

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS  
*Campus* Poços de Caldas – Poços de Caldas - MG

**REGILEY PIMENTA RAMOS DE OLIVEIRA**

**ONDAS GRAVITACIONAIS DA TEORIA DE  
STAROBINSKY-PODOLSKY EM UM ESPAÇO-TEMPO DE FUNDO  
CURVO**

**POÇOS DE CALDAS/MG**

**2024**

**REGILEY PIMENTA RAMOS DE OLIVEIRA**

**ONDAS GRAVITACIONAIS DA TEORIA DE STAROBINSKY-PODOLSKY  
EM UM ESPAÇO-TEMPO DE FUNDO CURVO**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo.

**POÇOS DE CALDAS/MG**

**2024**

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas  
Biblioteca Campus Poços de Caldas

Oliveira, Regiley Pimenta Ramos de.

Ondas gravitacionais da teoria de Starobinsky-Podolsky em um espaço-tempo de fundo curvo / Regiley Pimenta Ramos de Oliveira. - Poços de Caldas, MG, 2024.

63 f. : il. -

Orientador(a): Cássius Anderson Miquele de Melo.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, 2024.

Bibliografia.

1. Ondas gravitacionais. 2. Gravitação de ordem superior. 3. Universo em um fundo curvo. I. Melo, Cássius Anderson Miquele de, orient. II. Título.

**REGILEY PIMENTA RAMOS DE OLIVEIRA**

**Ondas Gravitacionais da Teoria de Starobinsky-Podolsky em um Espaço-tempo de Fundo Curvo**

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação da Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física de Partículas e Campos

Aprovada em: 22 de julho de 2024

Prof. Dr. Cássius Anderson Miquele de Melo  
Presidente da Banca Examinadora  
Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto  
Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Pedro José Pompéia  
Instituição: Instituto Tecnológico de Aeronáutica



Documento assinado eletronicamente por **Cassius Anderson Miquele de Melo, Professor do Magistério Superior**, em 23/07/2024, às 13:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#)



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1294196** e o código CRC **B5171791**.

---

*Dedico este trabalho,  
a minha mãe por sempre ter  
acreditado em mim.*

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Regilei e Luciana (*in memoriam*) e meu irmão Pedro, por sempre terem me dado suporte.

Aos meus avós, tios, tios-avós e primos, que sempre me ensinaram e acreditaram em mim.

Aos meus amigos de Campestre, das noites varadas enfrentando anciões de jogos de tabuleiro

Aos meus professores da Escola Estadual Cel. José Custódio, Escola Municipal Cônego Artur, onde fiz o Ensino Fundamental.

Aos meus professores da Escola Estadual Rui Barbosa, principalmente pelo professor "Milo" por fazer e incentivar eu cursar Física.

Aos amigos, colegas e professores da Física-UFMG, onde passei bons tempos tanto na vida acadêmica, quanto na vida pessoal.

Aos professores e amigos da Física-Unifal, em específico o Prof. Dr. Samuel Bueno Soltau, que por um jogo de sinuca saiu um TCC.

À todos os funcionários da Unifal, que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Cuzinato, onde brinco (seriamente) que foi top 3 melhores professores que já tive.

Ao Prof. Dr. Fernando Gardim, com suas aulas diferenciadas de Física Estatística.

Ao Prof. Dr. Cássius, que além de excelente orientador, me ensinou sobre a cultura de chás.

Às bandas que tive ao longo dos anos, Chôrodinge, AstrosFísicos e Banda Lago por proporcionarem momentos de lazer durante essa minha caminhada acadêmica.

À minha sogra, por ser praticamente minha segunda mãe.

À minha namorada, Gabriella, pelo companheirismo de todos estes anos.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho e para o meu desenvolvimento pessoal, direta ou indiretamente nesses últimos dois anos da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“somos todos feitos de poeira estelar.”*

*- Carl Sagan*

## RESUMO

Este trabalho tem como proposta o estudo das ondas gravitacionais em fundo curvo no modelo de Starobinsky-Podolsky de ordem superior. Usando os conhecimentos da Relatividade Geral para explicar as ondas gravitacionais em um fundo curvo, adicionamos termos de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert para encontrar novas equações de campo para este modelo. Com a perturbação da métrica de fundo, encontramos equações de sexta ordem, por isso campos escalares tendem a reduzir esta ordem.

**Palavras-chave:** ondas gravitacionais; gravitação de ordem superior; universo de fundo curvo.



## ABSTRACT

This work proposes the study of gravitational waves in a curved background within the higher-order Starobinsky-Podolsky model. Using the principles of General Relativity to explain gravitational waves in a curved background, we add higher-order terms to the Einstein-Hilbert action to derive new field equations for this model. By perturbing the background metric, we obtain sixth-order equations, hence scalar fields tend to reduce this order.

