de onda apresentada na Eq. (104) é consistente. O roteiro de cálculo das ondas gravitacionais na RG nos motiva a encontrar um calibre harmônico generalizado para o modo tensorial das OGs no modelo Starobinsky-Podolsky. Faz-se necessário que o calibre harmônico generalizado satisfaça a condição de gauge generalizada.

O procedimento é similar ao do Apêndice C. Dessa forma, começaremos estudando a lei de transformação para o modo de spin dois $\tilde{h}_{\mu\nu}$, o qual aparece na Eq. (224):

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \tilde{h}_{\mu\nu} - K_1 \eta_{\mu\nu} (\Phi + K_3 \beta_0 \Psi) . \quad (413)$$

Usaremos as definições de Φ , Eq. (219), e a definição de Ψ , Eq. (220). Com isso, reescrevemos a Eq. (413), como:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\alpha - \beta \square) R ,$$

onde renomeamos as constantes K_1 e $K_3 \beta_0$ como α e β , respectivamente. Agora, escrevemos a lei transformação para a equação acima utilizando as Eqs. (314) e (94). Temos:³²

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\mu} \partial_\nu \xi^\alpha - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha$$

³²Da Eq. (219), resulta:

$$\begin{aligned} R' &= (\square h' - \partial^\alpha \partial^\beta h'_{\alpha\beta}) \\ &= \square (h - 2\partial_\alpha \xi^\alpha) - \partial^\alpha \partial^\beta (h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha) \\ &= \square h - 2 \square \partial_\alpha \xi^\alpha - \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\beta \square \xi_\beta - \partial^\alpha \square \xi_\alpha \\ &= \square h - \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} = R . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}'_{\mu\nu} &= \bar{h}'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\alpha - \beta \square) R' = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h' - \eta_{\mu\nu} (\alpha - \beta \square) R' \\
&= h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h - 2\partial_\alpha \xi^\alpha) - \eta_{\mu\nu} (\alpha - \beta \square) R \\
&= \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha - \eta_{\mu\nu} (\alpha - \beta \square) R \\
&= [\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\alpha - \beta \square) R] - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha .
\end{aligned}$$

Tomando a divergência da equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
\partial^\nu \tilde{h}'_{\mu\nu} &= \partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu - \partial^\nu \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial^\nu \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= \partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu - \partial^\nu \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \xi^\nu ,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\partial^\nu \tilde{h}'_{\mu\nu} = \partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu .$$

Assim, podemos escolher uma transformação de coordenadas $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ tal que:

$$\square \xi_\mu = \partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} .$$

Isso conduz à:

$$\partial^\nu \tilde{h}'_{\mu\nu} = 0 .$$

A liberdade de calibre residual ainda permite fixar:

$$\square \xi_\mu = 0 . \tag{414}$$

As duas últimas equações levam à Eq. (226),

$$\partial^\nu \tilde{h}_{\mu\nu} = 0 .$$

Este resultado, em conjunto com a Eq. (414), garante a consistência do tratamento desenvolvido na Seção 4.3.

APÊNDICE H — Soluções da Função de Green para o Modo Escalar Φ_-

Solução para o caso não-massivo

A solução de Φ_- admite a possibilidade de um termo massivo e um termo não-massivo. Nesta subseção do apêndice discutiremos a solução não-massiva. Primeiramente, calculamos a função de Green para esse caso e, em seguida, avaliamos a solução para Φ_- utilizando a função de Green encontrada. Com isso, mostramos que esta solução está presente na equação final para Φ_- , mais especificamente, no primeiro termo da Eq. (290).

Para a Eq. (271) sob a condição $m_- = 0$, temos:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x^{\nu}) = -\frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dq \text{sen}(qs) \text{sen}(qc\tau) . \quad (415)$$

O argumento da integral acima é par, o que nos permite escrevê-la como:³³

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dq \text{sen}(qs) \text{sen}(qc\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \left\{ \frac{1}{2} [\cos(qs - qc\tau) - \cos(qs + qc\tau)] \right\} \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dq \{ \cos[q(s - c\tau)] - \cos[q(s + c\tau)] \} \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dq \left\{ \frac{e^{iq(s-c\tau)} + e^{-iq(s-c\tau)}}{2} - \frac{e^{iq(s+c\tau)} + e^{-iq(s+c\tau)}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(s-c\tau)} - \int_{\infty}^{-\infty} dq e^{iq(s-c\tau)} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(s+c\tau)} + \int_{\infty}^{-\infty} dq e^{iq(s+c\tau)} \right\} . \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $q \rightarrow -q$ na segunda e quarta integral, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dq \text{sen}(qs) \text{sen}(qc\tau) &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(s-c\tau)} - \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(s+c\tau)} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{4} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(s-c\tau)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(s+c\tau)} \right\} , \end{aligned}$$

