

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

NATALIA DE CASSIA MOREIRA

PROPRIEDADES DAS COLISÕES ULTRACENTRAIS RELATIVÍSTICAS EM
Pb-Pb

POÇOS DE CALDAS / MG

2024

NATALIA DE CASSIA MOREIRA

**PROPRIEDADES DAS COLISÕES ULTRACENTRAIS RELATIVÍSTICAS EM
Pb-Pb**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física de altas energias.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Gonçalves Gardim

Coorientador: Prof. Dr. André Veiga Giannini

POÇOS DE CALDAS / MG

2024

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Campus Poços de Caldas

Moreira, Natalia de Cassia.

Propriedades das colisões ultracentrais relativísticas em Pb-Pb /
Natalia de Cassia Moreira. - Poços de Caldas, MG, 2024.
84 f. : il. -

Orientador(a): Fernando Gonçalves Gardim.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alfenas,
Poços de Caldas, MG, 2024.
Bibliografia.

1. Plasma de quarks e glúons. 2. Colisão de núcleos pesados em altas energias. 3. Hidrodinâmica relativística. 4. Momento transversal médio. I. Gardim, Fernando Gonçalves, orient. II. Título.

NATALIA DE CASSIA MOREIRA

Propriedades das colisões ultracentrais relativísticas em Pb-Pb

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação da Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física de altas energias

Aprovada em: 16 de fevereiro de 2024.

Prof. Dr. Gustavo do Amaral Valdiviesso

Presidente da Banca Examinadora

Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Fernando Gonçalves Gardim

Orientador

Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Dr. Willian Matioli Serenone

Instituição: University of Illinois At Urbana Champaign



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo do Amaral Valdiviesso, Professor do Magistério Superior**, em 05/06/2024, às 18:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1200507** e o código CRC **8652E5AD**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por todas as bênçãos concedidas.

Expresso minha profunda gratidão ao meu marido e aos meus familiares pelo constante apoio e colaboração.

Ao meu orientador e coorientador, manifesto minha sincera apreciação pela orientação paciente e dedicada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

À Unifal, sou grato pela oportunidade de desenvolver este trabalho em suas instalações.

Aos meus colegas de curso, agradeço pela amizade, companheirismo e pela valiosa troca de experiências.

Gostaria de expressar meu reconhecimento ao Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC/MCTI, Brasil) por disponibilizar recursos HPC do supercomputador SDumont através do programa embaixadores (UFGD), subprojeto FCNAE, os quais foram fundamentais para a obtenção dos resultados apresentados nesta dissertação. (URL: <http://sdumont.lncc.br>)

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, este trabalho faz parte do Projeto INCT-Física Nuclear e Aplicações, Projeto No. 464898/2014-5, ao qual sou vinculado e do qual tenho a honra de contribuir.

RESUMO

A matéria produzida em colisão de núcleos pesados em altas energias pode ser descrita a partir da hidrodinâmica relativística. Particularmente em colisões ultracentrais (sobreposição central entre os núcleos colisores) há alguns observáveis que podem ser capazes de acessar propriedades termodinâmicas deste estado (1), como por exemplo o aumento no momento transversal médio de hádrons carregados em função da multiplicidade de partículas. Argumentamos que o aumento relativo do momento transversal é dependente da velocidade do som do Plasma de Quarks e Glúons. Para tal estudo foi gerada condições iniciais para colisões de Au-Au e Pb-Pb, e através das análises das mesmas, é possível verificar que a densidade de entropia aumenta à medida que a colisão fica mais central, pois o volume se torna constante, mas a entropia continua aumentando. Ao utilizar as condições iniciais dos eventos com os parâmetros Grad da Colaboração JETSCAPE (2), identificamos um comportamento diferente na densidade de energia. Após minuciosas análises, concluímos que a largura do núcleon (w) desempenha um papel fundamental nesse comportamento da densidade de energia, influenciando, por conseguinte, o momento transversal médio. A análise mais detalhada revelou uma descoberta inédita: velocidades do som são diferentes para diferentes espécies, indicando áreas promissoras para investigações futuras.

Palavras-chave: plasma de quarks e glúons; colisão de núcleos pesados em altas energias; hidrodinâmica relativística; momento transversal médio.

ABSTRACT

The matter produced in high-energy collisions of heavy nuclei can be described using relativistic hydrodynamics. Particularly in ultracentral collisions (central overlap between the colliding nuclei), there are observables that may access the thermodynamic properties of this state, such as the increase in the average transverse momentum of charged hadrons as a function of particle multiplicity. We argue that the relative increase in transverse momentum depends on the speed of sound in the Quark-Gluon Plasma. For this study, initial conditions were generated for Au-Au and Pb-Pb collisions, and through their analysis, it is possible to observe that entropy density increases as the collision becomes more central, as the volume becomes constant while entropy continues to rise. By utilizing initial conditions from events with Grad parameters of the JETSCAPE Collaboration, we identified a different behavior in energy density. After meticulous analysis, we concluded that the nucleon width (w) plays a fundamental role in this energy density behavior, consequently influencing the average transverse momentum. Further analysis revealed a novel discovery: sound speeds vary for different species, indicating promising areas for future investigation.

Keywords: quark-gluon plasma; high-energy heavy-ion collision; relativistic hydrodynamics; mean transverse momentum.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA	8
2	HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA	15
2.1	EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS	16
2.2	A EXPANSÃO LONGITUDINAL	19
2.3	A HIDRODINÂMICA E O CONE DE LUZ	22
2.4	A CONSERVAÇÃO DO NÚMERO BARIÔNICO	25
2.5	SOLUÇÃO DA EXPANSÃO LONGITUDINAL	26
2.6	CONDIÇÕES INICIAIS	26
3	A COLABORAÇÃO JETSCAPE	35
4	TEOREMA DE BAYES	36
5	ETAPAS DAS SIMULAÇÕES	38
5.1	CONDIÇÕES INICIAIS - TRENTo	39
5.2	PRÉ-TERMALIZAÇÃO - FREE STREAMING	42
5.3	EXPANSÃO HIDRODINÂMICA - MUSIC	44
5.4	PARTICULARIZAÇÃO - IS3D	50
5.5	LISTA DE OBSERVÁVEIS - UrQMD	52
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	53
6.1	CONDIÇÕES INICIAIS MODELO GARDIM E COLABORADO, GIACALONE E OLLITRAULT	53
6.1.1	Modelo analítico	55
6.2	CONDIÇÕES INICIAIS MODELO GRAD JETSCAPE	57
6.3	SIMULAÇÃO COMPLETA PARA DIFERENTES LARGURAS DO NÚCLEON	63
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
	REFERÊNCIAS	82

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Os quarks são partículas elementares que desafiam a nossa compreensão convencional da matéria. Aparentemente desprovidos de estrutura interna, eles exibem características distintas que são importantes para nossa compreensão da física de partículas. Entre essas características, destacam-se as propriedades de sabor, apresentando variedades como up, down, strange, charm, bottom e top. Essas propriedades de sabor não apenas diferenciam diferentes classes de partículas, mas também representam graus de liberdade quânticos. Além disso, vale ressaltar que as propriedades de cor, expressas como vermelho, verde e azul, desempenham um papel fundamental nas interações fortes. Assim, ao examinarmos as propriedades de sabor e cor, mergulhamos nos graus de liberdade quânticos que definem os quarks (3).

Tabela 1 - Graus de liberdade quânticos dos léptons

Sabor	Carga elétrica	Massa (MeV/ c^2)
e (elétron)	-1	$0.51099895000 \pm (15)$
ν_e (neutrino do elétron)	0	$< 0.8 \times 10^{-6}$
μ (múon)	-1	$105.6583755 \pm (23)$
ν_μ (neutrino do múon)	0	< 0.19
τ (tau)	-1	1776.86 ± 0.12
ν_τ (neutrino do tau)	0	< 18.2

Fonte: Adaptado de (3, 4).

Nota: Todos apresentam spin igual a $\frac{1}{2}$.

De acordo com o conhecimento atual, a matéria é compreendida como sendo constituída por partículas elementares, tais como quarks e léptons. Como ilustrado nas Tabelas 1, 2 e 3, o universo das partículas fundamentais revela dezessete entidades distintas, agrupadas em três categorias principais: bósons, quarks e léptons. Enquanto quarks e léptons possuem antipartículas distintas (por exemplo, um antiquark é a antipartícula de um quark, e um antilépton é a antipartícula de um lépton), os bósons W e Z apresentam propriedades singulares em relação às suas antipartículas. No caso dos bósons W^+ , W^- , e Z^0 , o W^+ e o W^- são antipartículas um do outro, enquanto o Z^0 é sua própria antipartícula. Isso é uma característica específica desses bósons e difere do padrão observado em quarks e léptons. As antipartículas dos quarks e léptons compartilham características idênticas com suas partículas

Tabela 2 - Graus de liberdade quânticos dos quarks

Sabor	Carga elétrica	Massa (MeV/c ²)
d (down)	-1/3	4.67 ^{+0.48} _{-0.17}
u (up)	2/3	2.16 ^{+0.49} _{-0.26}
s (strange)	-1/3	93.4 ^{+8.6} _{-3.4}
c (charm)	2/3	1270 ± 20
b (bottom)	-1/3	4180 ⁺³⁰ ₋₂₀
t (top)	2/3	172690 ± 300

Fonte: Adaptado de (3, 4).

Nota: Todos apresentam spin igual a $\frac{1}{2}$.

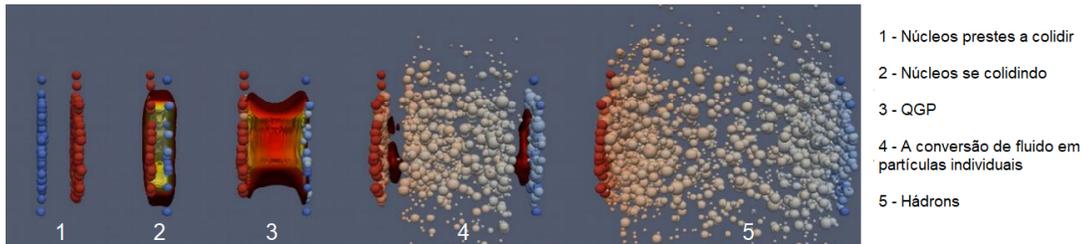
Tabela 3 - Graus de liberdade quânticos dos bósons mediadores

Mediador de Força	Carga elétrica	Massa (GeV/c ²)	Spin	Força
g (glúons)	0	0	1	Forte
γ (fóton)	0	$< 1 \times 10^{-27}$	1	Eletromagnética
W^{\pm} (carregado)	± 1	80.377 ± 0.012	1	Fraca
Z^0 (neutro)	0	91.1876 ± 0.0021	1	Fraca
Higgs	0	125.25 ± 0.17	0	..

Fonte: Adaptado de (3, 4).

correspondentes, abrangendo spin, massa, cargas elétricas opostas e números quânticos com sinais contrários. As partículas elementares são classificadas em dois grupos fundamentais: férmions e bósons. Os férmions, notáveis por seu spin de módulo semi-inteiro, dividem-se em duas subcategorias essenciais: quarks, que desempenham um papel crucial nas interações fortes, e léptons, que, por sua vez, não participam da interação forte. Por outro lado, os bósons desempenham um papel fundamental como mediadores nas interações entre férmions. Os quarks, ao interagirem entre si, experimentam variações dinâmicas em uma propriedade intrínseca chamada "cor", um conceito específico dentro da cromodinâmica quântica. Essa teoria é responsável por descrever as interações fortes entre partículas, levando em consideração a carga de cor. Essa modificação de cor é mediada pelas trocas de glúons, que desempenham um papel importante como bósons vetoriais intermediadores nas forças fortes entre quarks. O termo "bóson vetorial" refere-se a partículas que têm spin igual a 1, e os glúons se encaixam

Figura 1 - Estágios da colisão de núcleos pesados em altas energias



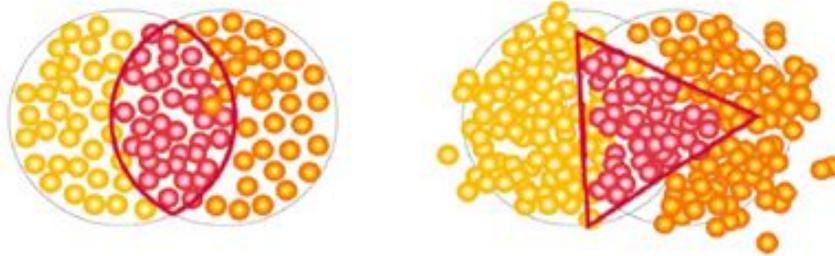
Fonte: (6).

nessa categoria. Essas partículas vetoriais são responsáveis por transmitir as interações fundamentais entre as partículas que compõem a matéria. A combinação específica de cores em conjuntos de quarks e/ou antiquarks resulta em uma composição global de cor neutra, sendo um fenômeno essencial para a formação de partículas compostas, como mésons e bárions. Vale notar que, ao contrário de muitas outras partículas, os glúons não possuem antipartículas distintas. Eles desempenham um papel importante na compreensão da estrutura da matéria em níveis subatômicos, especialmente na formação de hádrons (partículas compostas por quarks) e na dinâmica das interações fortes descritas pela cromodinâmica quântica (3) e (5). Os hádrons são partículas que exibem uma estrutura interna e são constituídos de quarks. Diferentes tipos de hádrons são classificados como: mésons e bárions. Os mésons são formados por um quark e um antiquark. Exemplos notáveis de mésons incluem píons e kaons. Os bárions são constituídos por três quarks ou três antiquarks. São exemplos de bárions os nêutrons e prótons, que são fundamentais para a estrutura dos núcleos atômicos. É importante ressaltar que os quarks não são encontrados livres na natureza; em vez disso, estão confinados dentro dos hádrons. Isso acontece devido à energia potencial entre quarks, que atinge níveis significativamente altos a distâncias críticas. Nessas condições, é possível que um novo par quark-antiquark surja do vácuo, resultando na separação do par quark-antiquark original em dois pares distintos.

As colisões relativísticas de íons pesados oferecem uma oportunidade para a exploração da cromodinâmica quântica em condições de altas temperaturas e densidades de energia, proporcionando uma compreensão mais profunda da interação forte entre quarks e glúons. A escolha específica de íons pesados nessas colisões é justificada pelo objetivo de criar

condições extremas de temperatura e densidade de energia. Íons são átomos ou moléculas que perderam ou ganharam elétrons, resultando em uma carga elétrica líquida. Durante as colisões relativísticas, a seleção de íons pesados, em oposição aos íons leves, é fundamentada em sua maior massa. Essa característica proporciona energias mais elevadas durante as colisões, resultando em temperaturas consideravelmente altas e densidades de energia intensas. O Plasma de Quarks e Glúons (ou QGP do inglês) é um estado da matéria onde quarks e glúons não estão confinados em hádrons e os graus de liberdade de cor são liberados (7). Em altas energias, à medida que as cargas de cor se aproximam, a interação entre elas enfraquece, caracterizando o fenômeno conhecido como liberdade assintótica (8) e (9). Isso significa que, em altas energias, os quarks interagem de forma cada vez mais fraca, e à medida que a energia aumenta, sua interação se assemelha cada vez mais à de partículas livres. Pressupõe que o Plasma de Quarks e Glúons tenha existido após alguns microssegundos da criação do universo primordial, composto por quarks e glúons, e após o Big Bang, teria ocorrido a formação dos primeiros prótons e nêutrons. É esperado encontrar o QGP em três lugares: no universo primordial, nos núcleos das estrelas de nêutrons e no estágio inicial de colisão de núcleos pesados em altas energias (5). Há experimentos em laboratório para produzir o Plasma de Quarks e Glúons, através de colisões núcleo-núcleo em altas energias usando aceleradores de íons pesados (5). Embora as colisões de íons pesados em altas energias, realizadas em aceleradores, ofereçam uma oportunidade para a criação do QGP, é importante destacar que essa formação não ocorre em todos os eventos. A produção do QGP depende de condições específicas durante a colisão, e ainda não compreendemos completamente os detalhes que levam à sua criação. Embora exista uma probabilidade maior de produzir o QGP em colisões de íons pesados, nem todos os eventos resultam na formação desse estado da matéria. Durante a colisão, os núcleos são acelerados e, ao se aproximarem a velocidades relativísticas, sofrendo contração de Lorentz, um fenômeno inerente à teoria da relatividade. Imediatamente, uma parte significativa da energia é concentrada em um volume extremamente pequeno, criando condições propícias para a formação do QGP em condições de altas temperaturas. Além disso, o sistema formado apresenta propriedades geométricas, como excentricidades (10). A excentricidade refere-se à anisotropia na distribuição de energia no momento inicial da colisão. Existem diferentes tipos de excentricidades, ε_n , onde n é a ordem da excentricidade: $n = 2$ é

Figura 2 - As excentricidades elíptica e triangular de uma colisão



Fonte: (10).

associada à forma elíptica, $n = 3$ à triangular e $n = 4$ à quadrangular. As excentricidades são frequentemente expressas em termos de coeficientes de Fourier, que descrevem a decomposição da distribuição angular das partículas. As excentricidades são definidas da seguinte maneira (10):

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\langle r^n \cos(n\phi) \rangle^2 + \langle r^n \sin(n\phi) \rangle^2}{\langle r^n \rangle}}, \quad (1)$$

onde r é a coordenada radial e ϕ é o ângulo azimutal (em coordenadas polares).

A centralidade em colisões de íons pesados refere-se à medida da sobreposição entre os núcleos que estão colidindo. Quanto maior a sobreposição, mais "central" é considerada a colisão. A centralidade é uma maneira de classificar as colisões com base na geometria da sobreposição dos núcleos. Colisões ultracentrais são aquelas em que ocorre uma sobreposição máxima ou quase máxima dos núcleos envolvidos. Isso é importante porque a quantidade de matéria nuclear envolvida na colisão afeta as propriedades físicas do sistema produzido.

O Grande Colisor de Hádrons (LHC, do inglês: Large Hadron Collider) é o maior acelerador de partículas do mundo. O seu funcionamento consiste em acelerar partículas com carga elétrica, que, no caso, são prótons ou núcleos atômicos de íons de chumbo. Ele é o acelerador mais proeminentes do Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear (CERN), um laboratório de pesquisa em física de partículas localizado em Genebra, Suíça. As colisões geradas no LHC têm o potencial de alcançar temperaturas da ordem de 10 trilhões de Kelvin, ultrapassando

mais de 100 mil vezes a temperatura do núcleo solar. O experimento ALICE (A Large Ion Collider Experiment do inglês) é um dos principais experimentos instalados no LHC. Ao contrário de alguns outros experimentos que se concentram em colisões de prótons, o ALICE é projetado especificamente para estudar colisões de íons pesados, como íons de chumbo. O RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider do inglês) foi o primeiro acelerador de partículas do mundo capaz de colidir íons pesados, ele colide principalmente íons de ouro (11) e (12).

A hidrodinâmica relativística emerge como uma ferramenta importante em nossa compreensão das colisões de núcleo-núcleo em energias ultrarrelativísticas (13). A utilização da hidrodinâmica relativística torna-se particularmente relevante em regimes nos quais o sistema gerado atinge condições de equilíbrio térmico e exibe comportamento hidrodinâmico. Essas condições geralmente se manifestam em estágios posteriores da evolução do sistema, quando o meio gerado alcança um estado mais térmico e expansivo. Portanto, a escolha da hidrodinâmica relativística como ferramenta fundamental para explicar essas colisões está condicionada às características específicas do sistema e às condições alcançadas durante sua evolução. Há décadas, o modelo hidrodinâmico em colisões relativísticas de íons pesados tem demonstrado eficiência na compreensão da natureza dos chamados parâmetros de fluxo coletivo (5), (13), (14), (15) e (16). Para aprofundar a compreensão do papel desempenhado por esse modelo, é essencial examinar as condições iniciais que moldam a evolução do sistema ao longo do tempo. As condições iniciais desempenham um papel importante ao simular, evento a evento, o que ocorreria durante as colisões. O estudo da física relativística de íons pesados em colisões relativísticas apresenta desafios significativos devido à impossibilidade de observar diretamente a evolução temporal no experimento, pois as partículas produzidas durante o processo são observadas como partículas finais no detector. Estas são as partículas que conseguimos medir diretamente. A limitação na observação direta destaca a importância de abordagens teóricas, como modelos hidrodinâmicos, para inferir propriedades com base nas partículas finais observadas. Determinar a condição inicial e as propriedades da matéria é crucial, sendo essas informações tratadas como matérias-primas na hidrodinâmica relativística, não diretamente observáveis nos dados experimentais (15).

A hiper-superfície de particularização marca o ponto em que a temperatura do plasma de quarks e glúons diminui o suficiente para permitir que os quarks e glúons se combinem e

formem hádrons. Durante a expansão, à medida que o QGP esfria, a densidade de partículas diminui, e a taxa de interações entre quarks e glúons diminui. Em um certo momento, a temperatura atinge a temperatura de particularização crítica, onde as interações fortes não são mais energeticamente favoráveis para manter quarks e glúons separados. Nesse ponto, ocorre a formação de hádrons, e a hiper-superfície de particularização é estabelecida. Na hiper-superfície de particularização, as partículas hadrônicas que se formaram durante a hadronização são "congeladas" em suas configurações finais, e elas começam a se mover independentemente umas das outras. Os tipos de partículas e a distribuição de momentos ao longo desta hiper superfície é importante para entender as propriedades do QGP (5).

Esta dissertação consiste no entendimento da matéria por meio da descrição hidrodinâmica da mesma quando produzida em colisões ultracentrais (sobreposição central entre os núcleos colisores) de íons pesados ultrarrelativísticos, visto que no estudo de (1) foi constatado um aumento do momento transversal médio $\langle p_T \rangle$ de hádrons carregados em colisões ultracentrais de íons pesados e, conseqüentemente, o aumento da temperatura em função da multiplicidade de partículas e esperamos que este novo fenômeno seja "impulsionado" pela velocidade do som. Como é sabido, a velocidade do som é a velocidade que uma onda de compressão que viaja em um fluido, e sua magnitude é determinada pela mudança na pressão à medida que a densidade aumenta. Inicialmente foi gerado as condições iniciais e posteriormente uma análise da densidade de entropia, raio e entropia, e uma análise preliminar da velocidade do som. A abordagem adotada contempla a análise do comportamento de $\langle p_T \rangle$ de hádrons carregados em colisões ultracentrais de Pb-Pb, gerando eventos com parâmetros Grad da Colaboração JETSCAPE (2). Destaca-se que a colaboração Jetscape opta por métodos bayesianos em suas análises. Os métodos bayesianos oferecem uma estrutura sólida para a modelagem e interpretação de dados, permitindo a incorporação de informações prévias e a atualização das estimativas à medida que novos dados se tornam disponíveis. Assim, a dissertação visa contribuir para a compreensão mais aprofundada da dinâmica em colisões ultracentrais de íons pesados, explorando a relação entre o aumento do momento transversal médio e a velocidade do som.

2 HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

O modelo hidrodinâmico relativístico foi proposto por Landau (17). Este modelo foi um avanço do modelo estatístico de Fermi (18) para o fenômeno de produção de múltiplas partículas em colisões nucleares a altas energias observado em raios cósmicos. Os modelos de Landau e Fermi mostram a importância da expansão longitudinal da bola de fogo, termo utilizado para descrever o produto da colisão de partículas muito energéticas, usando a solução analítica de Khalatnikov da hidrodinâmica relativística $(1 + 1)D$, assumindo que a matéria criada poderia ser considerada como um gás quente de píons sem massa e em equilíbrio térmico. Landau foi mais além, pois ele observou que a bola de fogo criada em uma colisão próton-próton (p-p) sofre uma forte expansão longitudinal, em vez de isotrópica (expansão igual para todos os lados quando lhe é adicionado energia térmica), devido ao grande gradiente de pressão nessa direção e a contração de Lorentz no estado inicial, afetando naturalmente a dependência energética da multiplicidade de partículas finais na energia incidente e gerando a distribuição de rapidez característica (17). Em interações relativísticas de dois núcleos contraídos por Lorentz (no referencial de centro de massa) pode existir uma grande deposição de energia, formando um sistema inicial. Nesse sistema inicial há muitas partículas, portanto o “livre caminho médio” λ é pequeno em relação às dimensões do volume. O sistema se expande, e essa expansão é atualmente considerada como o movimento de um fluido quase perfeito, com pequena viscosidade e baixa condutividade térmica, sugerindo o uso de uma hidrodinâmica relativística, uma vez que a velocidade das partículas produzidas no sistema é comparável com a velocidade da luz. Landau supôs que a interação se torna cada vez mais fraca à medida que o sistema cresce, e quando a “trajetória livre média” se torna comparável às dimensões lineares do sistema, ocorre um congelamento térmico, e o sistema coletivo se transforma em partículas individuais (17). A metodologia do modelo hidrodinâmico considera que após um processo complexo envolvendo colisões de íons relativísticos, uma matéria quente e densa pode ser formada e esses estados de matéria sejam especificados pelas condições iniciais apropriadas em termos de distribuições de velocidade do fluido e de quantidades termodinâmicas (16). A entropia é conservada no caso ideal estudado por Landau, a dependência da multiplicidade total de partículas com a energia, prevista por Fermi é verificada experimentalmente (16).