**Keywords:** gravitational waves; higher order gravity; curved background Universe.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama esquemático do detector de ondas gravitacionais idealizado por Weber . . . . .	12
Figura 2 – Evidência do decaimento orbital do pulsar de binárias PSR1913+16 . .	13
Figura 3 – Diagrama dos detectores do LIGO, suas localizações e orientações . . .	13
Figura 4 – Detecção de ondas gravitacionais de Buracos Negros e Estrelas de Nêutrons pela colaboração LIGO-Virgo . . . . .	14
Figura 5 – Polarização das ondas gravitacionais ilustrada por um círculo de partículas livres antes (a), e depois da passagem das ondas gravitacionais nas polarizações + (b) e $\times$ (c) . . . . .	26
Figura 6 – Possíveis formatos de universo de acordo com a densidade de matéria e radiação . . . . .	30

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	AÇÃO GRAVITACIONAL . . . . .	16
3	ONDAS GRAVITACIONAIS NA MÉTRICA DE MINKOWSKI	19
3.1	Calibre Harmônico . . . . .	20
3.2	Propagação das Ondas Gravitacionais . . . . .	22
3.3	Polarização das Ondas Gravitacionais . . . . .	25
4	ONDAS GRAVITACIONAIS EM UM FUNDO CURVO . . .	27
4.1	Propagação das ondas gravitacionais no fundo de FRW . . . . .	31
5	GRAVIDADE MODIFICADA . . . . .	34
6	CONCLUSÃO . . . . .	37
	REFERÊNCIAS . . . . .	38
	APÊNDICE A – ÁLGEBRA TENSORIAL . . . . .	41
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO DA GEODÉSICA . . . . .	49
	APÊNDICE C – TENSOR DE CURVATURA . . . . .	51
	APÊNDICE D – TENSOR DE RICCI E O ESCALAR DE CURVATURA . . . . .	54
	APÊNDICE E – O TENSOR DE EINSTEIN . . . . .	57
	APÊNDICE F – O TENSOR ENERGIA-MOMENTO . . . . .	58
	APÊNDICE G – LIMITE DE CAMPO FRACO . . . . .	59

## NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

As bitações utilizadas neste trabalho são:

Assinatura da métrica:

$$g_{\mu\nu} = (-, +, +, +).$$

Tensor de Curvatura:

$$R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho}.$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} - \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}.$$

Escalar de Curvatura:

$$R = R_{\mu}{}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

D'Alembertiano:

$$\square \equiv \nabla_{\mu}\nabla^{\mu} = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}.$$

Índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos variam de 1 a 3.

Definição de notação de derivada:

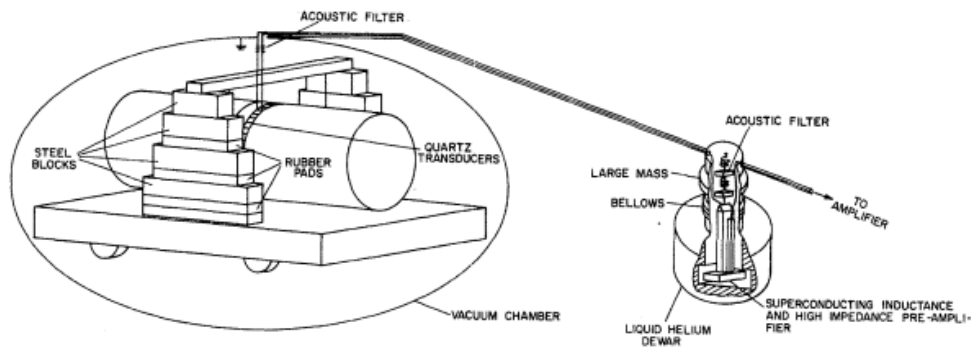
$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1916, Einstein publicava seu trabalho [1] acerca da Relatividade Geral onde passamos a entender que a gravidade é um efeito da curvatura espaço-tempo, e também, considerar a gravidade como um fenômeno geométrico. Assim como um lago de águas tranquilas é perturbado por qualquer objeto que passe pela superfície, de maneira análoga, um objeto de massa que se move pelo espaço-tempo de formas específicas pode criar esta perturbação.

Após algumas décadas, Weber [2] construiu um detector de ondas gravitacionais, que consistia de uma “antena” feita de um bloco cilíndrico de metal para observar as variações ressonantes. E em 1969 anunciou a primeira detecção [3], mas acabou sendo descartado, pois além de prever situações da nossa galáxia que não condiziam com a realidade, pois a energia irradiada detectada implicava que nossa galáxia já não existiria mais [4]. Outros detectores que foram feitos posteriormente não acusavam os dados de Weber, implicando que o sinal obtido era apenas ruído.