³³Note-se que:

$$\begin{aligned} [\cos(qs - qc\tau) - \cos(qs + qc\tau)] &= \cos(qs) \cos(qc\tau) + \sin(qs) \sin(qc\tau) - [\cos(qs) \cos(qc\tau) - \sin(qs) \sin(qc\tau)] \\ &= 2 \sin(qs) \sin(qc\tau) . \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_0^\infty dq \operatorname{sen}(qs) \operatorname{sen}(qc\tau) = \frac{2\pi}{4} \{ \delta(s - c\tau) - \delta(s + c\tau) \} . \quad (416)$$

Substituindo (416) em (415), resulta:³⁴

$$G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} [\delta(s - c\tau) - \delta(s + c\tau)] , \quad (417)$$

que é a Eq. (273) do texto principal. Podemos reescrever ainda como:³⁵

$$\begin{aligned} G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} [\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - (ct - ct')) - \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + (ct - ct'))] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} \frac{1}{c} \left[\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) - \delta\left(t' - \left(t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) \right] . \end{aligned} \quad (418)$$

Agora usamos $G_\Phi(x^\nu; x'^\nu)$ para calcular Φ_- . Então, substituindo a Eq. (418) em (258), resulta em:

$$\Phi_-(x^\mu) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \int \frac{1}{s} \left[\delta\left(\frac{s}{c} - \tau\right) - \delta\left(\frac{s}{c} + \tau\right) \right] Q(x'^\mu) d^4x' , \quad (419)$$

sob a condição $t' < t$. Temos:

$$\begin{aligned} \Phi_-(x^\mu) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \int_{t' < t} dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) Q(\mathbf{x}', t') \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \int_{t' < t} dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' - \left(t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right) Q(\mathbf{x}', t') . \end{aligned}$$

A segunda integral desaparece devido à propriedade do delta, que seleciona $t' = t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} > t$,

³⁴O segundo delta em (418) impõe – vide Eq. (270):

$$t' = t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} > t .$$

mas isso está em contradição com a condição inicial $t' < t$. Em outras palavras, a função Green deve ser zero para $t' < t$, e essa é precisamente a circunstância exigida pelo segundo delta; portanto, ele não deve contribuir para a integral da solução Φ_- . Isso é explicado matematicamente nas etapas abaixo em que calculamos Φ_- .

³⁵Note-se a seguinte propriedade da função delta:

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|} .$$

Em nossos cálculos $g(x) = cx$. Então, $g' = c$ e,

$$\delta(cx) = \frac{1}{c} \delta(x) .$$

enquanto que a integral deve ser avaliada em $t' < t$. Ficamos com:

$$\Phi_{-}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{Q(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (420)$$

onde definimos o tempo retardado:

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}. \quad (421)$$

Usando a Eq. (255) em (420), escrevemos finalmente:

$$\Phi_{-}(\mathbf{x}, t) = \frac{\chi}{3} \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{T(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (422)$$

que é a solução para o modo escalar Φ_{-} no caso não-massivo. A Eq. (422) é o primeiro termo da solução geral para Φ_{-} na Eq. (290).

Soluções para as separações da função de Green

A Eq. (281),

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[-im_{-}(c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta)] - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp[im_{-}(c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta)] \right\},$$

precisa obedecer a relação (282),

$$t > t',$$

pois, caso contrário, temos a função de Green nula, como na Eq. (267). Há três condições envolvendo as variáveis $c\tau$ e s consistentes a relação (282). O primeiro caso a ser estudado é uma separação tipo-tempo ($c\tau > s$), que dará uma função de Green em termos de uma função de Bessel. Vejamos.

I) Separação tipo-tempo $c\tau > s$. Neste caso:

$$c\tau = (ct - ct') > s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|,$$

ou

$$t > t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c},$$

ou ainda,

$$t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} > t'.$$

Se esta condição é satisfeita, então, conseqüentemente $t > t'$ é satisfeita. Investiguemos essa situação fazendo a mudança de variáveis:

$$c\tau = \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh \theta .$$

$$s = \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \sinh \theta .$$

Então,

$$\begin{aligned} (c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta) &= \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} (\cosh \theta \cosh \eta - \sinh \theta \sinh \eta) \\ &= \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh (\eta - \theta) . \end{aligned} \quad (423)$$

O cosseno hiperbólico é uma função par, portanto, podemos permutar o argumento: $\cosh (\theta - \eta) = \cosh (\eta - \theta)$. Substituindo (423) em (281), resulta:

$$\begin{aligned} G_{\Phi} (x^{\nu}; x^{\nu'}) &= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[-im_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh (\eta - \theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[im_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh (\eta - \theta) \right] \right\} . \end{aligned}$$

Chamando o argumento do cosseno hiperbólico apenas de $(\eta - \theta) \rightarrow u$ e renomeando $u \rightarrow \eta$, temos:

$$\begin{aligned} G_{\Phi} (x^{\nu}; x^{\nu'}) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\exp \left[im_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh \eta \right]}{2i} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\exp \left[-im_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh \eta \right]}{2i} . \end{aligned}$$