A vantagem da abordagem hidrodinâmica reside na sua capacidade de proporcionar uma descrição coerente e abrangente de várias observações experimentais simultaneamente. Dessa forma, esse modelo demonstra ser uma representação eficaz do que ocorre nos experimentos de colisão de íons pesados relativísticos.

2.1 EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS

As equações do movimento surgem da conservação do momento, do número bariônico e energia (15). Nos nossos cálculos estamos usando o sistema de unidades naturais: $\hbar = c = k = 1$:

\hbar : Constante de Planck reduzida,

c : Velocidade da luz,

k : Constante de Boltzmann.

Para um fluido ideal, no referencial de repouso, a derivada do tensor energia-momento:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

Para um fluido em movimento é necessário mais trabalho para obter uma quantidade escalar da conservação da energia-momento, inserindo a velocidade u_ν :

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3)$$

onde:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p, \quad (4)$$

sendo $g^{\mu\nu}$ a métrica de Minkowski $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, u^μ a quadri-velocidade do fluido, ε a densidade de energia e p a pressão. No referencial de repouso do fluido, temos $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $T^{\mu\nu} = (\varepsilon, p, p, p)$. Substituindo a forma geral do tensor energia-momento (equação 4) na equação 3 e derivando a equação 3, assim:

$$u_\nu [\partial_\mu (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu + (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu u^\nu + (\varepsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\nu] - u_\nu \partial_\mu g^{\mu\nu} p = 0.$$

Fazendo a distributiva, temos: $u_\nu \partial_\mu (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu + u_\nu (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu u^\nu + u_\nu (\varepsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\nu - u_\nu \partial^\nu p = 0.$

Reorganizando os termos:

$$u_\nu u^\mu u^\nu \partial_\mu (\varepsilon + p) + (\varepsilon + p) (u_\nu u^\mu \partial_\mu u^\nu + u_\nu u^\nu \partial_\mu u^\mu) - u_\nu \partial^\nu p = 0$$

Como u é uma quadrivelocidade, podemos usar a seguinte relação:

$$u_\nu u^\nu = u^2 = 1. \tag{5}$$

Além disso, essa propriedade também nos dá que $u_\nu \partial_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu u_\nu u^\nu = 0.$ A derivada é zero, já que $u^2 = 1$ é uma constante, usando essas expressões temos:

$$u^\mu \partial_\mu (\varepsilon + p) + (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu - u_\nu \partial^\nu p = 0.$$

Após cancelarmos os termos $u_\nu \partial^\nu p$ obtemos:

$$u^\mu \partial_\mu \varepsilon + (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu = 0. \tag{6}$$

Agora vamos estudar um caso particular. Para isto, vamos reescrever a equação 6 em termos da densidade de entropia e densidade bariônica, utilizando a relação de Euler e de Gibbs-Duhem da termodinâmica, mantendo T , μ e p fixos no caso de um fluido ideal, obtendo a conservação da entropia:

$$\varepsilon + p = Ts + \mu n_{bar} = 0, \tag{7}$$

$$\partial_\nu \varepsilon = T \partial_\nu s + \mu \partial_\nu n_{bar}. \tag{8}$$

Substituindo as equações 7 e 8 na equação 6, temos:

$$u^\nu T \partial_\nu s + u^\nu \mu \partial_\nu n_{bar} + (Ts + \mu n_{bar}) \partial_\nu u^\nu = 0, \quad (9)$$

$$T(u^\mu \partial_\nu s + s \partial_\nu u^\nu) + \mu(u^\nu \partial_\nu n_{bar} + n_{bar} \partial_\nu u^\nu) = 0, \quad (10)$$

$$T \partial_\nu (s u^\nu) + \mu \partial_\nu (n_{bar} u^\nu) = 0. \quad (11)$$

A corrente de partícula J^ν consiste em $n_{bar} u^\nu$, portanto o segundo termo da equação 11 é zero devido à conservação do número bariônico.

Assim, obtemos:

$$T \partial_\nu (s u^\nu) = 0. \quad (12)$$

Agora vamos estudar a equação 4 juntamente um projetor perpendicular $(g_{\nu\lambda} - u_\nu u_\lambda)$, assim:

$$(g_{\nu\lambda} - u_\nu u_\lambda) \partial_\mu ((\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p) = 0. \quad (13)$$

Derivando a equação 13, obtemos:

$$(g_{\nu\lambda} - u_\nu u_\lambda) [\partial_\mu (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu + (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu u^\nu + (\varepsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\nu - \partial_\mu g^{\mu\nu} p] = 0.$$

Fazendo a distributiva, obtemos:

$$\begin{aligned} & u_\lambda u^\mu \partial_\mu (\varepsilon + p) - u_\nu u^\nu u_\lambda u^\mu \partial_\mu (\varepsilon + p) + (\varepsilon + p) u_\lambda \partial_\mu u^\mu + \\ & - u_\nu u^\nu u_\lambda (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu + (\varepsilon + p) u^\mu \partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda p - u_\nu u_\lambda (\varepsilon + p) u^\mu \partial_\mu u^\nu + u_\nu u_\lambda \partial^\nu p = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $u_\nu u^\nu = 1$ e $u_\nu \partial_\mu u^\nu = 0$ os termos proporcionais com as derivadas $(\varepsilon + p)$ se cancelam, assim como os termos $\partial_\mu u^\mu$ que multiplicam $(\varepsilon + p)$:

$$(\varepsilon + p)u^\mu \partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda p + u_\nu u_\lambda \partial^\nu p. \quad (14)$$

Antes da colisão, todo o movimento é longitudinal e a maioria dos movimentos após a colisão podem ser assumidos como sendo na direção e sentido longitudinal. A coordenada longitudinal é tomada ao longo do eixo de colisão dos íons relativísticos, denotado a seguir como eixo z e alguma componente radial é esperado. Na próxima seção vamos estudar a expansão longitudinal.

2.2 A EXPANSÃO LONGITUDINAL

Agora vamos discutir a expansão longitudinal em um sistema de coordenadas cilíndricas. Vamos assumir um ângulo azimutal igual a zero, pois o sistema é rotacionalmente simétrico. Assim, o quadrivetor velocidade normalizada para a unidade é (15):

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v_r^2 - v_z^2}}(1, v_z, v_r, 0), \quad (15)$$

v_r : componente radial,

v_z : componente longitudinal,

v_ϕ : componente azimutal, que é igual a 0 nesta representação.

Uma vez que o foco é a expansão longitudinal, assume-se que $v_r \ll v_z$ de modo que o v_r é desprezível. Podemos escrever o quadrivetor velocidade como:

$$u^\mu = (\cosh \theta, \sinh \theta, 0, 0), \quad (16)$$

onde θ representa a rapidez do fluido.

Em coordenadas cilíndricas, a derivada covariante, ∂_μ é:

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, -\frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (17)$$

No caso da expansão longitudinal, apenas os dois primeiros componentes da equação 17 serão finitos. Vamos escrever a equação hidrodinâmica em coordenadas cilíndricas:

$$u^\mu \partial_\mu = \cosh \theta \frac{\partial}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\partial_\mu u^\mu = \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (19)$$

Da equação 6, temos: $u^\mu \partial_\mu \varepsilon + (\varepsilon + p) \partial_\mu u^\mu$. Podemos substituir as equações 18 e 19 na equação 6, resultando:

$$\cosh \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + (\varepsilon + p) \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\varepsilon + p) \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Da equação 14, temos: $(\varepsilon + p) u^\mu \partial_\mu u_\lambda - \partial_\lambda p + u_\nu u_\lambda \partial^\nu p$. Note que podemos substituir a equação 18 na equação 14:

$$(\varepsilon + p) \left(\cosh \theta \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \right) - \partial_\lambda p + u_\lambda \left(\cosh \theta \frac{\partial p}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0. \quad (21)$$

Vamos considerar: $u_\lambda = u_0 = \cosh \theta$ e $u_\lambda = u_1 = \sinh \theta$, substituindo $u_\lambda = u_0 = \cosh \theta$, temos:

$$(\varepsilon + p) \left(\cosh \theta \frac{\partial \cosh \theta}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial \cosh \theta}{\partial z} \right) - \partial_\lambda p + \cosh \theta \left(\cosh \theta \frac{\partial p}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0. \quad (22)$$

Para $\lambda = 0$, podemos substituir $\partial_\lambda p$ por $\frac{\partial p}{\partial t}$, assim:

$$\left(\cosh^2 \theta - 1\right) \frac{\partial p}{\partial t} + \cosh \theta \sinh \theta \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + (\varepsilon + p) \left(\cosh \theta \sinh \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) + \sinh^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0. \quad (23)$$

Substituindo a identidade trigonométrica $\cosh^2 \theta - 1 = \sinh^2 \theta$ e dividindo a equação por $\sinh \theta$, temos:

$$(\sinh \theta) \frac{\partial p}{\partial t} + \cosh \theta \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + (\varepsilon + p) \left(\cosh \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) + \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0. \quad (24)$$

Outra forma de chegarmos na equação 24 é substituindo $u_\lambda = u_1 = \sinh \theta$ e $\partial_\lambda p = \frac{\partial p}{\partial z}$ ($\lambda = 1$) na equação 21:

$$(\varepsilon + p) \left(\cosh \theta \frac{\partial \sinh \theta}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial \sinh \theta}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \sinh \theta \left(\cosh \theta \frac{\partial p}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 0. \quad (25)$$

Resolvendo as derivadas, temos:

$$\left(\sinh^2 \theta + 1\right) \frac{\partial p}{\partial z} + \sinh \theta \cosh \theta \frac{\partial p}{\partial t} + (\varepsilon + p) \left(\cosh^2 \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sinh \theta \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0. \quad (26)$$

Substituindo a identidade trigonométrica $\sinh^2 \theta + 1 = \cosh^2 \theta$ e dividindo a equação por $\cosh \theta$, obtemos a equação 24:

$$(\sinh \theta) \frac{\partial p}{\partial t} + \cosh \theta \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + (\varepsilon + p) \left(\cosh \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right) + \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0. \quad (27)$$

Essas equações fornecem uma descrição detalhada da expansão longitudinal em coordenadas cilíndricas, considerando a simetria rotacional do sistema.

2.3 A HIDRODINÂMICA E O CONE DE LUZ

Podemos simplificar as equações 20 e 24 utilizando o cone de luz e as variáveis de rapidez espacial, y_s , e tempo próprio, τ (15):

$$\tau = \pm \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (28)$$

$$y_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right), \quad (29)$$

$$t = \tau \cosh y_s, \quad (30)$$

$$z = \tau \sinh y_s. \quad (31)$$

Agora vamos escrever as derivadas parciais em relação a τ e y_s :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial y_s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y_s}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial y_s}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y_s}. \quad (33)$$

Vamos fazer as derivadas parciais, substituindo as equações 28, 29, 30 e 31 nas equações 32 e 33, assim:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \cosh y_s, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\sinh y_s, \quad (35)$$

$$\frac{\partial y_s}{\partial t} = \frac{\sinh y_s}{\tau}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial y_s}{\partial z} = \frac{\cosh y_s}{\tau}. \quad (37)$$

Substituindo as equações 34, 35, 36 e 37 nas equações 32 e 33, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \cosh y_s \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sinh y_s}{\tau} \frac{\partial}{\partial y_s}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\sinh y_s \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\cosh y_s}{\tau} \frac{\partial}{\partial y_s}. \quad (39)$$

Podemos expressar as equações 20 e 24 em termos das variáveis τ e y_s . Ao substituir as equações 38 e 39 na equação 20, obtemos:

$$\begin{aligned} & (\cosh \theta \cosh y_s - \sinh \theta \sinh y_s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \\ & + \frac{1}{\tau} (-\cosh \theta \sinh y_s + \sinh \theta \cosh y_s) \\ & + (\varepsilon + p) (\sinh \theta \cosh y_s - \sinh y_s \cosh \theta) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ & + \frac{1}{\tau} (-\sinh \theta \sinh y_s + \cosh \theta \cosh y_s) \frac{\partial \theta}{\partial y_s} = 0. \end{aligned}$$

Podemos simplificar, utilizando as regras de subtração de funções hiperbólicas:

$$\cosh(\theta - y_s) = \cosh \theta \cosh y_s - \sinh \theta \sinh y_s,$$

$$\sinh(\theta - y_s) = \sinh \theta \cosh y_s - \cosh \theta \sinh y_s.$$

Substituindo as funções hiperbólicas, temos:

$$\cosh(\theta - y_s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \sinh(\theta - y_s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_s} + (\varepsilon + p) \sinh(\theta - y_s) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (\varepsilon + p) \frac{1}{\tau} \cosh(\theta - y_s) \frac{\partial \theta}{\partial y_s} = 0. \quad (40)$$

Dividindo a equação 40 por $\cosh(\theta - y_s)$ e multiplicando por τ , temos:

$$\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \tanh(\theta - y_s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_s} + (\varepsilon + p) (\tau \tanh(\theta - y_s) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial y_s}) = 0. \quad (41)$$

O mesmo pode ser feito, substituindo as equações 38 e 39 na equação 24, assim:

$$\begin{aligned} & (\sinh \theta \cosh y_s - \cosh \theta \sinh y_s) \frac{\partial p}{\partial \tau} \\ & + (\cosh \theta \frac{\cosh y_s}{\tau} - \sinh \theta \frac{\sinh y_s}{\tau}) \frac{\partial p}{\partial y_s} \\ & + (\varepsilon + p) (\cosh \theta \cosh y_s - \cosh \theta \sinh y_s) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \\ & + (\varepsilon + p) (\sinh \theta \frac{\cosh y_s}{\tau} - \cosh \theta \frac{\sinh y_s}{\tau}) \frac{\partial \theta}{\partial y_s} = 0. \end{aligned}$$

Substituindo as funções hiperbólicas, dividindo a equação por $\cosh(\theta - y_s)$ e multiplicando por τ , temos:

$$\begin{aligned} & \tau \tanh(\theta - y_s) \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial y_s} \\ & + (\varepsilon + p) \left(\tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \tanh(\theta - y_s) \frac{\partial \theta}{\partial y_s} \right) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Até o momento não incluímos a conservação do número bariônico, esse assunto vai ser discutido

na próxima seção.

2.4 A CONSERVAÇÃO DO NÚMERO BARIÔNICO

A lei de conservação do número bariônico diz que o número total do número bariônico deve permanecer constante. Assim, temos (15):

$$\partial^\mu (n_{bar} u_\mu) = 0. \quad (43)$$

Derivando a equação 43, temos:

$$\partial^\mu n_{bar} u_\mu + n_{bar} \partial^\mu u_\mu = 0. \quad (44)$$

Substituindo $u_\mu = \cosh \theta + \sinh \theta$ e $\partial^\mu u_\mu = \sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}$ (coordenadas cilíndricas) na equação 44, temos:

$$\cosh \theta \frac{\partial n_{bar}}{\partial t} + \sinh \theta \frac{\partial n_{bar}}{\partial z} + n_{bar} (\sinh \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \cosh \theta \frac{\partial \theta}{\partial z}) = 0. \quad (45)$$

Note que essa equação é idêntica a equação 20 com $(\varepsilon + p) = n_{bar}$, então podemos reescrever a equação 45 em função de τ e y_s , substituindo as equações 38 e 39, assim temos:

$$\begin{aligned} & \tau \frac{\partial n_{bar}}{\partial \tau} + \tanh(\theta - y_s) \frac{\partial n_{bar}}{\partial y_s} \\ & + n_{bar} \left(\tau \tanh(\theta - y_s) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial y_s} \right) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Observe também que a equação de conservação da corrente de entropia seria a mesma, com n_{bar} substituído por s .

2.5 SOLUÇÃO DA EXPANSÃO LONGITUDINAL

Nas seções anteriores, apresentou-se três equações (41, 42 e 46) que envolvem quatro incógnitas:

ε : densidade de energia, p : pressão, θ : rapidez do fluido e n_{bar} : densidade bariônica.

Para resolver as equações da hidrodinâmica relativística, precisamos de uma quarta equação que é uma equação de estado relacionando ε e p para um gás livre de quarks e glúons sem massa:

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (47)$$

Relacionaremos também p e ε através da velocidade do som do sistema:

$$\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} = c_s^2 = \frac{1}{3}. \quad (48)$$

A última igualdade vale apenas para o gás livre de quarks e glúons sem massa. Podemos supor que c_s^2 não é uma constante fixa, mas depende das variáveis globais do sistema enquanto permanece independente do espaço e tempo. Assim, as equações 41 e 42 podem ser resolvidas para as duas variáveis ε ou p e θ (15).

2.6 CONDIÇÕES INICIAIS

Como mencionado na introdução, as condições iniciais desempenham um papel crucial como entrada principal para as soluções das equações hidrodinâmicas. A evolução hidrodinâmica tem início a partir de um sistema presumivelmente em repouso, ou seja, inicialmente considera-se que os núcleos estejam completamente em estado de repouso. Enquanto a descrição de Landau da produção, expansão e ruptura do sistema ainda é usada hoje, a suposição de que o sistema começa do repouso é geralmente muito extrema, especialmente se os núcleons também devem ser interrompidos (15):

$$\theta(t = 0, \mathbf{x}) = 0. \quad (49)$$

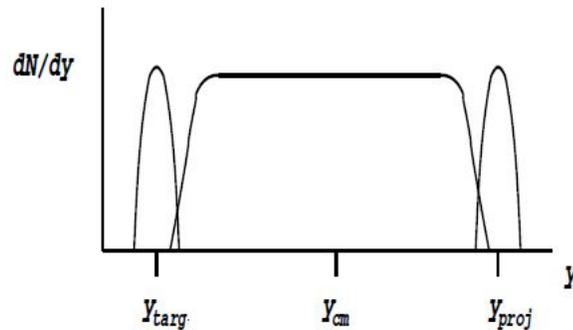
Esse é o modelo de condição inicial de Landau que é produzido as densidades mais altas. O modelo de Landau foi construído sobre a ideia de Fermi de usar o método hidrodinâmico para estudar colisões hadrônicas. Fermi assumiu que durante a colisão de dois núcleos, a energia é liberada em um volume muito pequeno no centro de massa, contraído pelo fator de Lorentz. A distribuição de energia em um pequeno volume pode ser tratada estatisticamente sem conhecer a interação nuclear. O volume é tratado na direção do movimento e a suposição de Fermi, de que as partículas do estado final são formadas instantaneamente e deixa imediatamente o volume da colisão sem mais interação, não se justifica, primeiro, é improvável que os hádrons saiam do volume sem interagir com qualquer umas das outras partículas ao seu redor, pois os hádrons se interagem fortemente, segundo, a produção de partículas não é instantâneo (15). Landau apontou que a hidrodinâmica relativística poderia ser usada para estudar a expansão porque a termodinâmica e a hidrodinâmica compartilham o mesmo intervalo de validade, $\lambda \ll L$. Landau assumiu que após a colisão, o equilíbrio estatístico é atingido. O sistema então se expande, regido pela hidrodinâmica relativística de um fluido ideal. Enquanto o sistema se expande, o livre caminho médio, λ , também aumenta até o tamanho do sistema, ou seja, $\lambda \sim L$, logo, a seção de choque de interação entre as partículas é diminuída para que efetivamente não interajam mais. A distribuição gaussiana de partículas produzidas é semelhante às distribuições de multiplicidade visto no CERN SPS, porém, outros observáveis não concordam bem com essa suposição (15).

Bjorken(19) trata o problema de modo semelhante ao Landau, mas com uma condição inicial diferente, ele assume que em altas energias, existe um platô central, estrutura para a produção de partículas em função da variável de rapidez em colisões núcleo-núcleo (19),

$$\theta(y_s, \tau_0) = y_s. \quad (50)$$

O platô central de Bjorken é mostrado na figura ??, as regiões de fragmentação, rotuladas

Figura 3 - Platô central de Bjorken, região em que a produção de partículas não depende significativamente da rapidez



Fonte: (19).

como y_{proj} e y_{targ} , estão localizadas em torno da rapidez, y_s , assumindo que os quarks de valência não param, mas passam um pelo outro. A região central quente é centrada em torno de y_{cm} e o platô central estende-se desde y_{cm} para perto das regiões de fragmentação (15). A essência dessa suposição é a afirmação de que a evolução espaço-temporal do sistema parece essencialmente a mesma em todos os referenciais semelhantes ao centro de massa, logo após a colisão, panquecas altamente contraídas por Lorentz recuando na direção oposta da colisão, na velocidade da luz, isso implica uma propriedade de simetria do sistema e vamos impor essa simetria como condição inicial. Ao adotarmos a invariância boost ou "boost invariant symmetry" do inglês em um espaço-tempo (2+1)D, estamos nos referindo à hidrodinâmica ideal. Essa simetria é reconhecida e preservada pelas equações hidrodinâmicas associadas, o que resulta em soluções matemáticas simplificadas. Este sistema é especialmente interessante, pois é essencialmente matéria nuclear comprimida e carrega consigo não apenas uma herança da física nuclear, mas também da astrofísica, por exemplo, a questão da composição de estrela de nêutrons (19). Em particular, para colisões centrais de grandes núcleos, a expansão do fluido perto do eixo de colisão é longitudinal e homogêneo, assim o fluido a meio caminho entre as panquecas recuando permanece em repouso, enquanto o fluido à distância longitudinal z desse ponto médio se move com velocidade longitudinal z/t , onde t é o tempo decorrido desde que as panquecas colidiram. Nessa região haverá uma frente de rarefação movendo-se para dentro, na velocidade do som do fluido, assim, nas distâncias transversais maiores que a frente de rarefação, o fluido se expandirá radialmente para fora, resfriando mais rapidamente que

o fluido no interior (19). A estimativa é baseada simplesmente na liberação de energia por unidade de rapidez em colisões núcleo-núcleo, assim, essa densidade de energia (e conseqüente a entropia ou densidade de partícula) é suficientemente alta para tornar muito provável que o sistema entre rapidamente em equilíbrio térmico local, ao assumirmos o quadro da hidrodinâmica ideal. Durante a expansão, a densidade de energia cai (em seu referencial de repouso local) como $t^{-\gamma}$ com $1 \leq \gamma \leq \frac{4}{3}$ enquanto a temperatura cai como $t^{\gamma-1}$. A densidade de entropia cai conforme t^{-1} . Isso implica que a entropia por unidade de rapidez é conservada, um resultado que depende apenas da simetria de nossas condições de contorno e não de detalhes da equação de estado. Este resultado implica que a produção de partículas por unidade de rapidez (que é proporcional à entropia), por sua vez, não depende dos detalhes da evolução hidrodinâmica, mas apenas da energia (portanto, entropia) no estágio inicial da própria colisão (19). À medida que o sistema evolui, a quantidade de fluido que sofre expansão longitudinal homogênea diminui. Quando a separação do sistema formado após a colisão excede seu diâmetro, o fluido contido entre essas partes sofrerá uma expansão radial tridimensional e deverá resfriar rapidamente. Já no início desta parte da evolução, estimamos que qualquer transição de fase terá sido atravessada e que o sistema é de matéria hadrônica densa, com temperatura de 150 a 200 MeV (19). A condição da equação 50 também vale posteriormente, de modo que: $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$, $\frac{\partial \theta}{\partial y_s} = 1$ e $\tanh(\theta - y_s) = 0$, as equações 41, 42 e 46 se reduzem para (15):

$$\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \varepsilon + p = 0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_s} = 0, \quad (52)$$

$$\tau \frac{\partial n_{bar}}{\partial \tau} + n_{bar} = 0. \quad (53)$$

Integrando a equação 53 nos limites de τ_0 até o tempo posterior τ ao lado direito e, ao lado esquerdo, em $n_{bar}(\tau_0)$ até $n_{bar}(\tau)$, resultando em:

$$n_{bar}(\tau) = n_{bar}(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau}. \quad (54)$$

A equação de densidade de entropia, a mesma forma que a equação de densidade de bárions, tem a solução:

$$s(\tau) = s(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau}. \quad (55)$$

A equação de conservação da corrente de entropia também pode ser reescrita em termos de temperatura e velocidade do som no meio com potencial químico zero (15):

$$c_s^2 = \frac{d \ln T}{d \ln s}, \quad (56)$$

$$\partial_\nu \ln s = \frac{1}{c_s^2} \partial_\nu \ln T. \quad (57)$$

A equação de conservação da entropia, conforme descrita por (15), é expressa como:

$$u^\mu \partial_\mu s + s \partial_\mu u^\mu = \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \ln s = 0. \quad (58)$$

Substituindo a equação 57 na equação 58, temos:

$$\partial_\mu u^\mu + \frac{1}{c_s^2} u^\mu \partial_\mu \ln T = 0. \quad (59)$$

A equação 58 em função do sistema de coordenadas é (τ, y) :

$$c_s^2 + \tau \frac{\partial \ln T}{\partial \tau} = 0. \quad (60)$$

A solução da equação 60 é:

$$T(\tau) = T(\tau_0) \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right) c_s^2. \quad (61)$$

Uma vez que $c_s^2 < 1$, a temperatura cai mais lentamente que a entropia e densidades bariônicas.