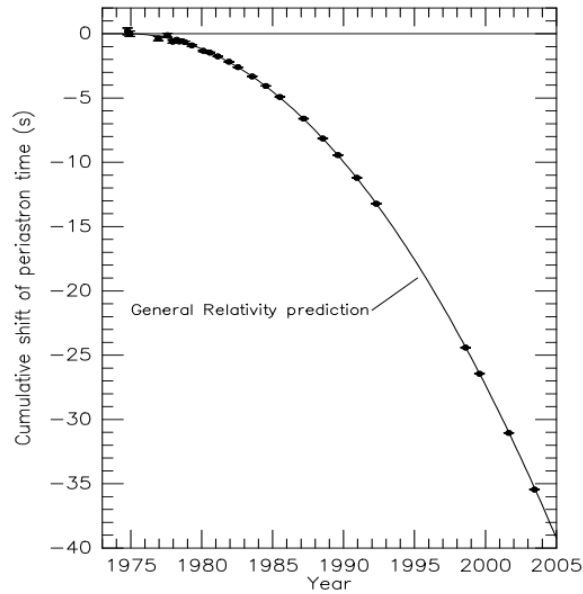
**Figura 1** – Diagrama esquemático do detector de ondas gravitacionais idealizado por Weber



Fonte: [5]

Já em 1974, Joseph Hooten Taylor e Alan Russell Hulse, observando o pulsar de binárias PSR1913+16, indiretamente mediram a massa irradiada das binárias em forma de ondas gravitacionais [6], e este foi o primeiro experimento a detectar ondas gravitacionais, mesmo de forma indireta, e por este feito, os autores dividiram o prêmio Nobel em 1993.

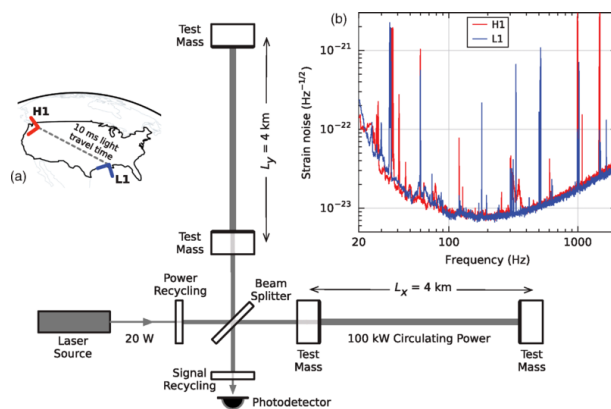
**Figura 2** – Evidência do decaimento orbital do pulsar de binárias PSR1913+16



Fonte: [7]

Só em 2015 as ondas gravitacionais foram detectadas diretamente, por interferômetros de Michelson do Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO). O LIGO é um detector da variação espacial causada pela passagem de uma onda gravitacional. O que se detecta é razão entre a deformação do interferômetro e o comprimento do percurso do feixe de laser no interferômetro, chamado strain, e é da ordem de  $10^{-23}$ , sendo este o motivo dos braços do LIGO terem 4 km de comprimento [8].