Logo:

$$G_{\Phi} (x^{\nu}; x^{\nu'}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \operatorname{sen} \left[m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh \eta \right] .$$

O integrando é uma função par com respeito a η , uma vez que $\cosh (\eta) = \cosh (-\eta)$. Então,

$$G_{\Phi} (x^{\nu}; x^{\nu'}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ 2 \int_0^{\infty} d\eta \operatorname{sen} \left[m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \cosh \eta \right] \right\} . \quad (424)$$

Usaremos a representação integral da função de Bessel:³⁶

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(z \cosh \eta) d\eta \quad (\text{Re}[z] > 0) . \quad (425)$$

No nosso caso,

$$z = m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} ,$$

com a parte imaginária igual a zero (pois $c\tau > s$ no caso que estamos analisando). Substituindo (425) em (424):

$$G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ J_0 \left[m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \right] \right\} . \quad (426)$$

Agora,³⁷

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z) .$$

Por isso, temos:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ J_0 \left[m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \right] \right\} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} J_0(z) = \frac{1}{2} m_- \frac{(-2s)}{\sqrt{(c\tau)^2 - s^2}} [-J_1(z)] ,$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ J_0 \left[m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \right] \right\} = m_- \frac{s}{\sqrt{(c\tau)^2 - s^2}} J_1(z) . \quad (427)$$

Portanto, substituindo (427) em (426):

$$G_\Phi(x^\nu; x'^\nu) = \frac{1}{4\pi} \frac{m_-}{\sqrt{(c\tau)^2 - s^2}} J_1 \left(m_- \sqrt{(c\tau)^2 - s^2} \right) . \quad (428)$$

A Eq. (428) é escrita em termos da função de Bessel J_1 , conforme a Eq. (283) do texto principal. Essa equação conclui o estudo da função de Green para o caso de Φ_- massivo ($m_- \neq 0$) com $c\tau > s$. Neste ponto, poderíamos inserir (428) em (258) para, então, concluir o cálculo de $\Phi_-(\mathbf{x}, t)$. Antes, porém, vamos estudar a função de Green (281) para as situações em que $c\tau < s$ e $c\tau = s$.

³⁶Vide, por exemplo, Gradshteyn and Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Seção 3.714.

³⁷Veja Gradshteyn and Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products, Seção 8.473.

II) Separação tipo-espaço $c\tau < s$. Nessa circunstância, temos:

$$c\tau = (ct - ct') < r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| ,$$

que corresponde a

$$t < t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} ,$$

ou

$$t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} < t' .$$

Por outro lado, sabemos que deve valer $t' < t$. Portanto, há um intervalo permitido para esse caso:

$$t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} < t' < t .$$

Em princípio, a função de Green pode ser diferente de zero nesse intervalo. Verificar isso, exige uma análise cuidadosa, a qual começamos com a seguinte mudança de variáveis:

$$c\tau = \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh \theta . \quad (429)$$

$$s = \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \cosh \theta . \quad (430)$$

Com as trocas de variáveis dadas por (429) e (430),

$$\begin{aligned} (c\tau \cosh \eta - s \sinh \eta) &= \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} (\sinh \theta \cosh \eta - \cosh \theta \sinh \eta) \\ &= \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh (\theta - \eta) = -\sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh (\eta - \theta) , \end{aligned}$$

e a Eq. (281) transforma-se para:

$$\begin{aligned} G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) &= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[im_- \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh (\eta - \theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[-im_- \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh (\eta - \theta) \right] \right\} . \end{aligned}$$

Com uma renomeação apropriada do argumento do seno hiperbólico, obtemos:

$$\begin{aligned} G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) &= \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[im_- \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh \eta \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp \left[-im_- \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh \eta \right] \right\} , \end{aligned}$$

ou seja,

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \sin \left[m_- \sqrt{s^2 - (c\tau)^2} \sinh \eta \right] \right\}.$$

Devido a $\sinh(-\eta) = -\sinh(\eta)$, o integrando é uma função ímpar sob um intervalo simétrico. Como resultado, a integral se anula. Assim:

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = 0. \quad (431)$$

Portanto, a função de Green deve ser de zero no intervalo $c\tau < s$. A Eq. (431) encontra-se na Eq. (283) e mostra que não podemos ter uma solução tipo espaço.

III) Caso tipo-luz $c\tau = s$. Se

$$c\tau = s,$$

resulta que

$$t = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}.$$

A relação acima está de acordo com a restrição $t > t'$ e é a própria definição de tempo retardado. Logo, o caso tipo luz corresponde a uma partícula sem massa se movendo no cone de luz $c\tau = s$. Este caso foi tratado anteriormente, correspondendo à Eq. (417):³⁸

$$G_{\Phi}(x^{\nu}; x'^{\nu}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \frac{1}{s} \delta\left(\frac{s}{c} - \tau\right), \quad (432)$$

que também está presente na Eq. (283) no corpo do texto principal.

³⁸O termo $\delta(s + c\tau)$ não contribui para Φ_- , pois a restrição $t > t'$ não é obedecida.