Agora, procederemos à resolução da densidade de energia e da pressão, incorporando as contribuições da "pressão de sacola", B ², com gás livre, conforme expresso nas equações 62 e 63 (15).

$$\varepsilon = \varepsilon_{qgp} + B, \quad (62)$$

$$p = p_{qgp} - B. \quad (63)$$

Se, no plasma quarks e glúons:

$$p_{qgp} = c_s^2 \varepsilon_{qgp}. \quad (64)$$

Substituindo as equações 64 e 62 na equação 63, temos:

²A pressão de sacola é uma abordagem teórica na física de partículas que foi introduzida para descrever o comportamento dos quarks e glúons em altas energias e densidades. Esse modelo é particularmente relevante em situações onde ocorrem transições de fase, como a transição para o QGP. A ideia básica é imaginar que os quarks e glúons estão confinados dentro de uma "sacola" com uma pressão interna constante. Dentro dessa sacola, os quarks e glúons se movem livremente, mas não podem escapar para o exterior.

$$p = c_s^2 \varepsilon - (1 + c_s^2)B. \quad (65)$$

Para que a pressão seja positiva, a densidade de energia deve ser maior que um valor mínimo:

$$\varepsilon > \frac{1 + c_s^2}{c_s^2} B. \quad (66)$$

Ao inserir a equação 65 na equação 51, obtemos:

$$\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} (1 + c_s^2) (\varepsilon - B) = \tau \frac{\partial (\varepsilon - B)}{\partial \tau} (1 + c_s^2) (\varepsilon - B). \quad (67)$$

Note que podemos subtrair B na derivada em relação a τ , pois B é constante. A solução para esta equação é então semelhante àquelas para entropia e densidade bariônica:

$$\partial \ln(\varepsilon - B) = -(1 + c_s^2) \partial \ln \tau, \quad (68)$$

$$\varepsilon(\tau) - B = [\varepsilon(\tau_0) - B] \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1+c_s^2}. \quad (69)$$

Essas relações se tornam evidentes durante os processos de expansão, resfriamento e ruptura. Os observáveis referem-se ao estado final das distribuições de velocidade das partículas e do momento transversal (p_T). A densidade de partículas refere-se à densidade total, abrangendo não apenas a densidade de bárions.

$$s = \xi n, \quad (70)$$

a entropia e a densidade de partículas estão intrinsecamente relacionadas, uma vez que a entropia por partícula é uma constante representada por ξ , de forma que $\frac{s}{n} = \xi$ (15). A distribuição de rapidez é obtida mediante a integração da densidade das partículas ao longo das coordenadas espaço-tempo, conforme documentado em (15).

$$d^4x = \tau d\tau dy_s d^2x. \quad (71)$$

No tempo fixo, final e próprio τ_f , a distribuição de rapidez, $\frac{dN}{dy_s}$, é (15):

$$\frac{dN}{dy_s} = \int d^2x \tau_f n(\tau_f, y_s, x). \quad (72)$$

Substituindo a equação 70 na equação 72, temos:

$$\frac{dN}{dy_s} = \int d^2x \frac{\tau_f}{\xi} s(\tau_f, y_s, x). \quad (73)$$

Podemos então relacionar a densidade de entropia final com a densidade de entropia inicial através da equação 55, assim (15):

$$\frac{dN}{dy_s} = \int d^2x \frac{\tau_0}{\xi} s(\tau_0, y_s, x). \quad (74)$$

A distribuição de partículas no estado final é exclusivamente uma função do estado inicial de densidade de entropia. Assumindo a inexistência de expansão transversal, podemos realizar a integração sobre d^2x e obter, conforme descrito por (15), a seguinte relação:

$$\frac{dN}{dy_s} = \pi R_A^2 \frac{\tau_0}{\xi} s(\tau_0, y_s), \quad (75)$$

onde, πR_A^2 denota a área transversal do núcleo durante uma colisão.

Se não há número líquido de bárions no sistema, podemos relacionar o número inicial da

densidade de entropia para a densidade de energia inicial por:

$$s(\tau_0)T(\tau_0) = \varepsilon(\tau_0) + p(\tau_0) = [\varepsilon(\tau_0) - B](1 + c_s^2). \quad (76)$$

No contexto do plasma de quarks e glúons, a pressão de sacola, representada por B , é diretamente proporcional a $T(\tau_0)^4$. Para capturar essa relação, introduzimos um fator de proporcionalidade, denotado como λ , de modo que $\varepsilon(\tau_0) - B$ seja expresso como $\lambda T^4(\tau_0)$. Considerando a equação de estado padrão de um gás de quarks e glúons sem massa, onde $\varepsilon = 3p$ com um quadrado da velocidade do som $c_s^2 = \frac{1}{3}$, a densidade de energia é diretamente proporcional a T^4 . No entanto, se adotarmos uma equação de estado diferente, a densidade de energia será proporcional a $T^{1+\frac{1}{c_s^2}}$ (15):

$$T(\tau_0) = \left[\frac{\varepsilon(\tau_0) - B}{\lambda} \right]^{\frac{c_s^2}{1+c_s^2}}. \quad (77)$$

Substituindo a equação 77 na equação 76, temos (15):

$$s(\tau_0) = \left[\frac{\varepsilon(\tau_0) - B}{\lambda} \right]^{\frac{1}{1+c_s^2}} \lambda(1 + c_s^2). \quad (78)$$

usando equação 75, temos (15):

$$\varepsilon(\tau_0) = B + \lambda \left[\frac{s(\tau_0)}{\lambda(1 + c_s^2)} \right]^{1+c_s^2} = B + \lambda \left[\frac{\xi}{\pi R_A^2 \tau_0 \lambda(1 + c_s^2)} \frac{dN}{dy_s} \right]^{1+c_s^2}. \quad (79)$$

Na trajetória desta seção, nos dedicamos à resolução das equações que descrevem a hidrodinâmica ideal, focalizando especialmente a expansão característica do tipo Bjorken. Essa abordagem desempenha um papel importante ao proporcionar uma introdução pedagógica aos princípios fundamentais subjacentes. No entanto, as simulações hidrodinâmicas em estágios mais avançados desta pesquisa apresentam uma complexidade consideravelmente maior.

3 A COLABORAÇÃO JETSCAPE

A colaboração JETSCAPE (2) é um esforço colaborativo entre cientistas e pesquisadores que se dedicam à investigação do comportamento dos jatos de partículas em colisões nucleares de alta energia. Dentro dessa colaboração, existem vários grupos, cada um especializado em áreas específicas. No contexto desta dissertação, focaremos nossa análise no Trabalho "Simulations Working Group" (SIMS-WG), o qual auxilia na redação, manutenção e execução de software de física e estatística para modelagem de colisões de íons pesados, além de realizar comparações de última geração entre modelos e dados. É importante destacar que a análise bayesiana emerge como uma ferramenta poderosa no contexto da física de colisões de altas energias. Essa abordagem oferece não apenas flexibilidade, mas também um nível notável de rigor estatístico na interpretação de dados experimentais de elevada complexidade.

4 TEOREMA DE BAYES

O Teorema de Bayes é fácil de derivar, desde que você compreenda a probabilidade condicional. Vamos começar com a noção de probabilidade, seguida pela probabilidade condicional e, finalmente, chegaremos ao Teorema de Bayes. A probabilidade é um número que varia de 0 a 1, inclusivos, representando o grau de crença em um fato ou previsão. O valor 1 representa certeza de que um fato é verdadeiro ou de que uma previsão se concretizará, enquanto o valor 0 indica certeza de que o fato é falso. A probabilidade condicional é uma probabilidade que se baseia em informações adicionais (20). Para ilustrar, consideremos a probabilidade de uma pessoa ter um ataque cardíaco no próximo ano. De acordo com o CDC (Centers for Disease Control and Prevention), aproximadamente 785 mil americanos têm um primeiro ataque cardíaco a cada ano. A população dos EUA é de cerca de 311 milhões, o que significa que a probabilidade de um americano escolhido ao acaso ter um ataque cardíaco no próximo ano é aproximadamente de 0.3%. No entanto, essa pessoa não é um americano escolhido aleatoriamente. Os epidemiologistas identificaram muitos fatores que afetam o risco de ataques cardíacos, e dependendo desses fatores, o risco pode ser maior ou menor do que a média. Por exemplo, um homem de 45 anos com colesterol elevado pode aumentar suas chances de ter um ataque cardíaco, enquanto alguém com pressão arterial baixa e não fumante pode reduzir suas chances (20). Portanto, a probabilidade condicional depende de uma série de fatores que compõem a situação. A notação padrão para probabilidade condicional é $P(A|B)$, que representa a probabilidade de 'A' ocorrer dado que 'B' é verdadeiro. Neste exemplo, 'A' representa a previsão de uma pessoa ter um ataque cardíaco no próximo ano, e 'B' é o conjunto de condições que se aplicam a essa pessoa.

A probabilidade conjunta é uma forma elegante de representar a probabilidade de duas coisas acontecerem simultaneamente, ou seja, $P(A \text{ e } B)$. No contexto de lançamento de moedas e dados, a fórmula para a probabilidade conjunta é $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B)$. No entanto, é importante observar que essa fórmula nem sempre é aplicável. Por exemplo, se lançarmos duas moedas e definirmos 'A' como a primeira moeda cair cara e 'B' como a segunda moeda cair cara, teremos $P(A) = P(B) = 0.5$, e, de fato, $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B) = 0.25$. No entanto, essa fórmula funciona apenas quando 'A' e 'B' são eventos independentes, ou seja,

o resultado do primeiro evento não afeta a probabilidade do segundo. Formalmente, isso significa que $P(B|A) = P(B)$. No entanto, se considerarmos um exemplo em que os eventos não são independentes, como 'A' representando chuva hoje e 'B' representando chuva amanhã, veremos que $P(B|A)$ é maior do que $P(B)$. Em geral, a probabilidade de uma conjunção é dada por $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$, para quaisquer 'A' e 'B'. Portanto, se a probabilidade de chuva em qualquer dia for de 0.5, a probabilidade de chuva em dois dias consecutivos não será 0.25, mas provavelmente um pouco maior (20).

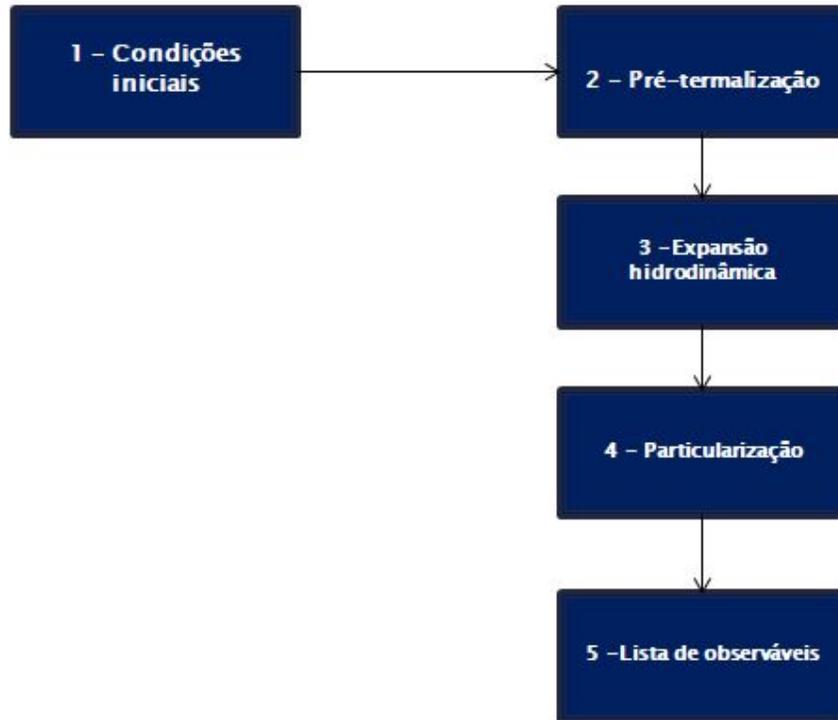
Para introduzir o Teorema de Bayes, considere o seguinte exemplo: suponha que haja duas tigelas de biscoitos, Tigela 1 contém 30 biscoitos de baunilha e 10 biscoitos de chocolate, enquanto Tigela 2 contém 20 de cada tipo. Agora, imagine que você escolhe uma das tigelas ao acaso e, sem olhar, retira um biscoito aleatoriamente. O biscoito é de baunilha. Qual é a probabilidade de que este biscoito tenha vindo da Tigela 1? Isso envolve uma probabilidade condicional, isto é, queremos calcular $P(\text{Tigela 1}|\text{baunilha})$. No entanto, não é imediatamente óbvio como fazer esse cálculo (20). Se invertêssemos a pergunta e perguntássemos sobre a probabilidade de um biscoito ser de baunilha, dado que ele foi retirado da Tigela 1, isso seria mais simples de calcular. $P(\text{baunilha} | \text{Tigela 1}) = 0.75$. Infelizmente, $P(A|B)$ não é igual a $P(B|A)$, mas há uma maneira de relacionar um ao outro: o Teorema de Bayes (20). Note que a conjunção é comutativa, ou seja, $P(A \text{ e } B) = P(B \text{ e } A)$, para quaisquer eventos 'A' e 'B'. Podemos escrever $P(A \text{ e } B)$ de duas formas diferentes: $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$ ou $P(A \text{ e } B) = P(B)P(A|B)$. Igualando essas duas expressões, obtemos $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$. Podemos rearranjar essa equação para obter o Teorema de Bayes (20):

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}. \quad (80)$$

O Teorema de Bayes desempenha um papel importante na análise de dados fenomenológicos em colisões de íons pesados, permitindo que os físicos extraíam informações valiosas sobre as propriedades do sistema criado em condições extremas de energia e densidade.

5 ETAPAS DAS SIMULAÇÕES

Figura 4 - Etapas das simulações



Fonte: Elaborada pela autora.

Nesta seção, embarcaremos nas etapas da simulação, onde cada fase representa um mergulho mais profundo na compreensão dos fenômenos em estudo. Iniciamos nossa exploração com as Condições iniciais, um ponto de partida crucial onde as colisões nucleares são semeadas. Este estágio define a geometria inicial da interação. Em seguida, adentramos a fase de Pré-termalização, onde o sistema se expande. A jornada continua na Expansão hidrodinâmica, onde mergulhamos nas complexidades da evolução hidrodinâmica. Progredindo ainda mais, encontramos a fase da Particularização, antes de concluirmos nossa exploração na Lista de Observáveis. A Lista de observáveis descreve a evolução do sistema produzido após uma colisão quando ele está na fase de um gás de hádrons. Este estágio revela os resultados finais da simulação, fornecendo uma visão detalhada das partículas produzidas e das dinâmicas finais do sistema.

5.1 CONDIÇÕES INICIAIS - TRENTO

Em colisões de íons pesados, as grandezas geométricas iniciais, tais como o parâmetro de impacto³, o número de núcleons participantes e a excentricidade inicial, não podem ser diretamente determinadas por métodos experimentais convencionais (21). Para superar essa limitação, recorre-se frequentemente ao Modelo de Monte Carlo Glauber, que é utilizado para calcular essas grandezas geométricas no estado inicial das colisões de íons pesados. No contexto dos cálculos do Modelo de Monte Carlo Glauber, o estado inicial de um núcleo é geralmente representado como um conjunto de partículas distribuídas de acordo com uma distribuição de probabilidade baseada na densidade do núcleo correspondente, frequentemente descrita pela distribuição de Woods-Saxon, a qual é consistentemente medida em experimentos de espalhamento de elétrons (22) e (23). Essa abordagem fornece uma representação realista do estado inicial dos núcleos envolvidos na colisão.

As colaborações experimentais de íons pesados, em particular no RHIC e no LHC, fazem uso dos cálculos do Modelo de Monte Carlo Glauber para obter informações sobre diversos observáveis geométricos que são essenciais para a determinação da centralidade⁴ da colisão (21). Através da análise da centralidade de uma colisão, é possível estimar a configuração geométrica inicial do sistema produzido, fazendo suposições sobre a disposição dos núcleons nos núcleos envolvidos e o processo de colisão entre esses núcleos. Dessa forma, o Modelo de Monte Carlo Glauber desempenha um papel crucial na caracterização das colisões de íons pesados, permitindo a obtenção de informações valiosas sobre as condições iniciais desses eventos extremamente energéticos.

O TRENTo⁵ é um gerador de condições iniciais destinado a gerar perfis de entropia inicial de Monte Carlo sem assumir mecanismos físicos específicos para produção de entropia, dinâmica de pré-equilíbrio ou termalização (24). A dinâmica de pré-equilíbrio refere-se à fase inicial intensa de interações nucleares após a colisão de dois núcleos, resultando em dispersão,

³O parâmetro de impacto é uma quantia crucial em colisões nucleares, sendo determinante para a centralidade do evento. Ele representa a distância mais próxima entre os centros dos núcleos em colisão. Quanto menor o parâmetro de impacto, maior a sobreposição entre os núcleos, indicando uma maior centralidade no evento.

⁴A centralidade da colisão refere-se à medida de quão central ou periférica é uma colisão entre partículas e está relacionada com a posição do ponto de impacto entre os núcleos colidentes.

⁵O TRENTo está disponível em: github.com/Duke-QCD/trento (24)

excitação e rearranjo de partículas antes de alcançar um estado estável. Termalização é o processo subsequente, no qual o sistema atinge equilíbrio térmico. Após a dinâmica de pré-equilíbrio, as partículas continuam a colidir, mas com menor frequência, trocando energia de maneira mais eficiente e levando à uniformização da distribuição de energia e à estabilização das propriedades termodinâmicas, como a temperatura. Suponha uma colisão entre dois núcleos (A e B) no eixo do feixe z , sendo $\rho_{A,B}^{part}$, a densidade da matéria nuclear que participa de colisões inelásticas, assim, cada núcleo pode ser representado por sua espessura participante:

$$T_{A,B}(x, y) = \int dz \rho_{A,B}^{part}(x, y, z). \quad (81)$$

A função de espessura reduzida é definida como a média generalizada da espessura nuclear participante:

$$f = T_R(p; T_A, T_B) \equiv \left(\frac{T_A^p + T_B^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (82)$$

O padrão do TRENTTo (24) é $p = 0$, que corresponde à média geométrica.

O parâmetro de flutuação de núcleon, representado por σ_k , é modelado utilizando uma distribuição gama. Essas flutuações são incorporadas multiplicando a densidade de cada núcleon por um fator aleatório. O valor de σ_k pode ser ajustado de acordo com a equação 83. No modelo TRENTTo (24), o valor padrão adotado é $\sigma_k = 1$, o que resulta em uma distribuição exponencial. Quando σ_k é pequeno, a distribuição exibe uma cauda longa, levando a flutuações consideráveis. Por outro lado, quando σ_k é grande, a distribuição se assemelha a uma gaussiana estreita e, em casos extremos, se aproxima de uma função delta (24).

Os pesos são amostrados de uma distribuição gama com o parâmetro de escala mantido constante, de modo que a média seja dada por:

$$P_k(x) = \frac{k^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-kx}. \quad (83)$$

A equação 83 representa a distribuição estatística conhecida como distribuição gama. A função de densidade de probabilidade da distribuição gama é definida nessa equação, onde $\Gamma(k)$ representa a função gama. A incorporação da aleatoriedade por meio do parâmetro de flutuação σ_k na modelagem da densidade de núcleons desempenha um papel importante, visando capturar a variabilidade inerente aos sistemas nucleares. Aqui está a explicação detalhada dessa abordagem:

- **Realismo Físico:** Dentro de um núcleo, a distribuição dos núcleons não segue um padrão uniforme e preciso. Esses constituintes têm distribuições de densidade que podem variar tanto entre diferentes núcleos quanto em diferentes colisões nucleares. A introdução da aleatoriedade por meio do parâmetro σ_k permite uma representação mais fiel dessa variabilidade intrínseca e realista.
- **Exploração de Comportamentos Extremos:** A variação do parâmetro σ_k possibilita explorar uma vasta gama de comportamentos, desde distribuições com caudas longas (quando σ_k é pequeno) até distribuições estreitas e até mesmo picos quase determinísticos (quando σ_k é grande). Isso é essencial para compreender como diferentes condições iniciais podem impactar os resultados de colisões nucleares.
- **Comparação com Dados Experimentais:** A incorporação da aleatoriedade por meio de σ_k permite que os modelos se ajustem aos dados experimentais, os quais também podem exibir flutuações e variações devido a diversas fontes de incerteza.

A quantidade de partículas efetivas está diretamente relacionada a centralidade da colisão, que em meios matemáticos é estabelecida pelo parâmetro de impacto b . Quanto mais central a colisão for, maior o número de núcleons participantes, gerando uma maior energia de choques e mais partículas no estado pós termalização (25).

A seção de choque inelástica núcleo-núcleo, que representa a probabilidade de interação entre dois núcleons na colisão, é um parâmetro de entrada do TRENTo (24), denotado

como σ_{NN} em unidades de fm^2 . O valor padrão para σ_{NN} é de $6.28 fm^2$. Esse valor é aproximadamente o valor experimental na energia LHC para colisões de Pb+Pb com $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$ TeV.

O parâmetro ' w ' especifica a largura média do núcleo gaussiano em (fm) conforme a equação 84. O padrão é 0.5 fm se a subestrutura do núcleon estiver habilitada.

$$T_{nucleon}(x, y) = \frac{1}{2\pi w^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right). \quad (84)$$

O parâmetro ' d ' é a distância mínima núcleon-núcleon (fm) para núcleos Woods-Saxon (esféricos e deformados). Quando diferente de zero, se um núcleon amostrado cair muito perto de um núcleon amostrado anteriormente, sua posição angular é reamostrada até que ele caia longe o suficiente. O raio não é reamostrado, pois isso modificaria efetivamente a distribuição Woods-Saxon. Se um nucleon não puder ser colocado após um número razoável de tentativas, o algoritmo desiste e deixa o núcleon na última posição amostrada. A taxa de falha é insignificante para distâncias mínimas próximas de 1 fm e abaixo; atinge aproximadamente 1% a 1.7 fm para núcleos esféricos e, 1.5 fm para núcleos deformados. O padrão é zero (sem distância mínima).

5.2 PRÉ-TERMALIZAÇÃO - FREE STREAMING

Após a definição das condições iniciais no TRENTo, entra em cena o estágio do Free Streaming, onde as partículas se expandem, seguindo trajetórias determinadas pela equação de Boltzmann⁶. Esse processo desempenha um papel crucial na modelagem das colisões e na compreensão da dinâmica do sistema (2).

A equação de Boltzmann é representada pela seguinte expressão:

$$P^\mu \partial_\mu f(X; P) = 0. \quad (85)$$

⁶A equação de Boltzmann reside na capacidade de fornecer uma ferramenta matemática para modelar e compreender a dinâmica de partículas.

A solução dessa equação é dada por:

$$f(t, x; P) = f(t_0, x - v(t - t_0); P). \quad (86)$$

O ingrediente de entrada necessário para iniciar a fase de Free Streaming é a densidade de energia. A densidade de energia é gerado no TRENTO no instante inicial $\tau_0 = 0$, adicionando uma constante de normalização para os perfis de entropia. A densidade de energia é interpretada como representando graus de liberdade sem massa. Essa densidade de energia é caracterizada por uma distribuição de momento $f(X; P)$ localmente isotrópica, centrada em um momento transversal zero. Além disso, a temperatura efetiva (ou valor médio de p_T) varia em relação à posição X (2).