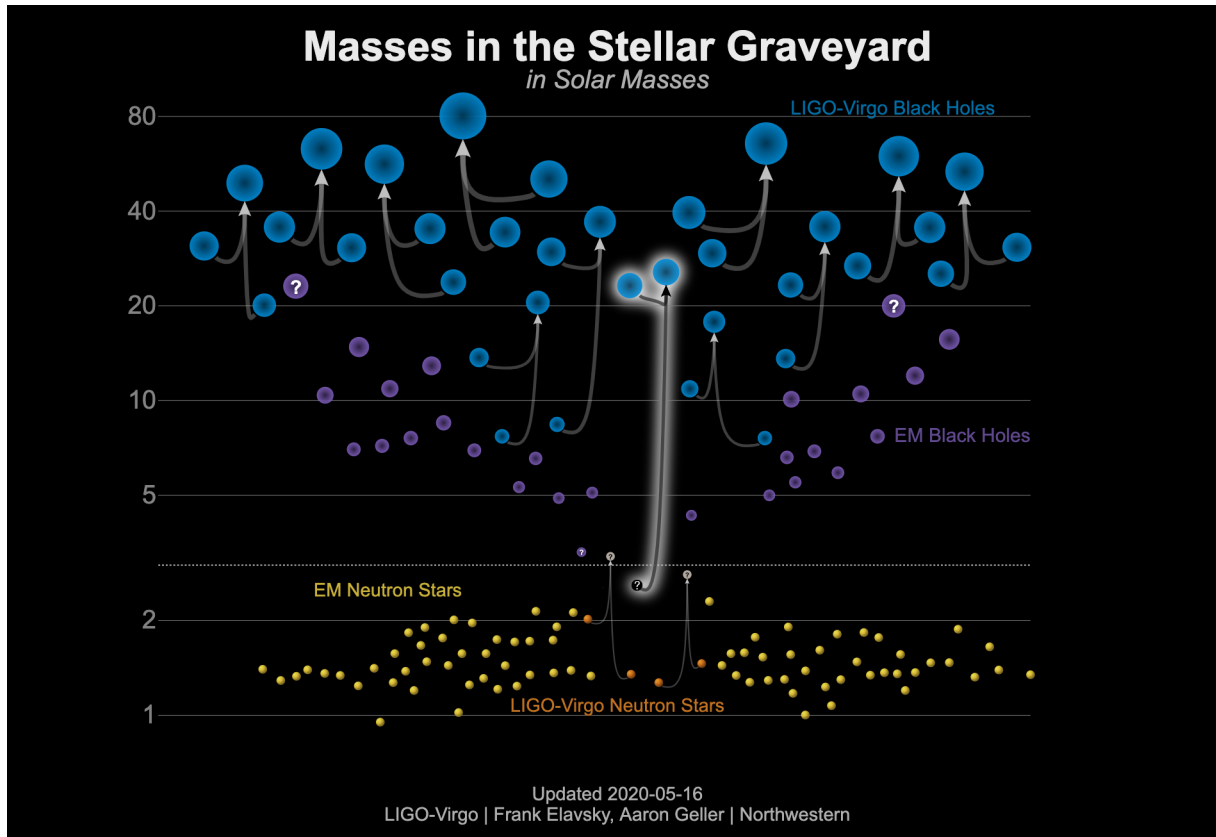
**Figura 3** – Diagrama dos detectores do LIGO, suas localizações e orientações



Fonte: [8]

O primeiro evento que foi detectado, é chamado de GW150914, que foi a coalescência de dois buracos negros, e até a data que este trabalho foi escrito, foram 93 eventos detectados [9].

**Figura 4** – Detecção de ondas gravitacionais de Buracos Negros e Estrelas de Nêutrons pela colaboração LIGO-Virgo



Fonte: [10]

O evento GW170817 [11], que foi a coalescência de duas estrelas de nêutrons, além de ser detectado ondas gravitacionais pelo LIGO, foi associada ao evento GRB170817A, uma detecção de uma explosão de raios gama feita pelo observatório Fermi-GBM, 1,7 segundos depois do LIGO. A partir disso, vários observatórios de diferentes detectores (neutrinos, raios gama, ondas gravitacionais e inclusive os eletromagnéticos) tentam observar os eventos simultaneamente para uma melhor compreensão do universo, e deu início a uma nova era da astronomia, chamada Astronomia Multi-mensageira.

As detecções das ondas gravitacionais citadas mostram que a Relatividade Geral previra com eficácia estes eventos. Entretanto, em determinados regimes, como por exemplo, de altas energias, ou regimes de larga escala do universo atual, é preciso uma adaptação da RG. Em particular, dois dos grandes problemas que sugerem a necessidade de modificação das equações da RG na presença de matéria ordinária são as curvas de rotação de galáxia e a expansão acelerada do Universo [12, 13]. No contexto da cosmologia, as primeiras tentativas surgiram com a introdução da constante cosmológica [14], e posteriormente sua evolução para o modelo  $\Lambda$ CDM [15].

As abordagens alternativas à RG são classificadas, grosso modo, em duas grandes categorias. A primeira delas propõe a mudança do conteúdo de matéria do Universo, com

---

a adição da “matéria escura” e “energia escura” [12, 13, 16–19]. A segunda categoria, de particular interesse neste projeto, sugere a modificação das equações que compõem o setor geométrico das equações de Einstein [20–22]. Na literatura, as modificações mais usuais propõem a substituição da Lagrangiana de Einstein-Hilbert da RG (escalar de curvatura,  $R$ ) por outra função. Elas podem conter desde funções não lineares de  $R$  (“teorias  $f(R)$ ” [21, 23]), como ainda podem ser teorias cuja Lagrangiana possui dependência funcional no tensor de Ricci, de Riemann, ou de Weyl. Outras categorias incluem ainda uma dependência funcional na curvatura e suas derivadas [24]. Esta linha de investigação é chamada de “gravitação modificada” [25].

Alguns dos exemplos destas teorias alternativas foram feitas por Stelle [26], ou ainda por Starobinsky [27], que incluiu termos similares a  $R^2$ , aplicando a métrica de FLRW. Este último, em particular, conseguia descrever com muita robustez o período inflacionário da expansão do universo.

Usualmente, as ondas gravitacionais são estudadas a partir de perturbações da métrica, tomando-se a métrica de Minkowski como métrica de fundo. Este foi, por exemplo, o caso estudado por Vilhena em [28], que abordou as ondas gravitacionais para um fundo plano em gravitação modificada com a adição de termos  $R\Box R$  e  $R^2$  à ação de Einstein-Hilbert. Quando o espaço de fundo não é mais plano, por exemplo quando se leva em conta a expansão do universo, termos de curvatura não podem ser mais desprezados e não é possível aplicar a métrica de Minkowski [29].

Frente à grande quantidade de dados experimentais disponíveis hoje em dia, acredita-se ser possível avaliar a propagação de ondas em espaços curvos. Neste projeto, pretende-se seguir passos similares ao trabalho de Vilhena, mas estudando as ondas gravitacionais em fundo curvo, em uma aproximação de ondas curtas [30].

Impulsionado pelo avanço da tecnologia de detecções de ondas gravitacionais, o presente trabalho pretende estudar as ondas gravitacionais da Teoria de Starobinsky-Podolsky em que são apresentados as equações de campo nesse novo regime. Para isso, este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, é apresentada a descrição das equações de Einstein a partir da ação mínima; no Capítulo 3, o estudo das ondas gravitacionais em um fundo plano; no Capítulo 4, as ondas gravitacionais em um fundo curvo; e no Capítulo 5, as equações de campo das ondas gravitacionais na gravidade modificada. Além disso, uma síntese da Relatividade Geral é fornecida nos apêndices.



## 2 AÇÃO GRAVITACIONAL

A descrição mais completa da Relatividade Geral foi feita pouco tempo depois de Einstein publicar seu texto final chegando às equações que recebem seu nome. Esta descrição foi feita por Hilbert onde derivou as equações por um simples princípio variacional [31]. Podemos utilizar o princípio de mínima ação para descrever a ação gravitacional, e faremos isso identificando quem poderia ser a densidade lagrangiana gravitacional  $\mathcal{L}_G$ . No caso newtoniano, a lagrangeana é composta pelas derivadas com respeito à posição ( $x$ ), velocidade ( $\dot{x}$ ) e tempo ( $t$ ) [32]. Já para o caso relativístico, assumimos que a lagrangeana é um funcional da métrica  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \dots). \quad (2.1)$$

A lagrangeana pode ser separada por contribuições da geometria e da matéria:

$$\mathcal{L} = I_G + I_m \quad (2.2)$$

Por esse motivo, supomos que  $\mathcal{L}$  contendo derivadas de  $g_{\mu\nu}$  deva ter o tensor de curvatura ao menos, então impomos que:

$$I_G = \sqrt{-g}R(x), \quad (2.3)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura, e a ação dada pela lagrangeana é:

$$I_G = \chi \int \sqrt{-g}R(x) d^4x. = \chi \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x. \quad (2.4)$$

Aplicando o cálculo variacional para a ação mínima, notamos que a variação da ação é  $\delta I = 0$ , dessa forma, o integrando deve ser igualado a 0. Aplicando a derivada funcional no escalar de curvatura temos:

$$\int d^4x \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \int d^4x [\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta \sqrt{-g}]. \quad (2.5)$$

Começando pelo primeiro termo, aplicaremos a variação do tensor de Ricci:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \delta(\Gamma_{\alpha\rho}^\alpha) \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\alpha\rho}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \delta(\Gamma_{\mu\rho}^\alpha) \Gamma_{\nu\alpha}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\rho. \quad (2.6)$$

Sabendo que qualquer diferença entre conexões é um tensor, e  $\delta$  está como uma diferença, podemos reagrupar da seguinte forma:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha). \quad (2.7)$$

Então, no primeiro termo da Eq. (2.5) podemos colocar  $g^{\mu\nu}$  para dentro da derivada covariante, por conta da metricidade, e usando que:

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\sqrt{-g}, \quad (2.8)$$

temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}\left[\nabla_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - \nabla_\mu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^\alpha\right)\right] \\ &= \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\right) - \partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A integral da Eq.(2.9) independe do caminho, pois a variação de  $g_{\mu\nu}$  nos extremos é nula, a integral se anula, sobrando apenas dois termos da Eq. (2.5). A variação  $\delta$  tem o mesmo comportamento da derivada, então podemos rearranjar e substituir a Eq. (2.8) no terceiro termo da Eq. (2.5), e para o segundo termo devemos primeiro considerar uma variação da métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ . Levando em conta que um tensor com seu inverso é a identidade:

$$\begin{aligned} \delta_\nu^\lambda &= g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} \rightarrow (g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})(g^{\mu\lambda} + \delta g^{\mu\lambda}) \\ &= \delta_\lambda^\mu + g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\lambda} + \delta g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como  $\delta$  é uma pequena variação,  $\delta^2$  é desprezível, concluímos que:

$$\delta g^{\mu\lambda}g_{\mu\nu} = -\delta g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} \implies \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda}. \quad (2.11)$$