O tempo de inicialização da hidrodinâmica é definido como τ_{fs} . Tipicamente, muitos modelos operam com a suposição de que esse tempo de inicialização hidrodinâmica seja constante para todas as centralidades e/ou para diferentes sistemas de colisão. Um tempo de pré-equilíbrio fixo é a escolha mais simples possível. Como a sobreposição dos núcleos colidentes flutua evento-a-evento, é natural esperar uma flutuação na fase de pré-equilíbrio, assim como existe na fase hidrodinâmica. Nesse sentido, a Colaboração Jetscape introduziu uma parametrização no tempo de Free Streaming, τ_{fs} , incorporando uma dependência na densidade de energia transversal inicialmente depositada (2):

$$\tau_{fs} = \tau_R \left(\frac{\langle \bar{\epsilon} \rangle}{\bar{\epsilon}_R} \right), \quad (87)$$

onde:

$$\langle \bar{\epsilon} \rangle \equiv \frac{\int d^2x_{\perp} \bar{\epsilon}^2(x_{\perp})}{\int d^2x_{\perp} \bar{\epsilon}(x_{\perp})}. \quad (88)$$

O valor de τ_R desempenha o papel de um fator de normalização, controlando a extensão do estágio de free streaming. Enquanto isso, o parâmetro α regula a sensibilidade desse ajuste

em relação à magnitude da densidade de energia inicial média no plano transversal. O valor de ϵ_R foi adotado como uma escala de referência arbitrária, com um valor fixo de $4.0 \text{ GeV}/\text{fm}^2$ (2).

5.3 EXPANSÃO HIDRODINÂMICA - MUSIC

Ao final da fase de free streaming, onde o sistema expandiu e evoluiu em direção ao equilíbrio térmico, assume-se que o sistema produzido passa a se comportar hidrodinamicamente. O MUSIC resolve as equações hidrodinâmicas. Essas equações descrevem a evolução do QGP como um fluido em expansão. Embora esta solução seja muito simples para descrever realisticamente as colisões relativísticas de íons pesados, ela ainda é uma boa primeira aproximação para a dinâmica da média de velocidade. No entanto, quando se começa a fazer perguntas mais detalhadas sobre a dinâmica do QGP em evolução, como o fluxo elíptico e raios HBT ⁷, pois precisamos de cálculos mais sofisticados. Na energia SPS ⁸, o platô central na distribuição de rapidez não é muito pronunciado, pois é mais ou menos consistente com uma forma gaussiana. Em contraste, o platô central se estende por quatro unidades de rapidez no RHIC, portanto assumir uma invariância por translação na direção longitudinal deve ser uma aproximação válida no RHIC, restringindo as dimensões espaciais relevantes ao plano transversal. Para transcender a hidrodinâmica ideal (2+1)D, é necessário incorporar a dinâmica longitudinal adequada. Portanto, a motivação para desenvolver a hidrodinâmica (3+1)D é investigar a dinâmica longitudinal não trivial e seus efeitos na dependência da rapidez da dinâmica transversal (15).

Para resolver as equações da hidrodinâmica relativística, o MUSIC precisa de alguns ingredientes, tais como: equação de estado (EoS), viscosidades, temperatura de particularização, entre outros. As equações hidrodinâmicas relativísticas têm origem nas leis de conservação e adotam a seguinte forma geral (26):

⁷Fornecem quantidades tradicionais medidas experimentalmente, mas que não serão abordadas neste trabalho.

⁸O Super Proton Synchrotron (SPS) é uma máquina de aceleração de partículas localizada no CERN, com ênfase principal nas colisões de prótons. O SPS opera em até 450 GeV .

$$\partial_t \rho_a = -\nabla \cdot \mathbf{J}_a, \quad (89)$$

(onde $\nabla \cdot \mathbf{J}_a$ representa a divergência do vetor \mathbf{J}_a). Na equação 89, o índice "a" varia de 0 a 4, representando a energia, as três componentes do momento e a densidade líquida de bárions. A tarefa consiste em resolver essas equações em conjunto com a equação de estado. A solução da equação 89 é complexa e requer a implementação adequada do algoritmo de Kurganov-Tadmor, KT, para ser resolvida de maneira eficaz. Para ilustrar o método, considere a seguinte equação da conservação de componente único em uma dimensão espacial juntamente com uma equação $J = v\rho$:

$$\partial_t \rho = -\partial_x J. \quad (90)$$

Todas as características essenciais do KT podem ser explicadas com este exemplo simples. A necessidade de métodos numéricos mais sofisticados para resolver equações conservativas vem em parte do fato de que uma discretização ingênua da equação 90 como:

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} = -\frac{J_{j+1}^n - J_{j-1}^n}{2\Delta x}. \quad (91)$$

com $J = v\rho$ é incondicionalmente instável, ou seja, a solução crescerá sem limites conforme t aumenta ou começa a oscilar incontrolavelmente. Aqui o sobrescrito 'n' indica que a quantidade é avaliada em $t_n = t_0 + n\Delta t$, o subscrito 'j' indica que a quantidade representa o valor em $x_j = j\Delta x$. A equação, $J = v\rho$, pode ser tornar estável se concebermos um esquema em que o amortecimento numérico seja introduzido, ou seja, suponha substituir ρ_j^n da equação 91 por um espaço médio $\frac{\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n}{2}$. No limite pequeno Δt e Δx , isso é conhecido como método Lax e é equivalente a resolver:

$$\partial_t \rho = -\partial_x J + \frac{(\Delta x)^2}{(2\Delta t)} \partial_x^2 \rho. \quad (92)$$

O segundo termo é o termo de dissipação numérica frequentemente referido como a “viscosidade numérica”, este método simples estabiliza as soluções numéricas, mas também pode-se ver imediatamente que $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ não deve ser grande, pois este termo artificial não pode dominar a evolução do sistema. No entanto, em KT a viscosidade artificial não depende de Δt , mas pode depender apenas de algum valor positivo de Δx . Com limite pequeno Δt e Δx , e ainda com a viscosidade artificial não dependente de Δt , podemos utilizar $\Delta t \rightarrow 0$, com isso, é possível transformar esse conjunto de equações em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, colocando uma vasta gama de solucionadores de EDO à disposição e tornando este método muito mais versátil, conforme a seguir (26):

$$\bar{\rho}(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} dx \rho(x, t), \quad (93)$$

torna-se

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho}(t) = \frac{J(x_{j-\frac{1}{2}}, t) - J(x_{j+\frac{1}{2}}, t)}{\Delta x}. \quad (94)$$

O KT é uma metodologia de volume finito do tipo MUSCL (Monotonic Upstreamcentered Schemes for Conservation Laws) em que a média da célula da densidade ρ em torno de x_j é usado em vez do valor da densidade em x_j e a densidade de corrente e carga em valores diferentes de x_j são construídos usando uma aproximação linear por partes (26). Este método leva a descontinuidades nos pontos intermediários $x_j \pm \frac{1}{2}$ onde a corrente é avaliada. Kurganov e Tadmor resolveram este problema usando a velocidade máxima de propagação local $a = \left| \frac{\partial J}{\partial \rho} \right|$ para identificar até que ponto a influência das descontinuidades em $x_j \pm \frac{1}{2}$ podiam viajar e dividiram o espaço em dois grupos; um com elementos que incluem uma descontinuidade e outro onde a solução é suave. Vamos citar aqui o resultado final de Kurganov e Tadmor para

a equação de conservação no limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d}{dt}\bar{\rho}_j(t) = -\frac{H_{j+\frac{1}{2}}(t) - H_{j-\frac{1}{2}}(t)}{\Delta x}, \quad (95)$$

onde:

$$H_{j\pm\frac{1}{2}} = \frac{J(x_{j\pm\frac{1}{2}}, +, t) + J(x_{j\pm\frac{1}{2}}, -, t)}{2} - \frac{a_{j\pm\frac{1}{2}}(t)}{2}(\bar{\rho}_{j\pm\frac{1}{2},+}(t) - \bar{\rho}_{j\pm\frac{1}{2},-}(t)), \quad (96)$$

com:

$$\bar{\rho}_{j+\frac{1}{2},+} = \bar{\rho}_{j+1} - \frac{\Delta x}{2}(\rho_x)_{j+1}, \quad (97)$$

$$\bar{\rho}_{j+\frac{1}{2},-} = \bar{\rho}_j + \frac{\Delta x}{2}(\rho_x)_j. \quad (98)$$

A ordem das derivadas espaciais $(\rho_x)_j$ é escolhida pelo limitador de fluxo "minmod"(esquema numérico usado para resolver problemas, especialmente em dinâmica de fluidos, representados por equações diferenciais parciais):

$$\minmod(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \min_j \{x_j\}, & se(x_j > 0) \forall j, \\ \max_j \{x_j\}, & se(x_j < 0) \forall j, \\ 0, & outros, \end{cases}$$

$$(\rho_x)_j = \minmod\left(\theta \frac{\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_j}{\Delta x}, \frac{\bar{\rho}_{j+1} - \bar{\rho}_{j-1}}{2\Delta x}, \theta \frac{\bar{\rho}_j - \bar{\rho}_{j-1}}{\Delta x}\right). \quad (99)$$

O parâmetro $1 \leq \theta \leq 2$ controla a quantidade de difusão e o comportamento oscilatório. Esta é também a nossa escolha com $\theta = 1.1$, permitindo maior precisão usando a aproximação de segunda ordem sempre que possível, evitando oscilações espúrias em torno de gradientes rígidos ao mudar para a aproximação de primeira ordem quando necessário.

No MUSIC é implementado do algoritmo KT para colisões relativísticas de íons pesados. É utilizado o sistema de coordenadas natural $\tau - \eta_s$, no sistema de coordenadas natural, a equação de conservação $\partial_u J^u = 0$ torna-se (26):

$$\partial_\tau(\tau J^\tau) + \partial_{\eta_s} J^{\eta_s} + \partial_v(\tau J^v) = 0, \quad (100)$$

onde:

$$J^\tau = (\cosh \eta_s J^0 - \sinh \eta_s J^3), \quad (101)$$

$$J^{\eta_s} = (\cosh \eta_s J^3 - \sinh \eta_s J^0). \quad (102)$$

A rapidez, denotada por η_s , é calculada como a inversa da tangente hiperbólica de $\frac{z}{t}$. Os índices v e ω referem-se às coordenadas transversais x e y , que não são afetadas pelo impulso. Essa mesma transformação é aplicada a ambos os índices da matriz $T^{\mu\nu}$, assim (26):

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau\tau}) + \partial_{\eta_s}(T^{\eta_s\tau}) + \partial_v(\tau T^{v\tau}) + T^{\eta_s\eta_s} = 0, \quad (103)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau\eta_s}) + \partial_{\eta_s}(T^{\eta_s\eta_s}) + \partial_v(\tau T^{v\eta_s}) + T^{\tau\eta_s} = 0, \quad (104)$$

$$\partial_\tau(\tau T^{\tau v}) + \partial_{\eta_s}(T^{\eta_s v}) - \partial_\omega(\tau T^{\omega v}) = 0. \quad (105)$$

Aplicando o método de KT para resolver a equação 100 para a corrente de bárions e as

equações 103 a 105 para energia e momento, novos valores de J^τ , $T^{\tau\tau}$ e $T^{\tau\eta_s}$ as seguintes expressões são obtidas, um gás ideal (26):

$$T^{\tau\tau} = (\varepsilon + p)u^\tau u^\tau - p, \quad (106)$$

$$T^{\tau\eta_s} = (\varepsilon + p)u^{\eta_s} u^\tau, \quad (107)$$

$$T^{\tau\nu} = (\varepsilon + p)u^\tau u^\nu, \quad (108)$$

$$J^\tau = \rho u^\tau. \quad (109)$$

Juntamente com a equação de estado (26):

$$p = p(\varepsilon, \rho). \quad (110)$$

Os valores de ε e ρ são obtidos resolvendo as seguintes equações acoplada:

$$\varepsilon = T^{\tau\tau} - \frac{K}{[T^{\tau\tau} + p(\varepsilon, \rho)]}, \quad (111)$$

$$\rho = J^\tau \sqrt{\frac{\varepsilon + p(\varepsilon, \rho)}{T^{\tau\tau} + p(\varepsilon, \rho)}}, \quad (112)$$

onde:

$$K = (T^{\eta_s\tau})^2 + (T^{x\tau})^2 + (T^{y\tau})^2. \quad (113)$$

5.4 PARTICULARIZAÇÃO - IS3D

A particularização é um conceito fundamental na física de partículas, pois representa uma transição essencial na forma como abordamos a descrição dos fenômenos. Esta transição envolve a mudança de uma descrição que considera graus de liberdade macroscópicos dinâmicos de um fluido para uma abordagem cinética microscópica que considera partículas individuais, cada uma com posições e momentos bem definidos (2).

Com base nas pesquisas de (27) e (28), introduzimos uma transição utilizando o parâmetro conhecido como temperatura de particularização. Inicialmente, dois efeitos distintos ocorrem simultaneamente. A rápida desintegração da hidrodinâmica abaixo da transição de confinamento, devido ao aumento do livre caminho médio resultante da neutralização da cor, invalida a aplicação da teoria cinética durante a transição de fase, impondo restrições teóricas rigorosas à faixa de temperatura para o procedimento de particularização (2). Nessa faixa, assumimos que a particularização ocorre em $\mu_i = b_i\mu_B + s_i\mu_S + q_i\mu_Q$, com $\mu_B = \mu_S = \mu_Q = 0$. Aqui, μ_B , μ_S e μ_Q são os potenciais químicos associados ao número de bárions conservados, à estranheza e à carga elétrica, enquanto (b_i, s_i, q_i) indicam as cargas de bárion, estranheza e elétrica transportadas pelas espécies de hádrons i . Importante notar que todos esses potenciais químicos são assumidos como zero neste estudo, refletindo a virtual ausência de bárions, estranheza e carga elétrica próximo à velocidade média nas energias de colisão superiores do RHIC e LHC (2). Essa simplificação é adotada para evitar a complexidade inerente à evolução de um sistema partônico no espaço-tempo, bem como a necessidade subsequente de aplicar uma prescrição ou modelo de hadronização. Sem essa simplificação, enfrentaríamos desafios substanciais na obtenção de uma descrição precisa desse fenômeno.

A utilização de informações da hiper superfície de freeze-out desempenham um papel crucial na simulação da emissão de hádrons resultantes de colisões de íons pesados. Isso

é alcançado por meio da aplicação do método de Monte Carlo à fórmula de Cooper-Frye⁹. Essa fórmula converte informações dinâmicas do fluido em distribuições locais no espaço de fase para os hádrons, resultando em tipos de distribuições de equilíbrio que foram ajustadas para atender às necessidades do estudo (29). A fórmula de Cooper-Frye pode ser escrita da seguinte forma (29):

$$P^0 \frac{d^3 N_i}{d^3 P} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3 \sigma_u P^\mu f_i(X, P), \quad (114)$$

sendo:

1. P^0 : representa a componente de energia do quadrimomento P^μ de uma partícula produzida.
2. $\frac{d^3 N_i}{d^3 P}$: é a taxa de produção de partículas do tipo i por unidade de volume de momento tridimensional P^3 . Em outras palavras, é uma medida de quantas partículas do tipo i estão sendo produzidas em uma região de espaço e momento específico.
3. g_i : Representa a degenerescência de spin das partículas do tipo i .
4. $\int d^3 \sigma_\mu$: representa a integral sobre uma hiper superfície no espaço de fases. A hiper superfície descreve a fronteira do sistema onde as partículas estão sendo produzidas. O $d^3 \sigma_\mu$ é um elemento infinitesimal.
5. $f_i(X, P)$: representa a distribuição de partículas do tipo i no espaço de fases. Isso significa que depende tanto das coordenadas espaciais X quanto do quadrimomento P das partículas. A combinação desses elementos permite calcular o número de partículas produzidas e suas distribuições de momento associadas após a colisão de íons pesados. Essa distribuição reflete o equilíbrio termodinâmico do sistema.

A fórmula de Cooper-Frye permite calcular a taxa de emissão de partículas observadas em um experimento a partir das propriedades do sistema emissor, como sua temperatura, velocidade de expansão e distribuição de partículas no espaço de fase.

⁹A fórmula de Cooper-Frye descreve como as partículas são emitidas a partir de sistemas quentes e em expansão, como o plasma de quarks e glúons.

5.5 LISTA DE OBSERVÁVEIS - URQMD

O UrQMD descreve a evolução do sistema produzido após uma colisão quando ele está na fase de um gás de hádrons (30). Este modelo é extensivamente utilizado para investigar a física nuclear em colisões de íons pesados, com ênfase na interação entre partículas em sistemas altamente energéticos. O UrQMD é um modelo orientado por eventos que simula a evolução temporal das colisões de íons pesados, desde o instante da colisão até a formação e o subsequente decaimento das partículas. Ele abrange uma ampla gama de processos, englobando colisões elásticas e inelásticas, decaimentos de ressonâncias, interações de partículas com o ambiente circundante, entre outros. Adicionalmente, o UrQMD incorpora um módulo conhecido como "afterburner", que desempenha um papel crucial na fase final da evolução do sistema gerado em colisões de íons pesados. Esta fase final é essencial para a análise das partículas observadas em experimentos, uma vez que muitas delas não são diretamente produzidas na colisão inicial, mas surgem a partir de interações subsequentes entre as partículas no sistema.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 CONDIÇÕES INICIAIS MODELO GARDIM E COLABORADO, GIACALONE E OLLITRAULT

Como mencionado anteriormente, vamos direcionar nosso estudo em colisões ultracentrais. Geralmente, em colisões ultracentrais, o plasma de quarks e glúons tem um volume aproximadamente constante, enquanto a entropia pode variar significativamente, em até 10% (1).

Gerou-se no TRENTo (24) as condições iniciais de Au-Au e Pb-Pb, foram 20 milhões de eventos com os parâmetros da Tabela 4.

Tabela 4 - Descrição dos parâmetros do TRENTo

Parâmetros do Modelo TRENTo	Condições iniciais	
	Pb-Pb $\sqrt{S_{NN}} = 5.02$ TeV	Au-Au $\sqrt{S_{NN}} = 0.2$ TeV
p : Espessura reduzida	0	0
w : Largura média do núcleo	0.5 fm	0.5 fm
d : Distância mínima núcleo a núcleo	0	0
σ_k : Flutuação	2	2
n : Normalização	1	1
x : Seção de choque	7 fm ²	4.23 fm ²

Fonte: Adaptado de (1).

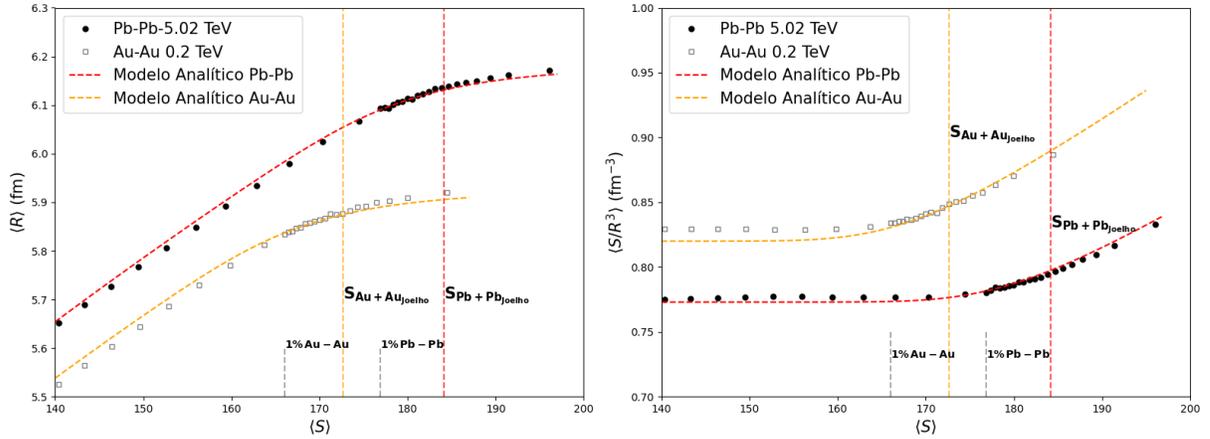
Posteriormente, procedemos ao cálculo das médias das entropias totais, raios e densidades de entropia dos eventos, concentrando-nos nos eventos classificados entre os 10% mais centrais. O raio transversal médio, denotado por R , é definido da seguinte forma (1):

$$R^2 \equiv 2(\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2), \quad (115)$$

onde $r = (x, y)$ é a coordenada transversal e os colchetes angulares denotam um valor médio obtido com a densidade de entropia inicial como um peso.

A entropia do sistema pode ser descrita pela equação 116:

Figura 5 - 20 Milhões de Eventos de Pb-Pb e Au-Au gerados no TRENTo. São utilizados apenas 10% desses eventos, correspondentes aos maiores valores da entropia total, S , (0-10% de centralidade), calculados sobre a média dos eventos. As linhas pontilhadas nos painéis são ajustes de um parâmetro usando as Equações 124 e 125. As linhas verticais identificam valores específicos do percentil de centralidade e da posição do joelho que é calculado conforme a equação 118



Fonte: Elaborada pela autora.

$$S = \int s dV, \quad (116)$$

onde, 's' a densidade de entropia do QGP.

Os gráficos da Figura 5 apresentam dois regimes, lado esquerdo e direito do joelho¹⁰ que serão indicados por uma linha vertical. As linhas pontilhadas nos gráfico da figura 5 são ajustadas à simulação TRENTo completa usando as equações 124 e 125. Existe apenas um parâmetro de ajuste para cada curva, r_0 e s_0 , cujos valores estão listados na Tabela ???. É importante observar que o ajuste da curva, representado pelas linhas pontilhadas nos gráficos da Figura 5, está associado ao raio, $\langle R \rangle$ (fm), à esquerda, e à densidade de entropia, $\langle \frac{S}{R^3} \rangle$ ($1/\text{fm}^3$), à direita. A densidade de entropia, $\langle \frac{S}{R^3} \rangle$ ($1/\text{fm}^3$), é proporcional a $\langle p_T \rangle$, o qual é determinado após a expansão hidrodinâmica. Detalhes sobre os ajustes das curvas serão apresentados na Subseção 6.1.1.

¹⁰O cálculo do valor de S_{joelho} é realizado mediante a aplicação da Equação 118, representando assim o valor médio da entropia, denotada por S , quando $b = 0$.

Tabela 5 - Resultados TRENto, os parâmetros correspondentes às condições iniciais simuladas encontram-se na Tabela 4, os valores de S_{Joelho} , r_0 e s_0 foram obtidos utilizando as equações 118, 124 e 125, respectivamente

Resultados Figura 5	S_{Joelho}	σ	r_0 (fm)	s_0 (1/fm ³)
Pb-Pb	184.14	7.06	6.19	0.77
Au-Au	172.64	6.94	5.94	0.82

Fonte: Elaborada pela autora.

6.1.1 Modelo analítico

Um modelo analítico (1) foi proposto, no qual foi derivado uma parametrização simples que captura as tendências observadas no gráfico da figura 5. Pressupõe-se que as flutuações evento a evento de S em um parâmetro de impacto fixo, b , são gaussianas (31):

$$P(S|\bar{S}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(S - \bar{S})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (117)$$

onde \bar{S} é o valor médio, que diminui com o aumento do parâmetro de impacto, b , e o símbolo σ é a largura, cuja dependência de b pode ser desprezada uma vez que focamos em eventos ultracentrais. O valor de S_{Joelho} é definido como o valor médio da entropia em $b = 0$ (1),

$$S_{Joelho} \equiv \bar{S}(0). \quad (118)$$

Integrando sobre \bar{S} , assumindo $P(\bar{S})$ como constante, temos (1):

$$P(S) = \int_0^{S_{Joelho}} P(S|\bar{S})P(\bar{S})d\bar{S}, \quad (119)$$

$$P(S) = P(\bar{S}) \int_0^{S_{Joelho}} P(S|\bar{S})d\bar{S}, \quad (120)$$

$$\propto \operatorname{erfc} \frac{(S - S_{Joelho})}{\sigma\sqrt{2}}. \quad (121)$$

Os parâmetros S_{Joelho} e σ foram obtidos dentro do modelo TRENTo (24), calculando a média e o desvio padrão da distribuição de S para $b = 0$. Os valores de S_{Joelho} e σ estão na Tabela ???. Precisamos de $P(\bar{S}|S)$, mas temos $P(S|\bar{S})$. Podemos solucionar esse problema utilizando o Teorema de Bayes. Aplicando o Teorema de Bayes para obter $P(\bar{S}|S)$ através de $P(S|\bar{S})$, assim:

$$P(\bar{S}|S) = \frac{P(\bar{S})P(S|\bar{S})}{P(S)}. \quad (122)$$

O valor médio de \bar{S} para S fixo, denotado por $\langle \bar{S}|S \rangle$ é obtido inserindo a equação 117 na equação 122 e integrando sobre \bar{S} , assumindo novamente que $P(\bar{S})$ é constante (1):

$$\langle \bar{S}|S \rangle = S - \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left(\frac{-(S-S_{Joelho})^2}{2\sigma^2}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{(S-S_{Joelho})}{\sqrt{2}\sigma}\right)}. \quad (123)$$

A observação de que a densidade de entropia é constante à esquerda do joelho no cálculo do TRENTo (24) sugere que o volume é proporcional a \bar{S} . Sob esta suposição, o raio R é (1):

$$R = r_0 \left(\frac{\langle \bar{S}|S \rangle}{S_{Joelho}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (124)$$

A densidade de entropia é dada por (1):

$$s = s_0 \left(\frac{S}{\langle \bar{S}|S \rangle} \right). \quad (125)$$

Nessas equações, r_0 e s_0 correspondem ao valor de R à direita do joelho, e o valor de s à

esquerda do joelho, respectivamente.