Finalmente podemos reescrever a Eq.(2.5) usando os argumentos acima:

$$\delta I_G = \chi \int \frac{1}{2}\sqrt{-g}Rg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - \sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda}d^4x. \quad (2.12)$$

Podemos transformar o tensor de Ricci do primeiro termo no escalar de curvatura e levantando e trocando de índices do tensor de Ricci do segundo termo, isolando  $\sqrt{-g}$  chegamos à:

$$\delta I_G = \chi \int \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} - R^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}d^4x. \quad (2.13)$$

Já a variação da ação de matéria é escrita da forma:

$$\delta I_m = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia-momento para a matéria.

A variação da lagrangiana da Eq. (2.2) que são as componentes da gravidade e da matéria assumem a forma:

$$\delta\mathcal{L} = \delta I_G + \delta I_m. \quad (2.15)$$

Substituindo então as Eqs. (2.14) e (2.13) em (2.15), temos:

$$\delta\mathcal{L} = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\chi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

A variação da ação é nula, então para a integral ser nula, o que sobra são as parcelas de dentro das chaves, ou seja:

$$\chi \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Podemos ainda rearranjar os termos e substituir:

$$\chi = \frac{c^4}{16\pi G}, \quad (2.18)$$

e assim, obtemos as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Dessa forma, o resultado da Eq. (2.19) precisa se enquadrar no contexto da Física Clássica, por se tratar de uma teoria geral, que será abordado o emprego das Equações de Einstein no Limite de Campo Fraco no Apêndice G.

Com as equações de Einstein em mãos, podemos agora estudar uma das previsões da Relatividade Geral, no qual é o título do próximo capítulo, as ondas gravitacionais.

### 3 ONDAS GRAVITACIONAIS NA MÉTRICA DE MINKOWSKI

Vimos na seção anterior como que o espaço-tempo se comporta em uma situação que não há variação temporal, ou seja, nos entornos de objetos pouco massivos e estáticos. Mas como são equações de campo, como no eletromagnetismo, é interessante estudar como o espaço-tempo se comporta com uma perturbação temporal.

Para dar início, vamos começar com o mesmo caso do campo fraco, mas agora considerando o tempo. É importante ver como que a perturbação  $h_{\mu\nu}$  levanta e abaixa seus índices partindo da Eq. (g.2). Levando em conta de que  $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$  e que  $k^{\nu\sigma}$  seja tão pequeno quanto  $h_{\mu\nu}$  temos:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} &= \delta_\mu^\sigma = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\sigma} + k^{\nu\sigma}) \\ &= \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\sigma} + \eta_{\mu\nu}k^{\nu\sigma} + h_{\mu\nu}\eta^{\nu\sigma} + h_{\mu\nu}k^{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

No primeiro termo, temos um delta de Kronecker que se anula com o outro lado da igualdade e o produto entre  $h$  e  $k$  é desprezível, então chegamos à conclusão que a métrica perturbada contravariante é:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Então aplicaremos essa métrica perturbada nas Equações de Einstein na ausência de fontes. Mas para isso precisamos encontrar quem é a conexão afim e depois os tensores de curvatura e Ricci e o escalar de curvatura.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &\approx \frac{(\eta^{\alpha\lambda} - h^{\alpha\lambda})}{2} (\partial_\mu\eta_{\nu\lambda} + \partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu\eta_{\lambda\mu} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda\eta_{\mu\nu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\lambda} - h^{\alpha\lambda}) (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) \\ &= \eta^{\lambda\alpha} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Lembramos que  $\partial_\alpha\eta_{\mu\nu} = 0$  em coordenadas cartesianas e que é uma aproximação de primeira ordem. Agora para o tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} R_{\gamma\beta\mu}^\rho &\approx \frac{1}{2} \left[ \partial_\lambda\eta^{\rho\lambda} (\partial_\beta h_{\lambda\mu} + \partial_\mu h_{\lambda\beta} - \partial_\lambda h_{\beta\lambda}) - \partial_\beta\eta^{\rho\lambda} (\partial_\gamma h_{\mu\lambda} + \partial_\mu h_{\lambda\gamma} - \partial_\lambda h_{\gamma\mu}) \right] \\ &= \frac{\eta^{\rho\lambda}}{2} [\partial_\gamma\partial_\beta h_{\lambda\mu} - \partial_\gamma\partial_\lambda h_{\mu\beta} - \partial_\beta\partial_\mu h_{\gamma\lambda} + \partial_\beta\partial_\lambda h_{\mu\gamma}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Levantando os índices:

$$R_{\gamma\beta\mu}^\rho = \frac{1}{2} \left[ \partial_\gamma\partial_\beta h_\mu^\rho - \partial_\gamma\partial^\rho h_{\mu\beta} - \partial_\beta\partial_\mu h_\lambda^\rho + \partial_\beta\partial^\rho h_{\mu\gamma} \right]. \quad (3.5)$$