6.2 CONDIÇÕES INICIAIS MODELO GRAD JETSCAPE

Conduzimos uma análise semelhante à análise de condições iniciais da Subseção 6.1, desta vez, utilizando as condições iniciais com os parâmetros Grad da Colaboração JETSCAPE (2). O valor fixado para cada quantidade necessária para realização desta simulação estão especificados na Tabela 6. A Figura 6 apresenta os resultados obtidos nesta simulação e os parâmetros de ajuste para cada curva, r_0 e s_0 , estão listados na Tabela 7.

Tabela 6 - Descrição dos parâmetros do TRENTo modelo Grad da JETSCAPE

Parâmetros do Modelo TRENTo	Condições iniciais	
	Pb-Pb $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$ TeV	Au-Au $\sqrt{S_{NN}} = 0.2$ TeV
p : Espessura reduzida	0.063	0.063
w : Largura média do núcleon	1.12 fm	1.12 fm
d : Distância mínima núcleon a núcleon	1.437 fm	1.437 fm
σ_k : Flutuação	1.05	1.05
n : Normalização	14.2	5.72
x : Seção de choque	6.28 fm ²	4.23 fm ²

Fonte: Adaptado de (2).

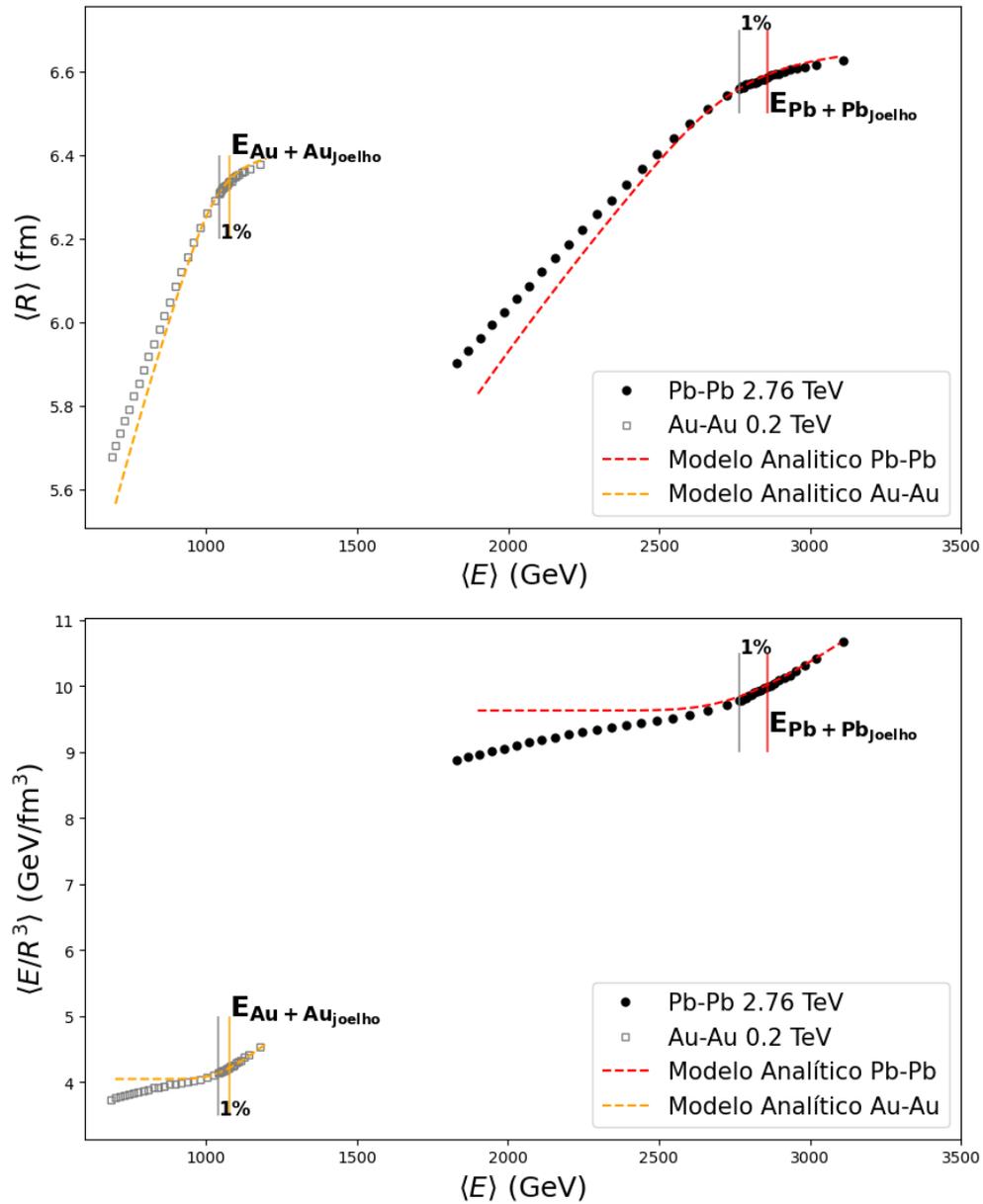
Tabela 7 - Resultados TRENTo, os parâmetros correspondentes às condições iniciais simuladas encontram-se na Tabela 6, os valores de E_{Joelho} , r_0 e s_0 foram obtidos utilizando as equações 118, 124 e 125, respectivamente

Resultados Figura 6	E_{Joelho} (GeV)	σ (GeV)	r_0 (fm)	s_0 (GeV/fm ³)
Pb-Pb	2858.95	139.37	6.68	9.63
Au-Au	1078.90	54.69	6.43	4.05

Fonte: Elaborada pela autora.

Era esperado que a densidade de energia do gráfico da Figura 6 fosse constante à esquerda do joelho para Pb-Pb e Au-Au nos resultados do TRENTo (24) (conforme o resultado do gráfico da Figura 5), porém o resultado difere do esperado. Houve uma tentativa de ajustar as constantes r_0 e s_0 manualmente para melhorar a aproximação do modelo analítico nas colisões mais ultracentrais, pontos próximos ao joelho, e tivemos uma boa aproximação nessa região.

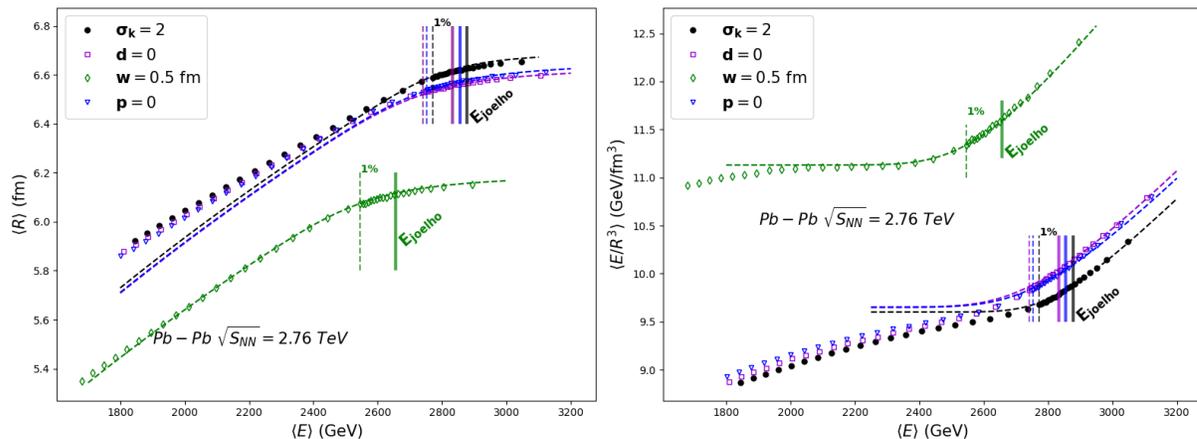
Figura 6 - 20 Milhões de Eventos de Pb-Pb e Au-Au gerados no TRENTO. Utilizou-se apenas 10% desses eventos, correspondentes aos maiores valores da energia total, E (GeV), (0-10% de centralidade), calculados sobre a média dos eventos. As linhas pontilhadas nos painéis representam ajustes de parâmetros utilizando as Equações 124 e 125. As linhas verticais identificam valores específicos do percentil de centralidade e da posição do joelho, calculados conforme a Equação 118



Fonte: Elaborada pela autora.

Com o intuito de investigar as razões subjacentes à variação na densidade de energia à esquerda do joelho do gráfico na Figura 6, produziu-se novos eventos utilizando o modelo TRENTo para os sistemas Pb-Pb e Au-Au. Adotando uma abordagem sistemática, alterando o valor (com respeito aos valores listados na Tabela 6) de apenas um único parâmetro por vez para compreender a contribuição de cada um nesse resultado específico. Os diferentes testes consistiram em: i) fixar $\sigma_k = 2$; ii) fixar $d = 0$; iii) fixar $w = 0.5$ fm, e, finalmente, iv) fixar $p = 0$. Os resultados estão nos gráficos das Figuras 7 e 8. Os parâmetros de ajuste para cada curva, r_0 e s_0 , estão listados na Tabela 8.

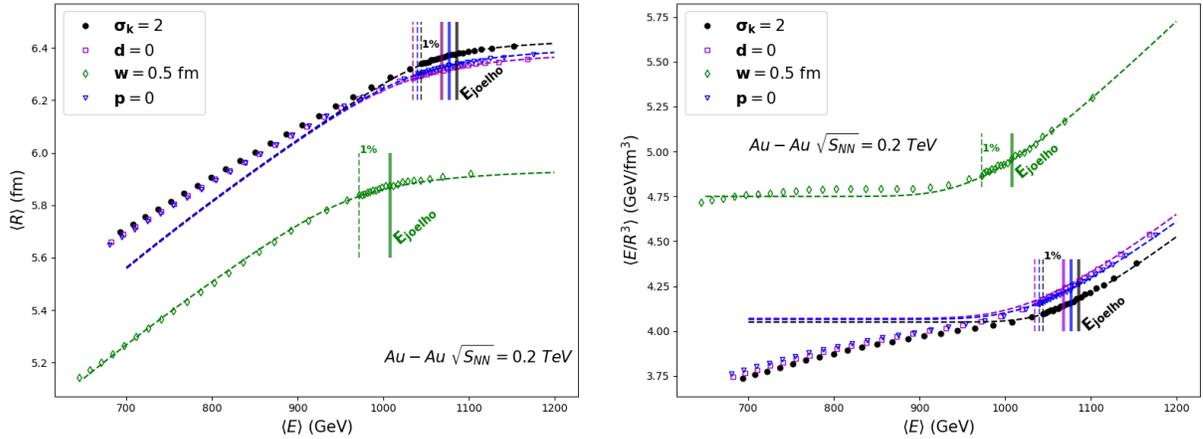
Figura 7 - 20 milhões de eventos de Pb-Pb gerados no TRENTo, fixando diferentes parâmetros da Tabela 6, como: $\sigma_k = 2$, $d = 0$, $w = 0.5$ e $p = 0$. São utilizados apenas 10% desses eventos, correspondentes aos maiores valores da energia total, E (GeV), (0-10% de centralidade), calculados sobre a média dos eventos. As linhas pontilhadas nos painéis são ajustes de um parâmetro usando as Equações 124 e 125. As linhas verticais identificam valores específicos do percentil de centralidade e da posição do joelho que é calculado conforme equação 118



Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados apresentados nas Figuras 7 e 8 ressaltam a importância da largura do núcleon (nucleon width), representada por w , na variação da densidade de energia à esquerda do joelho. É observável que ao reduzirmos w para 0.5 fm, o raio diminui significativamente, resultando em um aumento proporcional da densidade de energia, que é inversamente proporcional ao raio. Para compararmos as inclinações das curvas, procedemos à normalização dos dados, dividindo o valor médio da energia total (E em GeV) pelo valor médio de (E em GeV) na janela de centralidade de 0 a 5%, denotado por $\langle E/E_{0-5\%} \rangle$. O mesmo procedimento foi aplicado ao

Figura 8 - 20 milhões de eventos de Au-Au gerados no TRENTo, fixando diferentes parâmetros da Tabela 6, como: $\sigma_k = 2$, $d = 0$, $w = 0.5$ e $p = 0$. São utilizados apenas 10% desses eventos, correspondentes aos maiores valores da energia total, E (GeV), (0-10% de centralidade), calculados sobre a média dos eventos. As linhas pontilhadas nos painéis são ajustes de um parâmetro usando as Equações 124 e 125. As linhas verticais identificam valores específicos do percentil de centralidade e da posição do joelho que é calculado conforme equação 118



Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 8 - Resultados TRENTo para Pb-Pb. Os parâmetros correspondentes às condições iniciais simuladas encontram-se na Tabela 6. Os valores de E_{Joelho} , r_0 e s_0 foram obtidos utilizando as equações 118, 124 e 125, respectivamente

Resultados Figura 7	E_{Joelho} (GeV)	σ (GeV)	r_0 (fm)	s_0 (GeV/fm ³)
$\sigma_k = 2$	2877.95	101.99	6.70	9.60
$d = 0$	2832.84	139.02	6.64	9.65
$w = 0.5$ fm	2656.68	132.94	6.20	11.13
$p = 0$	2854.52	139.38	6.66	9.65

Fonte: Elaborada pela autora.

raio R (em fm) e à densidade de energia $\frac{E}{R^3}$ (em GeV/fm³), resultando em $\langle R/R_{0-5\%} \rangle$ e $\langle \frac{E}{R^3} \rangle / \langle \frac{E}{R^3} \rangle_{0-5\%}$ respectivamente, conforme apresentados nos gráficos das Figuras 9 e 10. A escolha da faixa de centralidade de 0 a 5% revela-se estratégica, pois nesse intervalo os dados resultam valores médios próximos. Posteriormente, conduzimos simulações com um milhão de eventos de Pb-Pb gerados no TRENTo, considerando o parâmetro de impacto $b = 0$ (conforme apresentado no gráfico da Figura (11) para: i) $\sigma_k = 2$; ii) $d = 0$; iii) $w = 0.5$ fm, e iv) $p = 0$. Em seguida fizemos um gráfico de densidade de probabilidade, e comparamos com a densidade

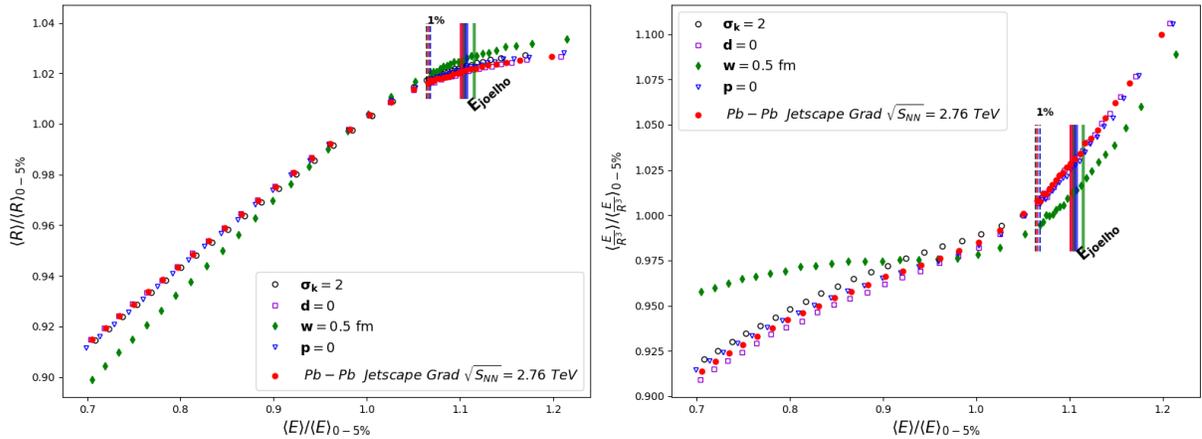
Tabela 9 - Resultados TRENTo para Au-Au. Os parâmetros correspondentes às condições iniciais simuladas encontram-se na Tabela 6. Os valores de E_{Joelho} , r_0 e s_0 foram obtidos utilizando as equações 118, 124 e 125, respectivamente

Resultados Figura 8	E_{Joelho} (GeV)	σ (GeV)	r_0 (fm)	s_0 (GeV/fm ³)
$\sigma_k = 2$	1086.09	40.32	6.44	4.05
$d = 0$	1068.50	54.67	6.40	4.07
$w = 0.5$ fm	1008.35	52.34	5.95	4.75
$p = 0$	1077.35	54.69	6.42	4.06

Fonte: Elaborada pela autora.

de probabilidade obtida pela equação 117. Com isso, foi possível verificar que a equação 117 descreve bem os dados. Além disso, verificamos que a densidade de probabilidade sofre variações significativas para $w = 0.5$. Os resultados então apresentados na Figura 11.

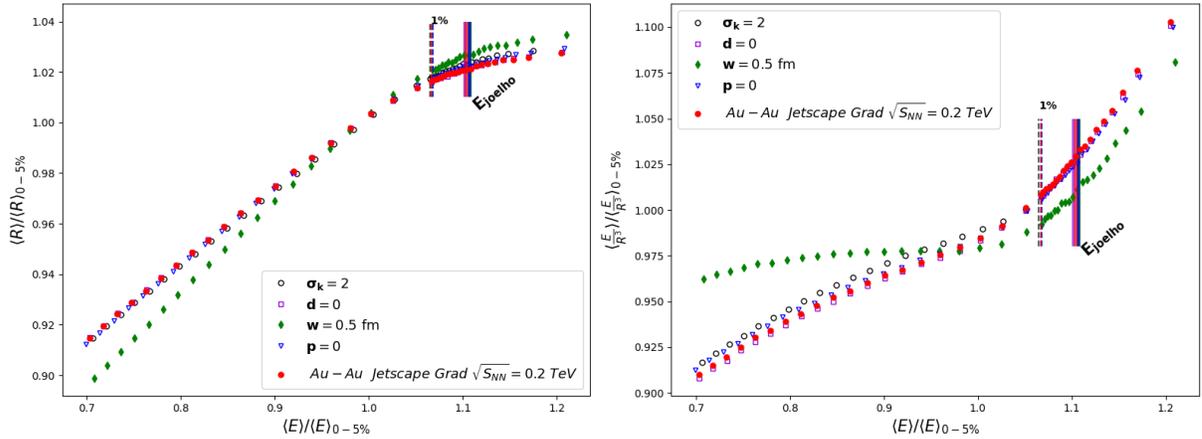
Figura 9 - 20 Milhões de Eventos de Pb-Pb gerados no TRENTo para a energia de $\sqrt{S_{NN}}$ de 2.76 TeV, com os dados normalizados. Para a normalização, foi utilizado a média da janela de centralidade de 0 a 5%. São utilizados apenas 10% desses eventos, correspondentes aos maiores valores da energia total, E (GeV), (0-10% de centralidade), calculados sobre a média dos eventos, fixando diferentes parâmetros da Tabela 6, como: $\sigma_k = 2$, $d = 0$, $w = 0.5$ e $p = 0$



Fonte: Elaborada pela autora.

Analizamos, adicionalmente, os gráficos representados na Figura 12, os quais ilustram a densidade de probabilidade resultante do cálculo TRENTo em simulações para $\sqrt{S_{NN}} = 5.02$ TeV e $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$ TeV, comparadas com os dados experimentais da colaboração ALICE (32, 25). Na Figura 12, realizamos um rescalonamento dos dados experimentais da ALICE

Figura 10 - 20 Milhões de Eventos de Au-Au gerados no TRENTo para a energia de $\sqrt{S_{NN}}$ de 2.76 TeV, com os dados normalizados. Para a normalização, foi utilizado a média da janela de centralidade de 0 a 5%. São utilizados apenas 10% desses eventos, correspondentes aos maiores valores da energia total, E (GeV), (0-10% de centralidade), calculados sobre a média dos eventos, fixando diferentes parâmetros da Tabela 6, como: $\sigma_k = 2$, $d = 0$, $w = 0.5$ e $p = 0$

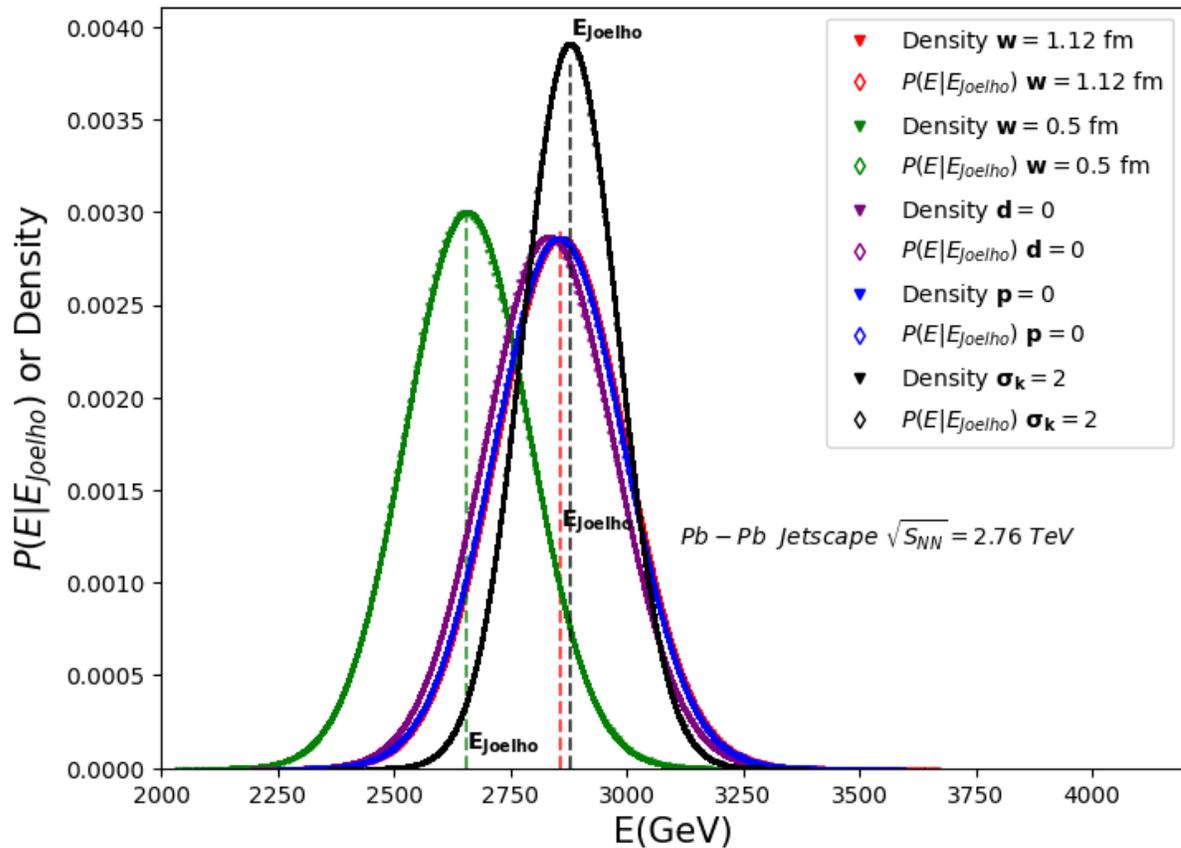


Fonte: Elaborada pela autora.

(32, 25) para se ajustarem aos dados do TRENTo. O rescalonamento não afeta a física envolvida, é como se você somente jogasse a curva para "baixo" ou para "cima" para "esquerda" ou para "direita" sem alterar as propriedades físicas encontradas a nível experimental. É perceptível na análise que os dados Grad da Jetscape (2) (gráfico à direita da Figura 12), com $w = 0.5 fm$, decaem mais rapidamente em comparação aos dados com $w = 1.12 fm$. Esse resultado é coerente com a influência da largura do núcleon na densidade de energia e, por conseguinte, na evolução temporal dos dados. A diminuição de w para 0.5 fm implica em um raio menor, resultando em uma densidade de energia $(\frac{E}{R^3} (\frac{GeV}{fm^3}))$ mais concentrada. Isso pode levar a um decaimento mais rápido nos dados, como evidenciado na comparação com os resultados utilizando $w = 1.12 fm$. Essa observação fortalece a compreensão da influência do parâmetro w na densidade de probabilidade.

A Figura 13 apresenta as condições iniciais geradas pelo TRENTo. Essas representações correspondem à densidade de energia por unidade de área transversal e rapidez em função das coordenadas transversais, considerando três centralidades fixas: 1%, 0.02%, e 0.001%. As condições iniciais foram geradas considerando a largura do núcleon com valores de w igual a

Figura 11 - Densidade de probabilidade e densidade de probabilidade calculada pela equação 117 para um milhão de eventos de Pb-Pb para a energia de $\sqrt{S_{NN}}$ de 2.76 TeV e parâmetro de impacto $b = 0$, gerados no TRENTo, fixando diferentes parâmetros da Tabela 6, como: $\sigma_k = 2$, $d = 0$, $w = 0.5$ e $p = 0$



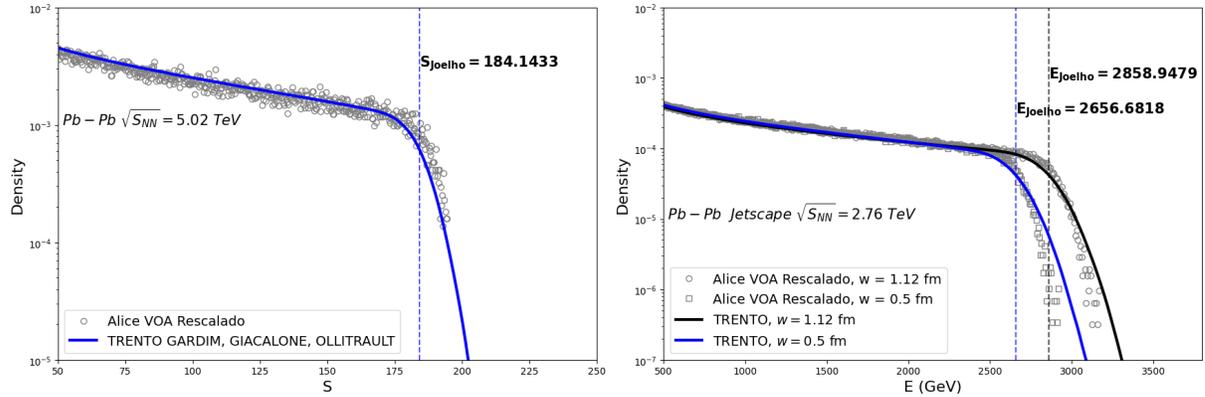
Fonte: Elaborada pela autora.

1.12 fm e 0.5 fm. É importante notar que a densidade de energia, representada por, τ_0 e (τ_0, r) , aumenta em intensidade à medida que a colisão se torna mais central.

6.3 SIMULAÇÃO COMPLETA PARA DIFERENTES LARGURAS DO NÚCLEON

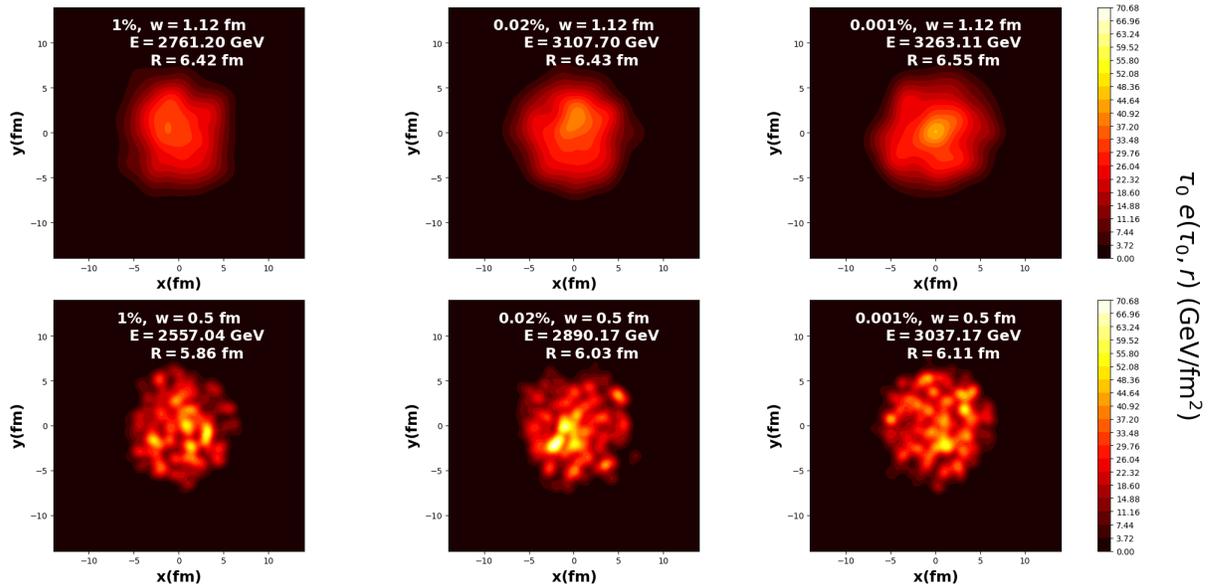
Aqui nos dedicamos à revelação de resultados inéditos oriundos de nossa pesquisa. Prepare-se para uma experiência surpreendente, pois aventuramo-nos por territórios desconhecidos. Os dados apresentados não apenas redefinem nosso entendimento atual, mas também abrem portas para futuras investigações e avanços significativos. Após a análise das condições iniciais geradas no TRENTo, realizou-se simulações completas, isto é, levando em conta as diferentes

Figura 12 - Densidade de probabilidade utilizando somente condições iniciais TRENTo, nas energias de $\sqrt{S_{NN}} = 5.02$ e $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$ TeV em comparação com os dados experimentais da ALICE rescalonado (32, 25)



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 13 - A densidade de energia por unidade de área transversal e rapidez, em função das coordenadas transversais para três centralidades fixas: 1%, 0.02%, e 0.001%



Fonte: Elaborada pela autora.

etapas de uma colisão de íons pesados relativísticos, para compreendermos o comportamento do momento transversal médio, $\langle p_T \rangle$, em colisões ultracentrais de Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$ TeV. Para essa análise, consideramos a largura do núcleon com valores de w iguais a 1.12 fm e 0.5 fm. Os parâmetros utilizados nessas simulações estão listados na Tabela

10 (2). Produzimos dois conjuntos de dados. No primeiro conjunto geramos 2 mil eventos para cada janela de centralidade, totalizando 18 mil eventos. Esses eventos foram gerados de acordo com os parâmetros descritos nas Tabelas 6 e 10, onde a largura do núcleon foi fixada em $w = 1.12$ fm. Em seguida, conduzimos um segundo conjunto com 501 eventos para cada janela de centralidade, totalizando 4509 eventos, alterando apenas a largura do núcleon para $w = 0.5$ fm. A quantidade de eventos e as janelas de centralidade consideradas estão apresentadas na Tabela 11.

Tabela 10 - Parâmetros Grad Jetscape $\sqrt{S_{NN}} = 2.76$ TeV

Parâmetro	Nome	Fase	Grad
τ_R [fm/c]	Escala de tempo Free streaming	Free streaming	1.46
α	Dependência de energia Free streaming	Free streaming	0.031
T_η [GeV]	Temperatura de torção (η/s)	Hidrodinâmica	0.223
a_{low} [GeV $^{-1}$]	Inclinação de baixa temperatura de (η/s)	Hidrodinâmica	-0.776
a_{high} [GeV $^{-1}$]	Inclinação de alta temperatura de (η/s)	Hidrodinâmica	0.37
(η/s) kink	(η/s) na torção	Hidrodinâmica	0.096
(ζ/s) $_{\text{max}}$	Máximo de (ζ/s)	Hidrodinâmica	0.133
T_ζ [GeV]	Temperatura do pico (ζ/s)	Hidrodinâmica	0.12
w_ζ [GeV]	Largura do pico (ζ/s)	Hidrodinâmica	0.072
λ_ζ	Assimetria do pico (ζ/s)	Hidrodinâmica	-0.122
b_π	Fator de tempo de relaxamento de cisalhamento	Hidrodinâmica	4.65
T_{sw} [GeV]	Temperatura de particularização	Particularização	0.136

Fonte: Adaptado de (2).

Tabela 11 - Intervalos de Centralidade

Intervalo de Centralidade (%)	Qtd de Eventos $w=1.12$ fm	Qtd de Eventos $w=0.5$ fm
0 - 0.001	2000	501
0 - 0.002	2000	501
0 - 0.005	2000	501
0 - 0.02	2000	501
0 - 0.2	2000	501
0 - 1.0	2000	501
0 - 2.5	2000	501
0 - 5.0	2000	501
5 - 10.0	2000	501

Fonte: Elaborada pela autora.

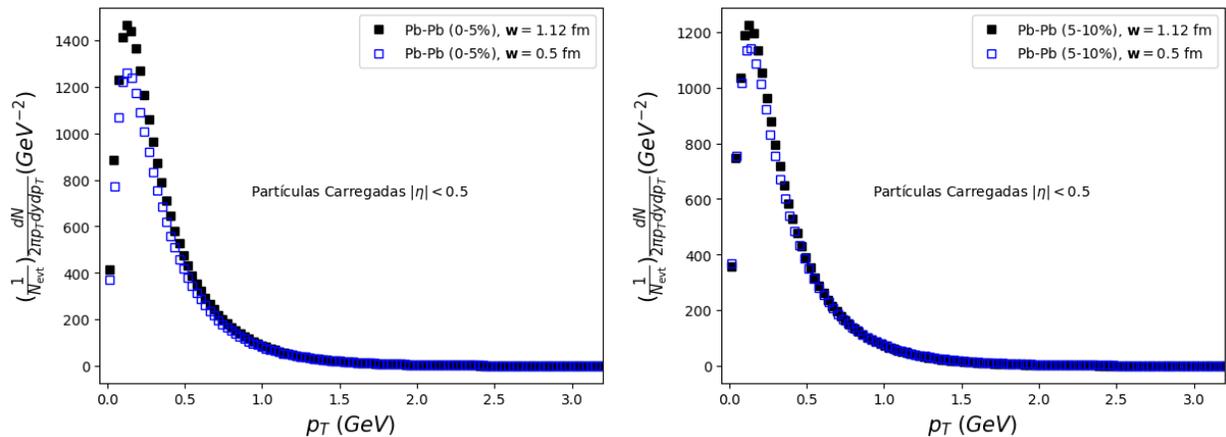
Realizamos análises específicas para partículas carregadas ($\eta < 0.5$), píons ($\pi, y < 0.5$), kaons ($K, y < 0.5$), prótons ($p, y < 0.5$) e antiprótons ($\bar{p}, y < 0.5$). As Figuras 14 a 17, apresentamos

dados do momento transversal dessas partículas para as janelas de centralidades de 0-5% e 5-10%. Também são mostrados os dados da ALICE (33) para píons, kaons, prótons e antiprótons. De forma geral, os espectros de momentos transversais de píons, kaons, prótons e antiprótons exibiram ajustes próximos aos dados da ALICE, conforme apresentados nas Figuras 15, 16 e 17. Contudo, destaca-se que os espectros associados a colisões com $w = 1.12$ fm demonstraram ajustes mais consistentes em relação aos dados da ALICE. O fato de termos modificado apenas o parâmetro w na análise bayesiana sugere a necessidade de reajustar outros ingredientes, tais como σ_k , d e p , a fim de aprimorar a concordância com os dados observados pela colaboração ALICE.

Na Figura 18 é possível verificar que o momento transversal médio, $\langle p_T \rangle$ (GeV), tende a aumentar à medida que a centralidade média diminui nos casos com a largura do núcleo, $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm, com exceção da janela de (5-10%), $w = 0.5$ fm, na qual $\langle p_T \rangle$ (GeV) é maior do que na janela de (0-5%). Na análise das condições iniciais, o gráfico da Figura 7 revela que $\langle \frac{E}{R^3} \rangle$ (GeV/fm³), proporcional a $\langle p_T \rangle$ (GeV), permanece aproximadamente constante nessas janelas para o caso com $w = 0.5$ fm, indicando uma variação mínima de $\langle p_T \rangle$ nessas janelas. É notável que $\langle p_T \rangle$ (GeV) é maior para os dados com $w = 0.5$ fm. Essa tendência é consistente com a análise das condições iniciais; o gráfico da Figura 7 revela que $\langle \frac{E}{R^3} \rangle$ (GeV/fm³), que é proporcional a $\langle p_T \rangle$ (GeV), é maior com $w = 0.5$ fm. Na Figura 18, os kaons (painel c) não se ajustam aos dados da ALICE para $w = 0.5$ fm, e os prótons (painel d) não se ajustam para $w = 1.12$ fm. Isso sugere investigações mais aprofundadas em estudos futuros.

A Figura 19 mostra que o momento transversal médio, $\langle p_T \rangle$ (GeV), tende a aumentar à medida que o número de partículas cresce, especialmente no caso com a largura do núcleo, $w = 1.12$ fm. No caso em que $w = 0.5$ fm, nota-se que $\langle p_T \rangle$ (GeV) inicialmente permanece aproximadamente constante (à esquerda) e, em seguida, começa a crescer à medida que o número de partículas aumentam. Essa tendência é consistente com a análise das condições iniciais; o gráfico da Figura 7 revela que a quantidade $\langle \frac{E}{R^3} \rangle$ (GeV/fm³), proporcional a $\langle p_T \rangle$ (GeV), permanece aproximadamente constante (à esquerda) para o caso com $w = 0.5$ fm. À medida que o número de partículas aumenta, observa-se também um crescimento na energia total (E em GeV), como evidenciado pelos gráficos apresentados na Figura 20.

Figura 14 - Os espectros de momentos transversais para Partículas Carregadas na janela de centralidade de 0-5% e 5-10% foram obtidos para colisões Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2), considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm

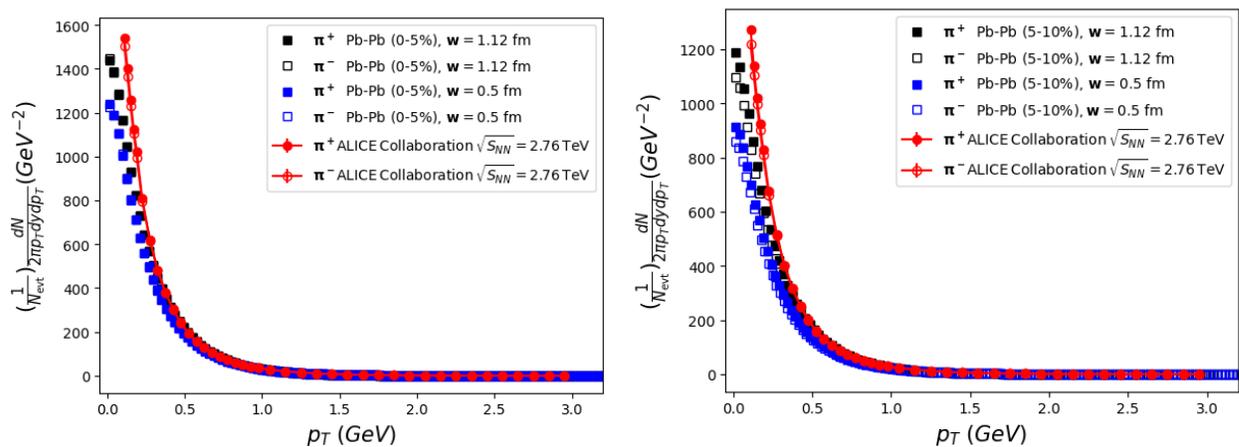


(a) Partículas carregadas, $\eta < 0.5$, 0-5%

(b) Partículas carregadas, $\eta < 0.5$, 5-10%

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 15 - Os espectros de momentos transversais para píons na janela de centralidade de 0-5% e 5-10% foram obtidos para colisões Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2). Esta análise considerou larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm, em comparação com os dados experimentais da colaboração ALICE (33)

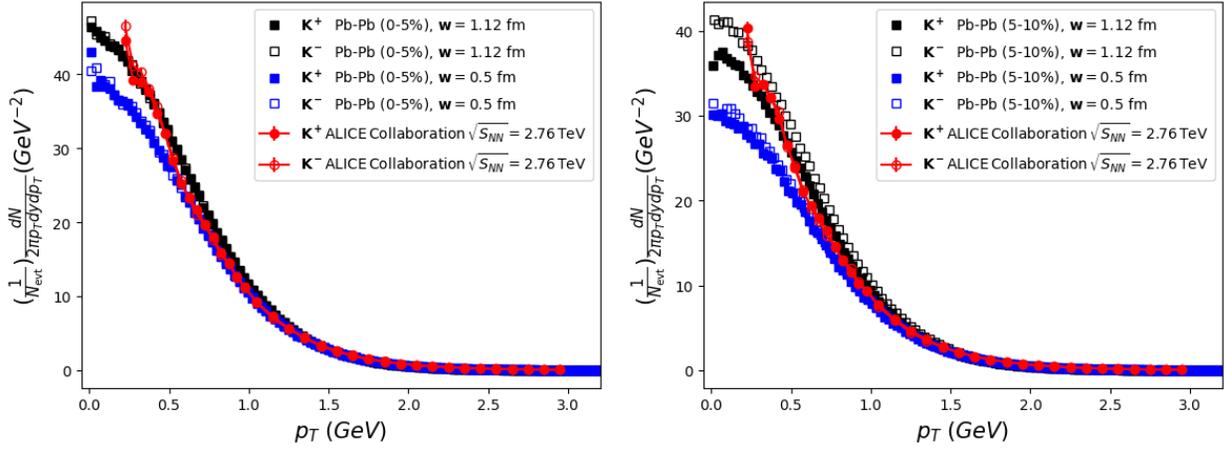


(a) Píons, $y < 0.5$, 0-5%

(b) Píons, $y < 0.5$, 5-10%

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 16 - Os espectros de momentos transversais para Kaons na janela de centralidade de 0-5% e 5-10% foram obtidos para colisões Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2). Esta análise considerou larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm, em comparação com os dados experimentais da colaboração ALICE (33)



(a) Kaons, $y < 0.5$, 0-5%

(b) Kaons, $y < 0.5$, 5-10%

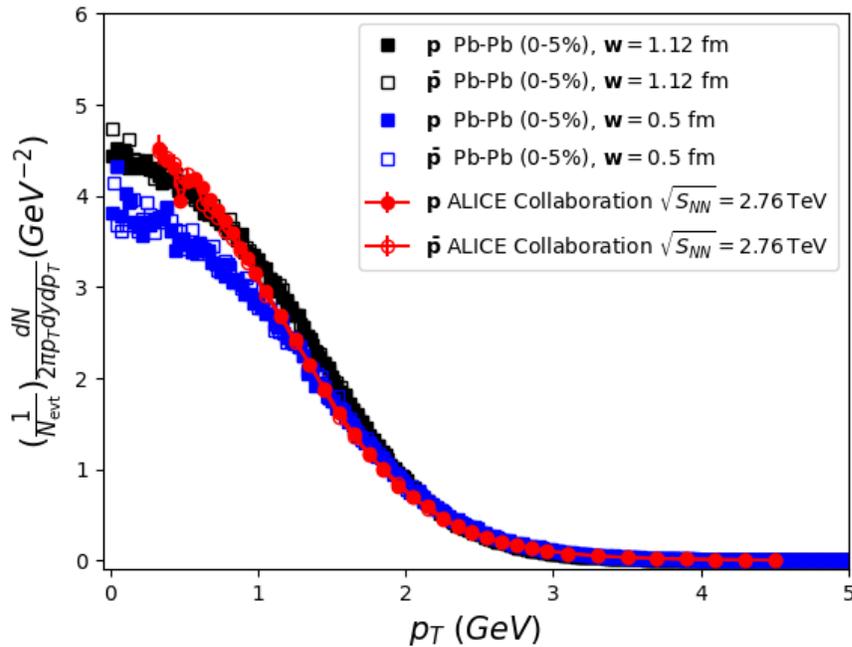
Fonte: Elaborada pela autora.

Seguimos agora para a análise da velocidade do som, c_s , nestas colisões que é determinada através de cálculos hidrodinâmicos, utilizando as seguintes relações (1):

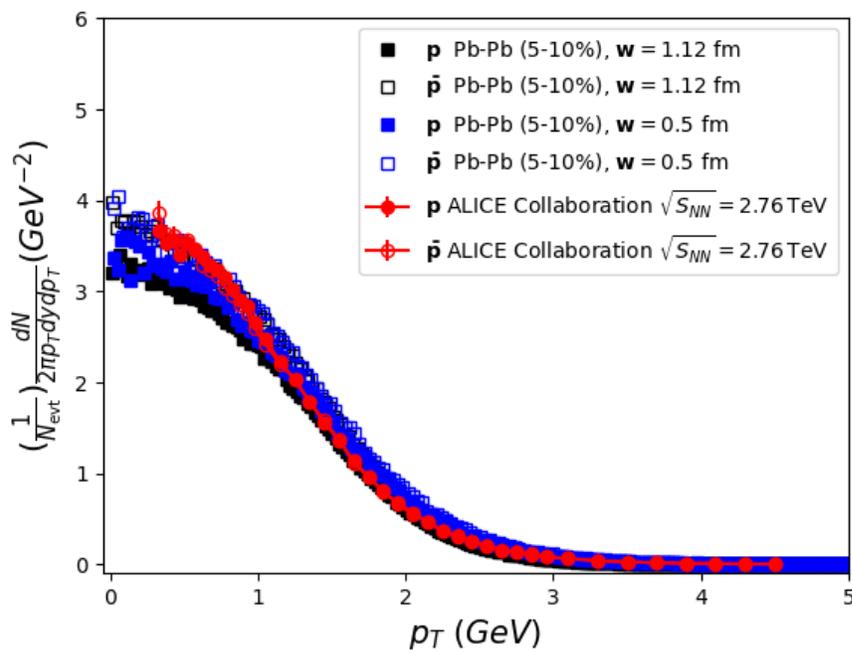
$$c_s^2 = \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{d \ln T}{d \ln s} = \frac{d \ln \langle p_T \rangle}{d \ln N_{ch}}, \quad (126)$$

onde p é a pressão, ε a densidade de energia, T a temperatura, s a densidade de entropia, $\langle p_T \rangle$ o momento transversal médio e N_{ch} o número de partículas carregadas ao final da expansão hidrodinâmica. A última igualdade é empregada assumindo que $\langle p_T \rangle$ é proporcional à temperatura (34) e (7), permitindo a determinação da velocidade do som diretamente em termos de grandezas experimentais. A temperatura guarda uma relação proporcional com $s c_s^2$, desde que a faixa de temperatura seja suficientemente estreita para que possamos negligenciar a variação de c_s^2 . Utilizando a equação 125, obtemos a previsão descrita por (1):

Figura 17 - Os espectros de momentos transversais para Prótons e Antiprótons na janela de centralidade de 0-5% e 5-10% foram obtidos para colisões Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2). Esta análise considerou larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm, em comparação com os dados experimentais da colaboração ALICE (33)



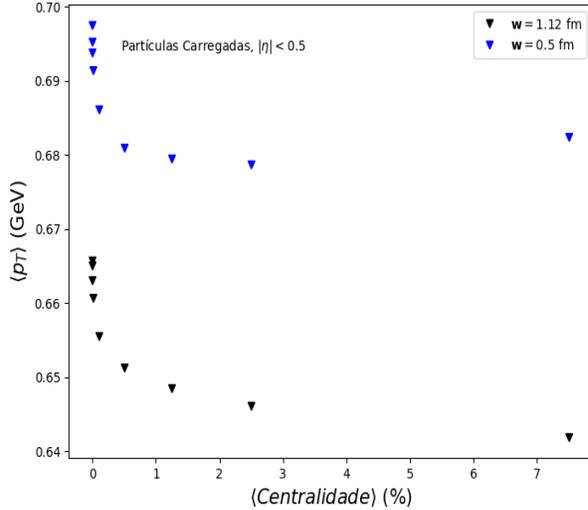
(a) Prótons, Antiprótons, $y < 0.5$, 0-5%



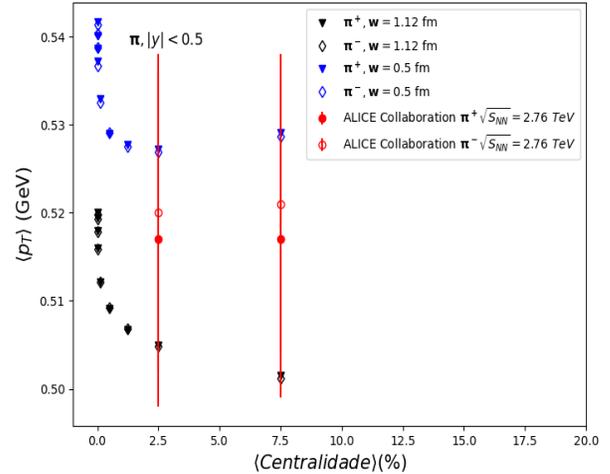
(b) Prótons e Antiprótons, $y < 0.5$, 5-10%

Fonte: Elaborada pela autora.