Para o tensor de Ricci, contraímos  $\rho$  com  $\gamma$  e:

$$\begin{aligned} R_{\gamma\beta\mu}^\gamma &= R_{\beta\mu} \approx \frac{1}{2} \left( \partial_\gamma\partial_\mu h_\beta^\gamma - \partial_\gamma\partial^\gamma h_{\mu\beta} - \partial_\beta\partial_\mu h_\gamma^\gamma + \partial_\beta\partial^\gamma h_{\mu\gamma} \right) \\ &= -\frac{\partial_\gamma\partial^\gamma h_{\mu\beta}}{2} + \frac{1}{2} \left( \partial_\gamma\partial_\mu h_\beta^\gamma - \partial_\beta\partial_\mu h + \partial_\beta\partial_\gamma h_\mu^\gamma \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

e o escalar de curvatura temos:

$$R = \eta^{\beta\mu} R_{\beta\mu} \approx -\partial_\gamma \partial^\gamma h + \partial_\gamma \partial^\beta h^\gamma_\beta. \quad (3.7)$$

O tensor de Einstein então fica da seguinte maneira:

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left( -\square h_{\mu\nu} + \partial_\gamma \partial_\mu h^\gamma_\nu - \partial_\nu \partial_\mu h + \partial_\nu \partial_\gamma h^\gamma_\mu - \eta_{\mu\nu} \square h + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} \right). \quad (3.8)$$

Seria interessante se, por uma transformação de coordenadas pudéssemos simplificar a Eq. (3.8), onde na próxima sessão estudaremos essas mudanças.

### 3.1 CALIBRE HARMÔNICO

Aplicando uma perturbação no sistema de coordenadas  $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ , que podemos denotar  $\delta x^\mu = \xi^\mu$ , então essa transformação deve ser compatível com:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\nu} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta_{\nu'}^{\mu'} - \partial_{\nu'} \xi^\mu. \quad (3.9)$$

Temos, pela Eq. (a.8):

$$A'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu = \left( \delta_{\nu'}^{\mu'} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} \right) A_\mu = \left( \delta_{\nu'}^{\mu'} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} \right) A_\mu (x' - \xi). \quad (3.10)$$

Expandindo  $A_\mu (x' - \xi)$  por séries de Taylor e aproximando em primeira ordem:

$$\begin{aligned} A'_\nu &= \left( \delta_{\nu'}^{\mu'} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} \right) \left( A_\mu - \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\mu \right) \\ &= \delta_{\nu'}^{\mu'} A_\mu - \delta_{\nu'}^{\mu'} \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\mu - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu + \xi^\alpha \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\nu} \\ &= A_\nu - \xi^\alpha \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, podemos escrever uma perturbação do vetor  $A_\nu$ :

$$\begin{aligned} \delta A_\nu &= A'_\nu (x') - A_\nu (x') \\ &= A_\nu (x') - \xi^\alpha \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu - A_\nu (x') \\ &= -\xi^\alpha \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu. \end{aligned} \quad (3.12)$$

E para um vetor contravariante, temos algo análogo:

$$\delta A^\nu = A^\alpha \partial_\alpha \xi^\nu - \xi^\alpha \partial_\alpha A^\nu, \quad (3.13)$$

E generalizando para um tensor de ordem 2:

$$\delta A_{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha A_{\mu\nu} - A_{\alpha\mu} \partial_\nu \xi^\alpha - A_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha, \quad (3.14)$$

$$\delta A^{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha A^{\mu\nu} + A^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + A^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu. \quad (3.15)$$

Essa perturbação também serve para a métrica:

$$\delta g_{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha, \quad (3.16)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -\xi^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} + g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + g^{\alpha\nu} \partial_\alpha \xi^\mu. \quad (3.17)$$

Aplicando a derivada covariante em  $\xi^\mu$ ,

$$g^{\nu\alpha} \nabla_\alpha \xi^\mu - g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \xi^\nu = g^{\nu\alpha} [\partial_\alpha \xi^\mu - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \xi^\lambda] - g^{\mu\alpha} [\partial_\alpha \xi^\nu - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \xi^\lambda]. \quad (3.18)$$

Pelo postulado da metricidade, Eq. (a.56) podemos identificar que:

$$\delta g^{\mu\nu} = -\nabla^\nu \xi^\mu - \nabla^\mu \xi^\nu, \quad (3.19)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\mu \xi_\nu. \quad (3.20)$$