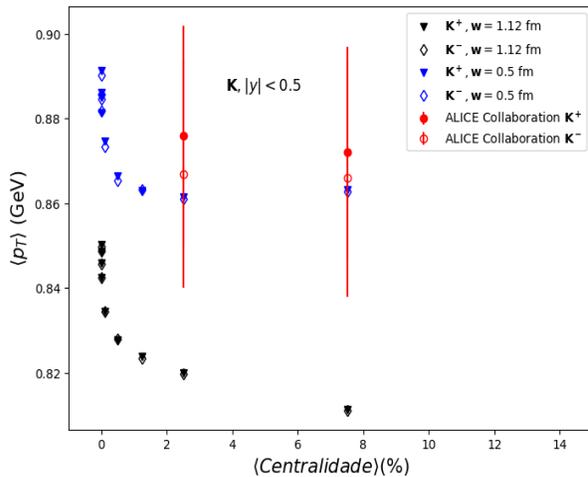
Figura 18 - $\langle p_T \rangle$ em diferentes janelas de centralidade para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleo de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm e foram comparados com os dados experimentais da colabora o ALICE (33) para duas janelas de centralidade distintas (0-5% e 5-10%) para π , K , p e \bar{p}



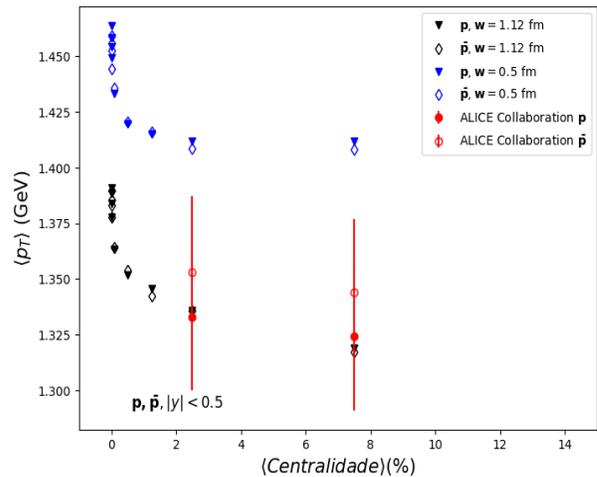
(a) $\langle p_T \rangle$ em diferentes janelas de centralidade para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleo de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para partículas carregadas, $\eta < 0.5$.



(b) $\langle p_T \rangle$ em diferentes janelas de centralidade para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, com $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm comparados com os dados da ALICE (33) para as janelas de centralidade (0-5% e 5-10%) para π , $y < 0.5$.



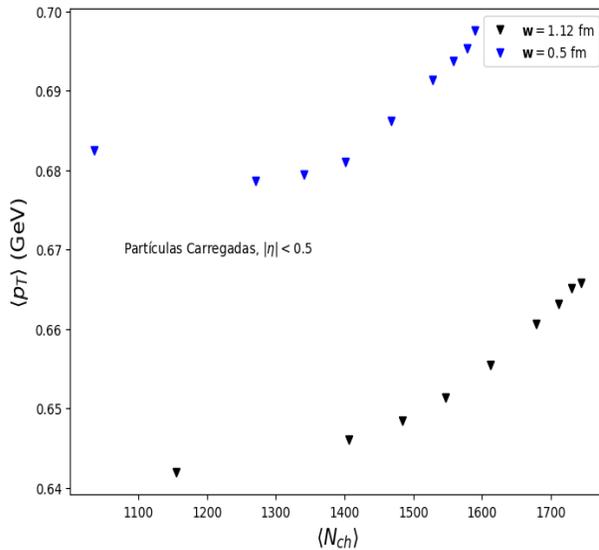
(c) $\langle p_T \rangle$ em diferentes janelas de centralidade para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleo de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm comparados com os dados da ALICE (33) para duas janelas de centralidade distintas (0-5% e 5-10%) para K , $y < 0.5$.



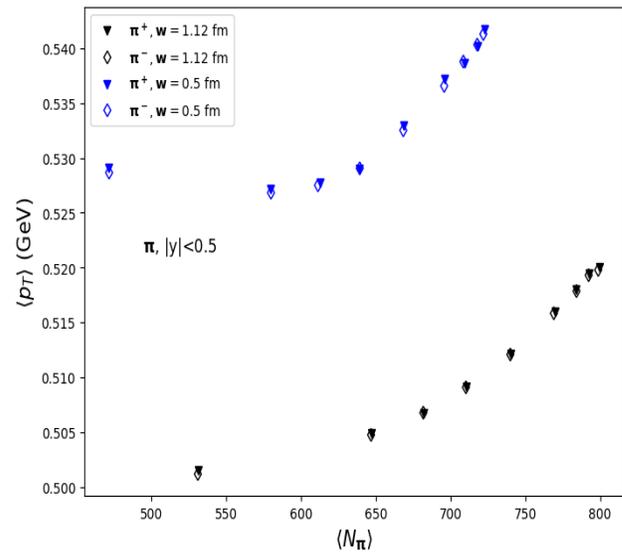
(d) $\langle p_T \rangle$ em diferentes janelas de centralidade para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleo de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm comparados com os dados da ALICE (33) para duas janelas de centralidade distintas (0-5% e 5-10%) para p e \bar{p} , $y < 0.5$.

Fonte: Elaborada pela autora.

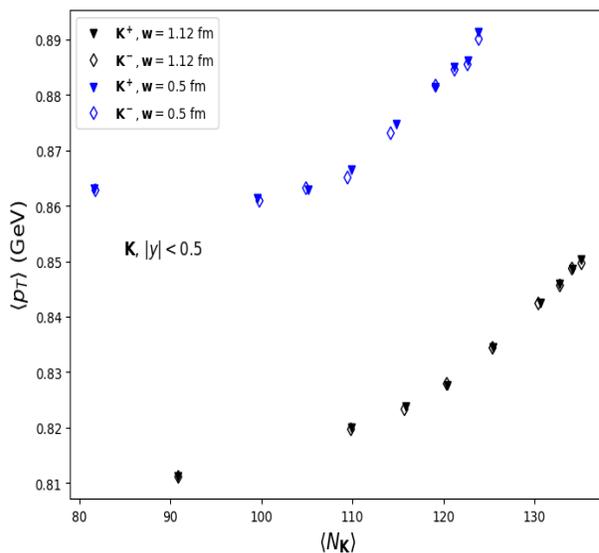
Figura 19 - $\langle p_T \rangle$, $\langle N_{ch} \rangle$, $\langle N_\pi \rangle$, $\langle N_K \rangle$, e $\langle N_{p,\bar{p}} \rangle$ para Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. Esses resultados foram obtidos considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



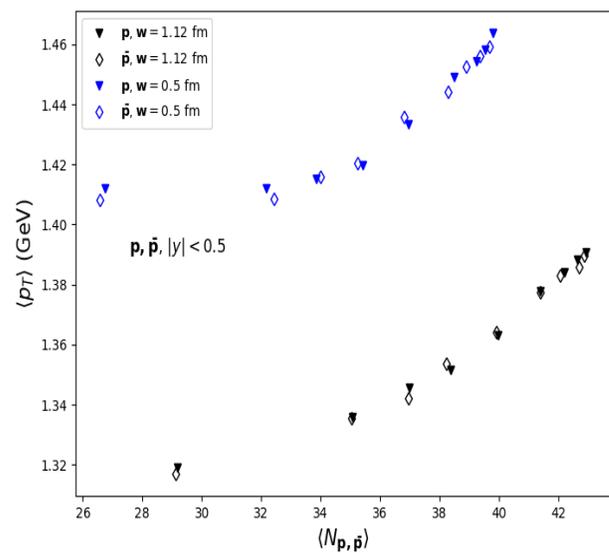
(a) $\langle p_T \rangle$ e $\langle N_{ch} \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para partículas carregadas, $\eta < 0.5$.



(b) $\langle p_T \rangle$, $\langle N_\pi \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para π , $y < 0.5$.



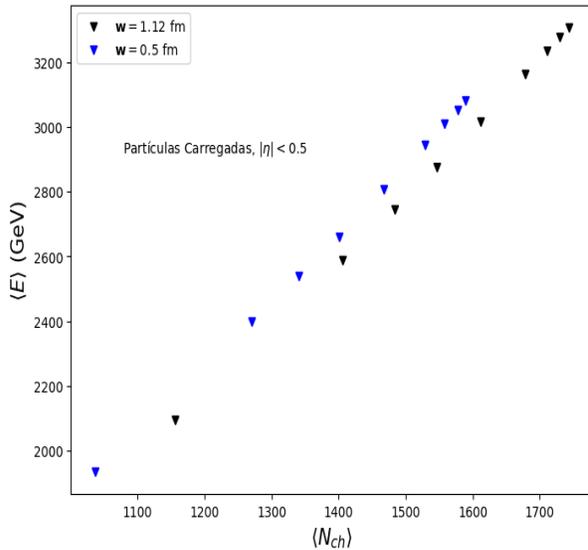
(c) $\langle p_T \rangle$ e $\langle N_K \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para K , $y < 0.5$.



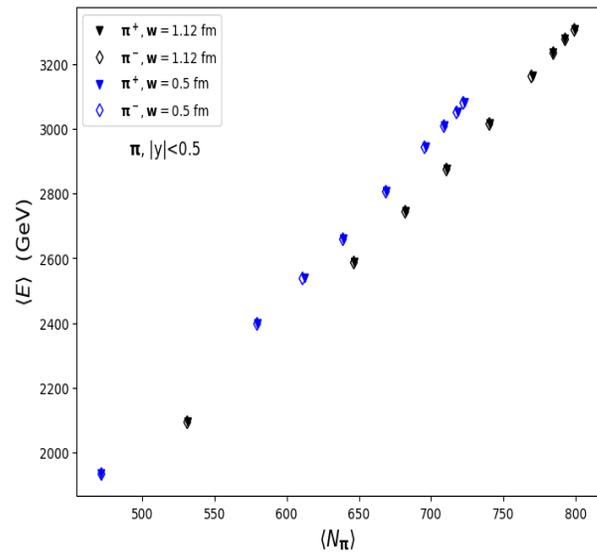
(d) $\langle p_T \rangle$ e $\langle N_{p,\bar{p}} \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para p e \bar{p} , $y < 0.5$.

Fonte: Elaborada pela autora.

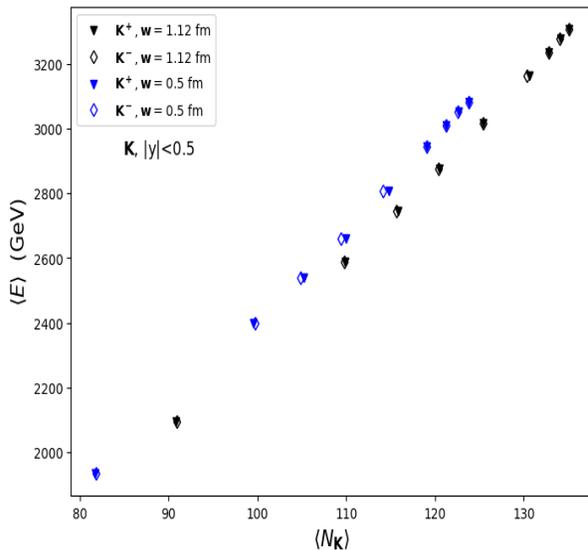
Figura 20 - $\langle E \rangle$, $\langle N_{ch} \rangle$, $\langle N_{\pi} \rangle$, $\langle N_K \rangle$, e $\langle N_{p,\bar{p}} \rangle$ para Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV. Esses resultados foram obtidos considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



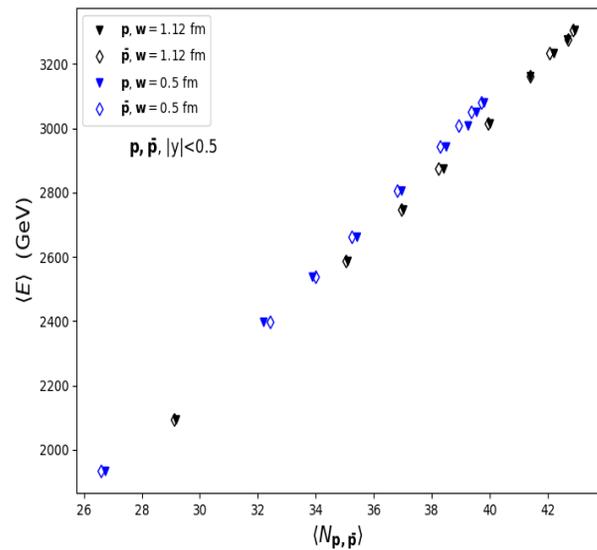
(a) $\langle E \rangle$ e $\langle N_{ch} \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para partículas carregadas, $\eta < 0.5$



(b) $\langle E \rangle$ e $\langle N_{\pi} \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para π , $y < 0.5$



(c) $\langle E \rangle$ e $\langle N_K \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para K, $y < 0.5$



(d) $\langle E \rangle$ e $\langle N_{p,\bar{p}} \rangle$ para Pb-Pb em $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, considerando larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm para p, \bar{p} , $y < 0.5$

Fonte: Elaborada pela autora.

$$\langle p_t \rangle = p_{t0} \left(\frac{S}{\langle \bar{S}|S \rangle} \right)^{c_s^2} . \quad (127)$$

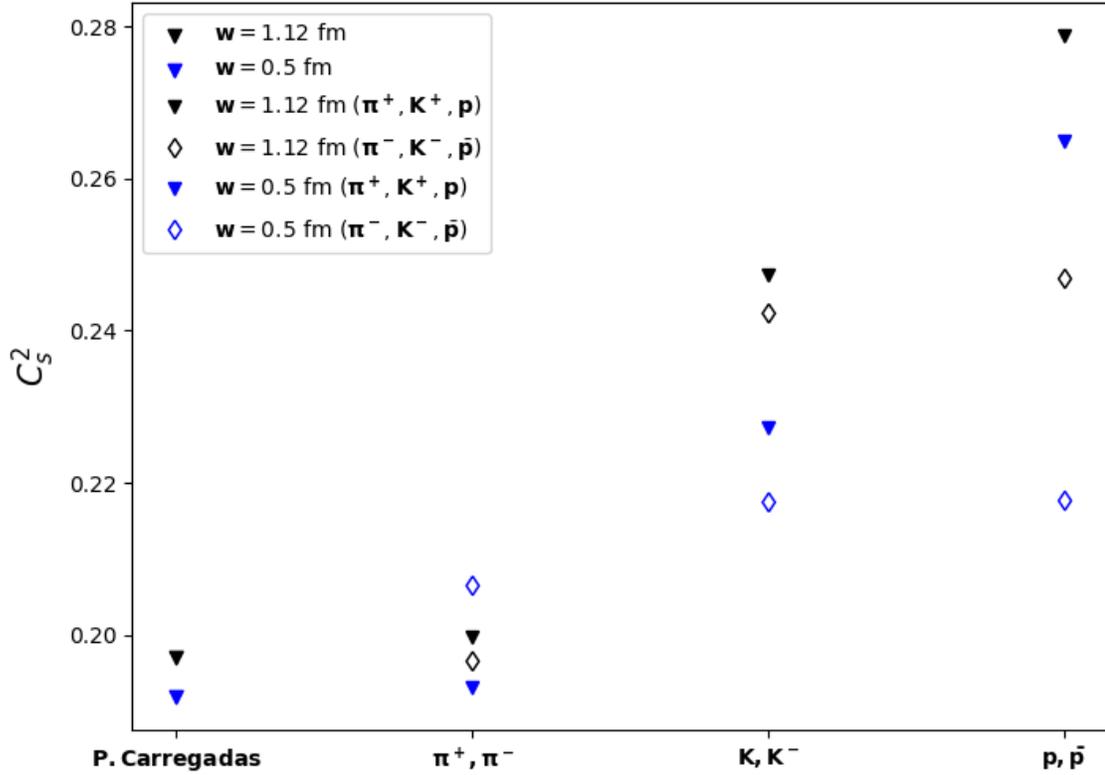
onde p_{t0} é o valor de p_T à esquerda do joelho e $\langle \bar{S}|S \rangle$ é dado pela equação 123. Na Figura 21, é possível observar que a variação nos valores de c_s^2 é mais significativa para kaons, prótons e antiprótons. Adicionalmente, é possível discernir uma distinção nos valores de c_s^2 entre partículas carregadas positivamente, π^+ , K^+ , p , e suas contrapartes negativas, como π^- , K^- , \bar{p} . No que diz respeito aos kaons, prótons e antiprótons, os valores de c_s^2 apresentam variações significativas nos dados com $w = 1.12$ fm em comparação com os dados com $w = 0.5$ fm.

Tabela 12 - c_s^2 para partículas carregadas, π , K , p , e \bar{p} determinados para colisões Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2), apresentados para larguras de núcleon w de 1.12 fm e 0.5 fm

Partículas $w = 1.12$ fm	c_s^2	Δc_s^2	Partículas $w = 0.5$ fm	c_s^2	Δc_s^2
Partículas Carregadas ($\eta < 0.5$ fm)			Partículas Carregadas ($\eta < 0.5$ fm)		
	0.197	0.006		0.192	0.013
π^+ ($y < 0.5$ fm)	0.200	0.005	π^+ ($y < 0.5$ fm)	0.193	0.013
π^- ($y < 0.5$ fm)	0.197	0.006	π^- ($y < 0.5$ fm)	0.206	0.006
K^+ ($y < 0.5$ fm)	0.247	0.006	K^+ ($y < 0.5$ fm)	0.227	0.026
K^- ($y < 0.5$ fm)	0.242	0.007	K^- ($y < 0.5$ fm)	0.218	0.019
p ($y < 0.5$ fm)	0.279	0.009	p ($y < 0.5$ fm)	0.265	0.020
\bar{p} ($y < 0.5$ fm)	0.247	0.017	\bar{p} ($y < 0.5$ fm)	0.218	0.020

Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 21 - c_s^2 para partículas carregadas, π , K , p e \bar{p} foram determinados para colisões Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2). Esses valores foram obtidos considerando as larguras do núcleon de $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



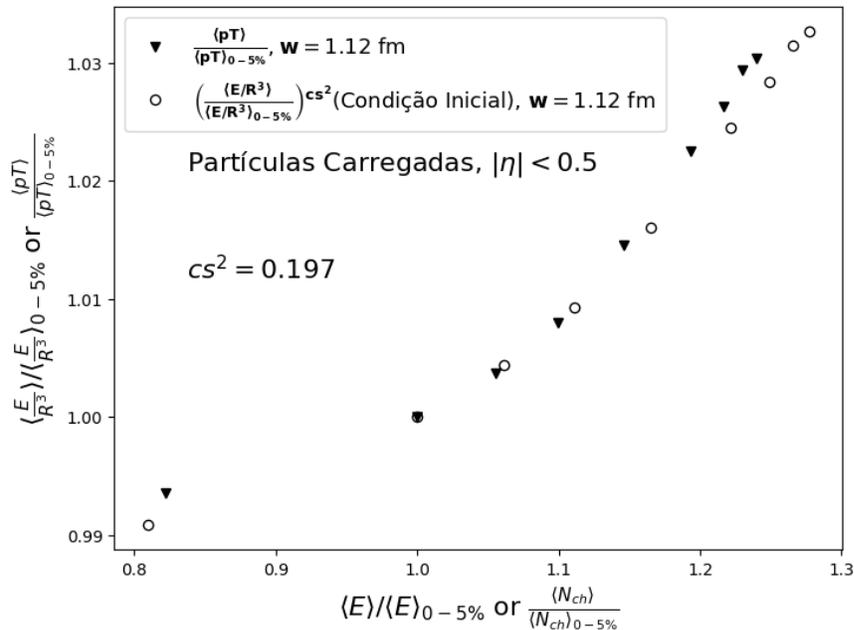
Fonte: Elaborada pela autora.

Como discutido anteriormente, o valor $\langle p_T \rangle$ (GeV) obtido após a expansão hidrodinâmica é proporcional à densidade de energia média das condições iniciais, $\langle \frac{E}{R^3} \rangle$ (GeV/fm³), e à temperatura. Portanto, podemos calcular o valor de $\langle p_T \rangle$ (GeV) utilizando os dados das condições iniciais e a velocidade do som. Para isso, normalizamos os dados das condições iniciais e os dados após a expansão hidrodinâmica, utilizando a média da janela de centralidade de 0 a 5%, ou seja, $\langle E \rangle / \langle E \rangle_{0-5\%}$, $\langle \frac{E}{R^3} \rangle / \langle \frac{E}{R^3} \rangle_{0-5\%}$, $\langle N_{ch} \rangle / \langle N_{ch} \rangle_{0-5\%}$, $\langle N_\pi \rangle / \langle N_\pi \rangle_{0-5\%}$, $\langle N_K \rangle / \langle N_K \rangle_{0-5\%}$ e $\langle N_{p,\bar{p}} \rangle / \langle N_{p,\bar{p}} \rangle_{0-5\%}$, $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$. Calculamos o valor de $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ utilizando os dados das condições iniciais e a velocidade do som da seguinte maneira:

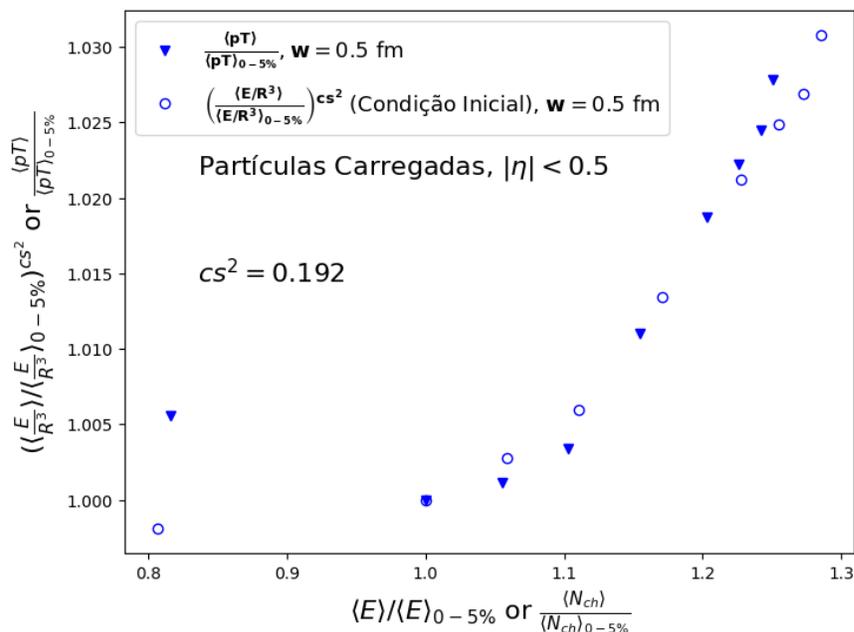
$$\frac{\langle p_T \rangle}{\langle p_T \rangle_{0-5\%}} = \left(\frac{\langle \frac{E}{R^3} \rangle}{\langle \frac{E}{R^3} \rangle_{0-5\%}} \right)^{c_s^2}. \quad (128)$$

Agora podemos comparar os dados de $\langle p_T \rangle$ (GeV) obtidos após a expansão hidrodinâmica com os dados de $\langle p_T \rangle$ (GeV) calculados a partir das condições iniciais e velocidade do som, utilizando a equação 128. Os valores de c_s^2 estão disponíveis na Tabela 12. Essa comparação é apresentada nas Figuras 22 a 25. Ao analisar as Figuras 22 a 25, observamos que os valores de $\langle p_t \rangle$ (GeV) obtidos pela equação 128, utilizando os dados das condições iniciais e a velocidade do som, aproximam-se dos dados de $\langle p_t \rangle$ (GeV) obtidos após a expansão hidrodinâmica para partículas carregadas, píons, kaons, prótons e antiprótons, considerando diferentes larguras nucleares, $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm. Encerrando este estudo, os resultados apresentados oferecem uma visão inédita em colisões de íons pesados. A variação nos valores de c_s^2 , especialmente para kaons, prótons e antiprótons, abre portas para pesquisas futuras.

Figura 22 - $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ calculado pela Equação 128 a partir dos dados das condições iniciais, utilizando o valor médio da janela de centralidade de 0 a 5%, em comparação com os valores de $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ obtidos após a expansão hidrodinâmica relativística. Os coeficientes c_s^2 específicos para cada partícula e largura do núcleon (conforme a Tabela 12) foram utilizados em simulações de colisões de Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV para partículas carregadas, $|\eta| < 0.5$, com $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



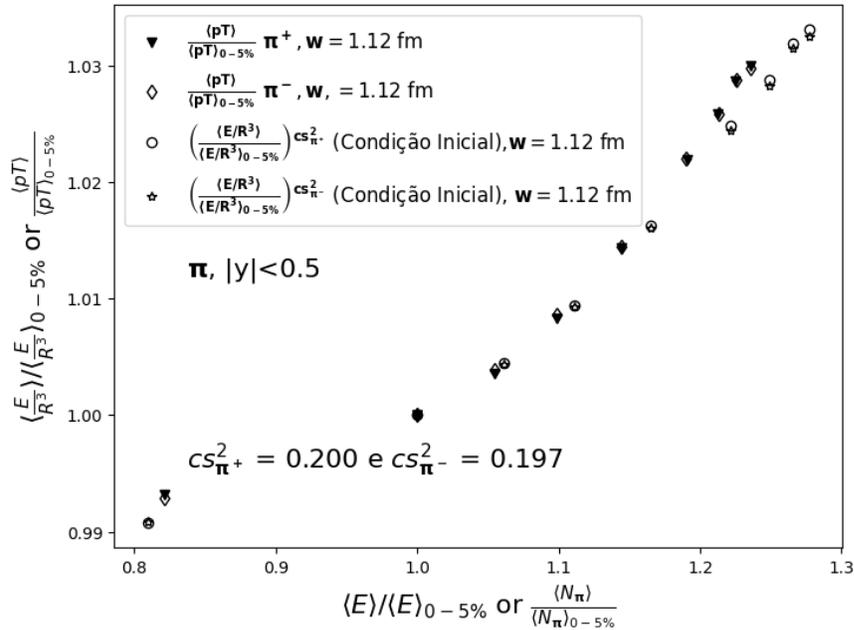
(a) Partículas Carregadas, $|\eta| < 0.5$, $w = 1.12$ fm



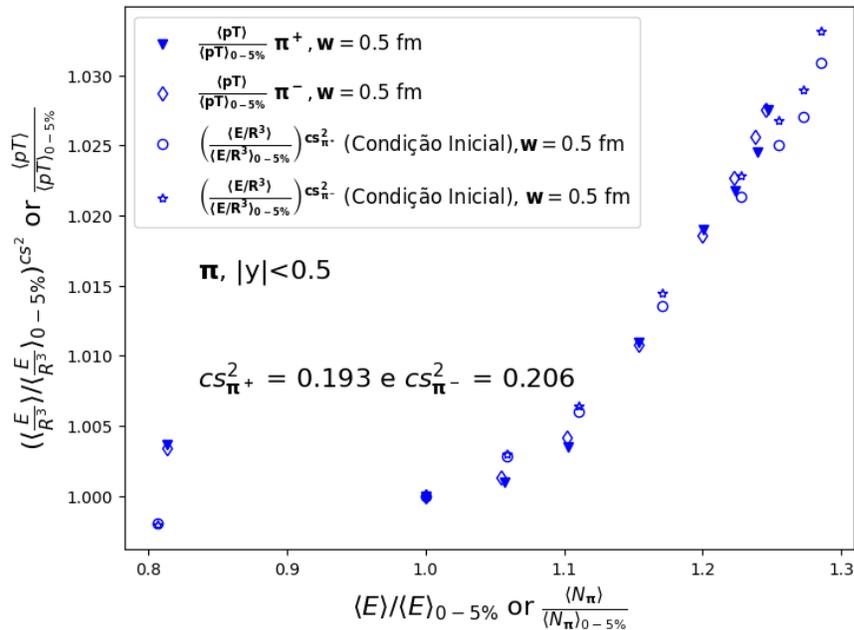
(b) Partículas Carregadas, $|\eta| < 0.5$, $w = 0.5$ fm

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 23 - $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ calculado pela Equação 128 a partir dos dados das condições iniciais, utilizando o valor médio da janela de centralidade de 0 a 5%, em comparação com os valores de $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ obtidos após a expansão hidrodinâmica relativística. Os coeficientes c_s^2 específicos para cada partícula e largura do núcleon (conforme a Tabela 12) foram utilizados em simulações de colisões de Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV para píons, $y < 0.5$, com $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



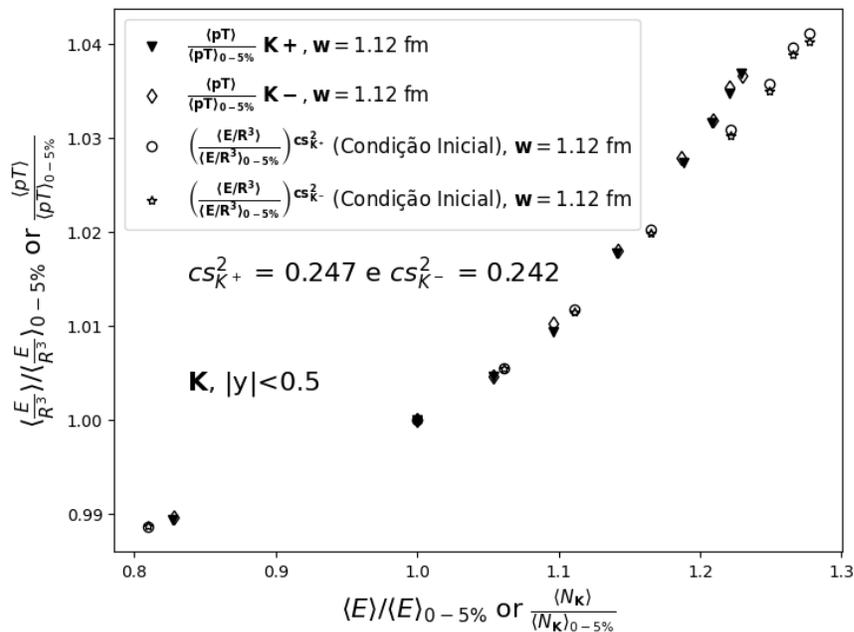
(a) Píons, $y < 0.5$, $w = 1.12$ fm



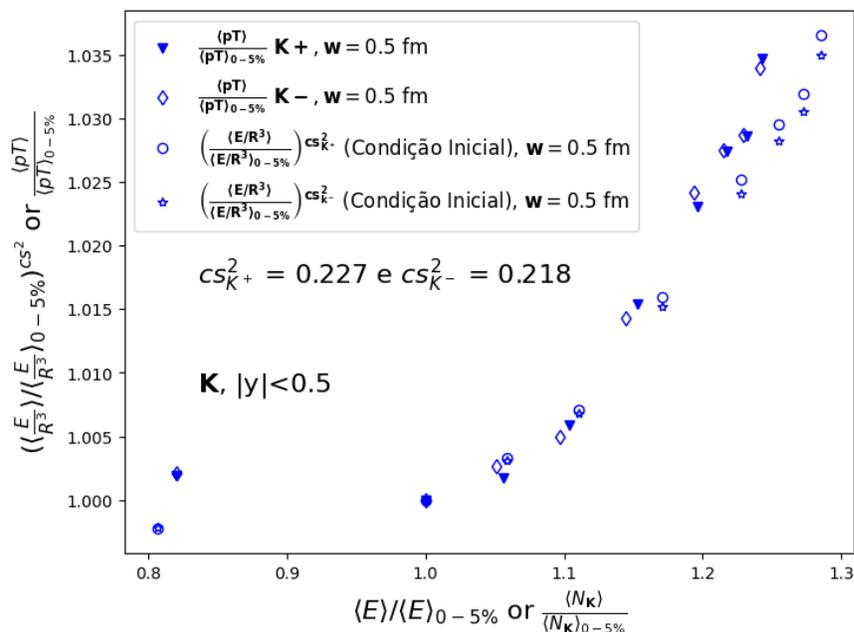
(b) Píons, $y < 0.5$, $w = 0.5$ fm

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 24 - $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ calculado pela Equação 128 a partir dos dados das condições iniciais, utilizando o valor médio da janela de centralidade de 0 a 5%, em comparação com os valores de $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ obtidos após a expansão hidrodinâmica relativística. Os coeficientes c_s^2 específicos para cada partícula e largura do núcleon (conforme a Tabela 12) foram utilizados em simulações de colisões de Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV para kaons, $y < 0.5$, com $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



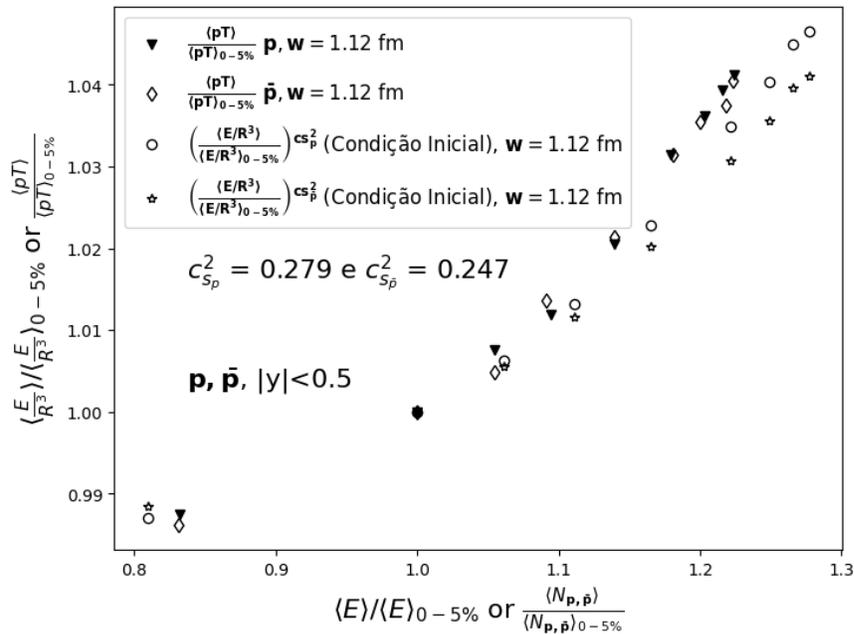
(a) Kaons, $y < 0.5$, $w = 1.12$ fm



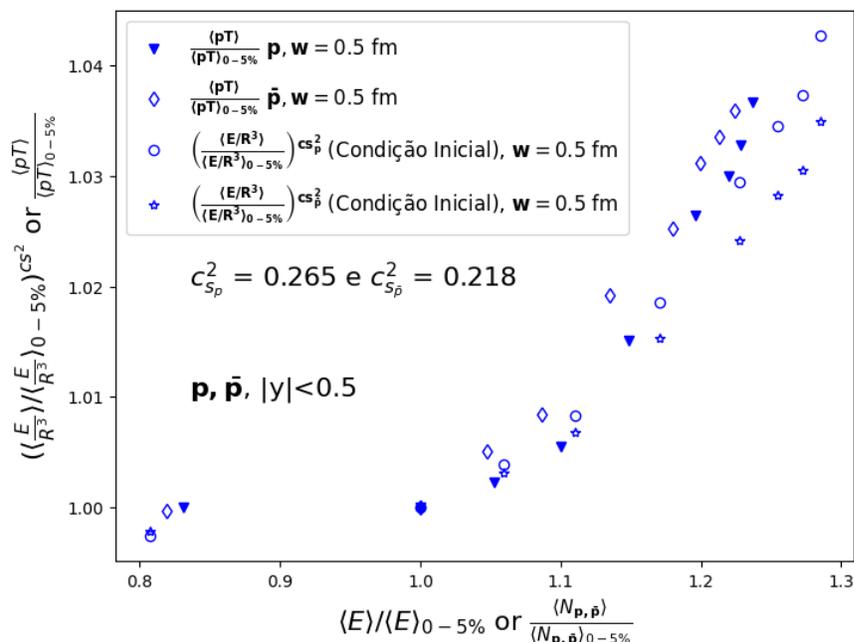
(b) Kaons, $y < 0.5$, $w = 0.5$ fm

Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 25 - $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ calculado pela Equação 128 a partir dos dados das condições iniciais, utilizando o valor médio da janela de centralidade de 0 a 5%, em comparação com os valores de $\langle p_T \rangle / \langle p_T \rangle_{0-5\%}$ obtidos após a expansão hidrodinâmica relativística. Os coeficientes c_s^2 específicos para cada partícula e largura do núcleon (conforme a Tabela 12) foram utilizados em simulações de colisões de Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV para prótons e antiprótons, $y < 0.5$, com $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm



(a) Prótons e antiprótons, $y < 0.5$, $w = 1.12$ fm



(b) Prótons e antiprótons, $y < 0.5$, $w = 0.5$ fm

Fonte: Elaborada pela autora.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluimos, após análise dos gráficos nas Figuras 5 e 6, que ocorre um aumento no raio dos núcleos de Pb-Pb e Au-Au à medida que a colisão se torna mais central. A partir de aproximadamente 1% de centralidade, observa-se uma estabilização nos raios desses núcleos, enquanto a entropia S ou a energia (E em GeV) continua a aumentar. Em outras palavras, o crescimento da entropia ou energia S ou E (GeV) é atribuído à manutenção do volume constante, proporcional à entropia ou energia S ou E (GeV). Ao contrário das expectativas iniciais, que antecipavam uma estabilidade na densidade de energia à esquerda do joelho para Pb-Pb e Au-Au, conforme evidenciado nos gráficos da Figura 5, os resultados dos dados Grad da Jetscape para $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV revelam uma discrepância em relação às previsões. Podemos ver essa discrepância no gráfico da Figura 6, fundamentado nos resultados do modelo TRENTo (24). Em uma tentativa de aprimorar a concordância do modelo analítico, especialmente em colisões mais ultracentrais, próximas ao joelho, realizamos ajustes manuais nas constantes r_0 e s_0 , alcançando uma boa aproximação nessa região. Os resultados destacados nos gráficos das Figuras 7 e 8 sublinham a influência crucial da largura do núcleon, representada por w , na variação da densidade de energia à esquerda do joelho. Ao analisar os dados da cadeia completa do conjunto Grad da Jetscape para colisões de Pb-Pb a uma energia de $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV (2), considerando $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm, observamos na Figura 19 que o momento transversal médio, $\langle p_T \rangle$, tende a aumentar com o crescimento do número de partículas, especialmente no caso em que a largura do núcleon é $w = 1.12$ fm. No cenário $w = 0.5$ fm, verifica-se que $\langle p_T \rangle$ (GeV) permanece aproximadamente constante (à esquerda) e, em seguida, começa a crescer à medida que o número de partículas aumentam. Essa tendência se alinha com a análise das condições iniciais; o gráfico na Figura 7 revela que a quantidade $\langle \frac{E}{R^3} \rangle$ (GeV/fm³), proporcional a $\langle p_T \rangle$ (GeV), permanece aproximadamente constante (à esquerda) para o caso com $w = 0.5$ fm. Conforme o número de partículas aumenta, observa-se um crescimento na energia total (E em GeV), conforme evidenciado na Figura 20. O momento transversal médio, $\langle p_T \rangle$ (GeV), aumenta à medida que a colisão fica mais central, conforme gráficos da Figura 18, nos casos com largura do núcleon $w = 1.12$ fm e $w = 0.5$ fm. É perceptível que $\langle p_T \rangle$ (GeV) é maior para os dados com $w = 0.5$ fm. Essa

tendência é consistente com a análise das condições iniciais; o gráfico da Figura 7 revela que $\langle \frac{E}{R^3} \rangle$ (GeV/fm³), que é proporcional a $\langle p_T \rangle$ (GeV), é maior com $w = 0.5$ fm.

Determinamos c_s^2 para diferentes partículas, conforme apresentado na Tabela 12, e observamos que a variação nos valores de c_s^2 é mais expressiva para kaons, prótons e antiprótons. Além disso, observamos uma diferença nos valores de c_s^2 entre partículas carregadas positivamente, como π^+ , K^+ , p , e suas contrapartes negativas, como π^- , K^- , \bar{p} . Em relação aos kaons, prótons e antiprótons, é possível verificar variações relevantes nos valores de c_s^2 entre os dados com $w = 1.12$ fm em comparação com $w = 0.5$ fm. Esses resultados demandam investigações futuras para uma compreensão mais detalhada de seu significado físico.

REFERÊNCIAS

- 1 GARDIM, F. G.; GIACALONE, G.; OLLITRAULT, J.-Y. The mean transverse momentum of ultracentral heavy-ion collisions: A new probe of hydrodynamics. **Phys. Lett. B**, v. 809, p. 135749, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135749>>. Acesso em: 3 ago. 2022.
- 2 EVERETT, D. *et al.* Multisystem bayesian constraints on the transport coefficients of qcd matter. **Phys. Rev. C**, v. 103, n. 5, p. 054904, 2021. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.103.054904>>. Acesso em: 18 jan. 2023.
- 3 GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.
- 4 PARTICLE DATA GROUP. **Particle Data Group**. 2023. Disponível em: <<https://pdg.lbl.gov/>>. Acesso em: 15 jan. 2024.
- 5 YAGI, K.; HATSUDA, T.; MIAKE, Y. **Quark-gluon plasma: From big bang to little bang**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. v. 23.
- 6 MISKOWIEC, D. Heavy-ion physics with the alice detector. In: **35th Rencontres de Physique de la Vallée d’Aoste**. [S.l.: s.n.], 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2208.05290>>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- 7 GARDIM, F. *et al.* Thermodynamics of hot strong-interaction matter from ultra-relativistic nuclear collisions. **Nat. Phys**, v. 16, p. 615–619, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41567-020-0846-4>>. Acesso em: 10 out. 2022.
- 8 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1343, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- 9 POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- 10 ALVER, B.; ROLAND, G. Collision-geometry fluctuations and triangular flow in heavy-ion collisions. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 81, p. 054905, May 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.81.054905>>. Acesso em: 1 fev. 2023.
- 11 BROOKHAVEN NATIONAL LABORATORY. **Relativistic Heavy Ion Collider**. 1998. Disponível em: <<https://www.bnl.gov/rhic/>>. Acesso em: 10 de jan. 2024.
- 12 KOLB, P. F. *et al.* Elliptic flow at sps and rhic: from kinetic transport to hydrodynamics. **Physics Letters B**, v. 500, n. 3, p. 232, 2001. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026930100079X>>. Acesso em: 1 fev. 2023.

- 13 OLLITRAULT, J.-Y. Relativistic hydrodynamics for heavy-ion collisions. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 29, n. 2, p. 275–302, Jan 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0143-0807/29/2/010>>. Acesso em: 18 jan. 2023.
- 14 SOUZA, R. Derradi de; KOIDE, T.; KODAMA, T. Hydrodynamic approaches in relativistic heavy ion reactions. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, v. 86, p. 35–85, 2016. ISSN 0146-6410. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641015000903>>. Acesso em: 18 jan. 2023.
- 15 VOGT, R. **Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions**. [S.l.]: Elsevier Science, 2007. v. 1^a edição.
- 16 HAMA, Y.; KODAMA, T.; SOCOLOWSKI JR., O. Topics on hydrodynamic model of nucleus-nucleus collisions. **Braz. J. Phys.**, v. 35, 2005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332005000100003>>. Acesso em: 18 jan. 2023.
- 17 LANDAU, L. D. On the multiparticle production in high-energy collisions. **Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz.**, v. 17, p. 51–64, 1953.
- 18 FERMI, E. High Energy Nuclear Events. **Progress of Theoretical Physics**, v. 5, n. 4, p. 570–583, 1950. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/ptp/5.4.570>>. Acesso em: 9 fev. 2023.
- 19 BJORKEN, J. D. Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 27, n. 1, p. 140–151, Jan 1983. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.140>>. Acesso em: 9 fev. 2023.
- 20 DOWNEY, A. **Think Bayes: Bayesian Statistics in Python**. [S.l.]: O’Reilly Media, 2013. ISBN 9781491945438.
- 21 LOIZIDES, C.; NAGLE, J.; STEINBERG, P. Improved version of the phobos glauber monte carlo. **SoftwareX**, v. 1-2, p. 13–18, 2015. ISSN 2352-7110. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352711015000047>>. Acesso em: 16 out. 2021.
- 22 WOODS, R. D.; SAXON, D. S. Diffuse surface optical model for nucleon-nuclei scattering. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 95, p. 577–578, Jul 1954. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.95.577>>. Acesso em: 31 jan. 2023.
- 23 SCHWIERZ, N.; WIEDENHOVER, I.; VOLYA, A. **Parameterization of the Woods-Saxon Potential for Shell-Model Calculations**. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.0709.3525>>. Acesso em: 31 jan. 2023.
- 24 MORELAND, J. S.; BERNHARD, J. E.; BASS, S. A. Alternative ansatz to wounded nucleon and binary collision scaling in high-energy nuclear collisions. **Phys. Rev. C**, v. 92, n. 1, p. 011901, 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.92.011901>>. Acesso em: 16 out. 2021.

- 25 ADAM, J. *et al.* Centrality dependence of the charged-particle multiplicity density at midrapidity in pb-pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 116, p. 222302, Jun 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.222302>>. Acesso em: 17 out. 2021.
- 26 SCHENKE, B.; JEON, S.; GALE, C. (3+1)d hydrodynamic simulation of relativistic heavy-ion collisions. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 82, p. 014903, Jul 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.042301>>. Acesso em: 18 fev. 2023.
- 27 ANDRONIC, A.; BRAUN-MUNZINGER, P.; STACHEL, J. Hadron production in central nucleus-nucleus collisions at chemical freeze-out. **Nucl. Phys. A**, v. 772, p. 167–199, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.nucl-th/0511071>>. Acesso em: 17 out. 2021.
- 28 ANDRONIC, A. *et al.* Decoding the phase structure of qcd via particle production at high energy. **Nature**, v. 561, p. 321–330, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41586-018-0491-6>>. Acesso em: 18 fev. 2023.
- 29 MCNELIS, M.; EVERETT, D.; HEINZ, U. Particlization in fluid dynamical simulations of heavy-ion collisions: The is3d module. **Computer Physics Communications**, v. 258, p. 107604, 2021. ISSN 0010-4655. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010465520302836>>. Acesso em: 18 jul. 2023.
- 30 BASS, S. Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions. **Progress in Particle and Nuclear Physics**, Elsevier BV, v. 41, p. 255–369, 1998. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0146-6410\(98\)00058-1](https://doi.org/10.1016/s0146-6410(98)00058-1)>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- 31 HANUS, P.; REYGERS, K.; MAZELIAUSKAS, A. Entropy production in *pp* and pb-pb collisions at energies available at the cern large hadron collider. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 100, Dec 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.100.064903>>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- 32 ABELEV, B. *et al.* Centrality determination of pb-pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ tev with alice. **Phys. Rev. C**, v. 88, n. 4, p. 044909, 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.88.044909>>. Acesso em: 1 fev. 2023.
- 33 ABELEV, B.; COLLABORATION) others A. Centrality dependence of π , k , and p production in pb-pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ tev. **Phys. Rev. C**, American Physical Society, v. 88, p. 044910, Oct 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.88.044910>>. Acesso em: 20 jan. de 2023.
- 34 HOVE, L. V. Multiplicity dependence of p_t spectrum as a possible signal for a phase transition in hadronic collisions. **Physics Letters B**, v. 118, n. 1, p. 138–140, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382906177>>. Acesso em: 18 fev. 2023.