Aplicando ao campo fraco, temos:

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= \delta \eta^{\mu\nu} - \delta h^{\mu\nu} \\ &= -\xi^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\mu (\eta^{\beta\nu} - h^{\beta\nu}) - \xi^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\nu (\eta^{\beta\mu} - h^{\beta\mu}) \\ &\quad + (\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha}) \partial_\alpha \xi^\nu + (\eta^{\nu\alpha} - h^{\nu\alpha}) \partial_\alpha \xi^\mu. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Como  $\xi^\mu$  é arbitrário, escolhemos de tal forma que seja da mesma ordem de grandeza que  $h^{\mu\nu}$ , e com isso, os termos que tem a multiplicação  $\xi^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$  são desconsiderados, restando então:

$$\delta g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha \xi^\nu + \eta^{\nu\alpha} \partial_\alpha \xi^\mu = \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu, \quad (3.22)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha = -\partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (3.23)$$

Aplicando esta transformação para  $h$ :

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} \\ &= h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \\ &= h_{\mu\nu} - \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nesse momento, é preciso introduzir o tensor de traço reverso:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h', \quad (3.25)$$

onde  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  é o traço. Logo, podemos calcular a transformação no traço-reverso:

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h' \\ &= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [\eta^{\sigma\lambda} (h'_{\sigma\lambda})] \\ &= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [\eta^{\sigma\lambda} (h_{\sigma\lambda} - \eta_{\alpha\lambda} \partial_\sigma \xi^\alpha - \eta_{\alpha\sigma} \partial_\lambda \xi^\alpha)] \\ &= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [h - \delta_\alpha^\sigma \partial_\sigma \xi^\alpha - \delta_\alpha^\lambda \partial_\lambda \xi^\alpha] \\ &= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - \frac{1}{2} [\eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma \xi^\sigma - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Trocando os índices mudos:

$$\begin{aligned}
\bar{h}'_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\xi^\alpha - \frac{1}{2} \left[ \eta_{\mu\nu}h - \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda - \eta_{\alpha\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda \right] \\
&= h_{\mu\nu} - \eta_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\xi^\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h + \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda \\
&= \underbrace{h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h}_{\bar{h}_{\mu\nu}} - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\xi^\alpha - \eta_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha + \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda \\
&= \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\alpha}\partial_\nu\xi^\alpha - \eta_{\alpha\nu}\partial_\mu\xi^\alpha + \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda \\
&= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi_\mu - \partial_\mu\xi_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\xi^\lambda.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Tomando o divergente  $\bar{h}'_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} &= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\nu\xi_\mu - \partial^\mu\partial_\mu\xi_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial_\lambda\xi^\lambda \\
&= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\nu\xi_\mu - \partial^\mu\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\partial_\lambda\xi^\lambda \\
&= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\nu\xi_\mu - \partial^\mu\partial_\mu\xi_\nu + \eta^{\lambda\mu}\eta_{\lambda\mu}\partial_\lambda\partial_\nu\xi^\lambda \\
&= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\nu\xi_\mu - \partial^\mu\partial_\mu\xi_\nu + \partial^\mu\partial_\nu\xi_\mu \\
&= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\mu\partial_\mu\xi_\nu \\
&= \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_\nu,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde  $\square = \partial_\mu\partial^\mu$ .

Lembrando que  $\xi_\nu$  é a arbitrária, podemos escolher de tal forma que:  $\square\xi_\nu = \partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu}$ , implicando assim:

$$\partial^\mu\bar{h}'_{\mu\nu} = \partial_\mu\bar{h}'^\mu{}_\nu = 0 \text{ (calibre harmônico)}. \tag{3.29}$$

Podemos usar o calibre harmônico e o traço reverso de  $h$  nas Equações de Einstein, então de 4 termos, temos agora 1 termo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.30}$$

Para que haja mais clareza nas equações a seguir, omitimos a linha de  $h$ , e neste sistema de coordenadas específico, vemos que existe uma propagação gravitacional no vácuo com a velocidade da luz em forma de ondas, assim denominadas de Ondas Gravitacionais.

### 3.2 PROPAGAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

As soluções da Eq. (3.30) indicam a existência das ondas gravitacionais, portanto podemos começar nosso estudo com ondas planas cuja a solução é dada por [33]:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}, \tag{3.31}$$

onde  $A^{\mu\nu}$  é o tensor de amplitudes com elementos constantes e  $k^\mu = \eta^{\mu\alpha}k_\alpha$  é o quadrivetor de onda. Para podermos identificar estes elementos, substituímos (3.31) em (3.30):

$$\begin{aligned}
\Box \bar{h}^{\mu\nu} &= \partial^\sigma \partial_\sigma (A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\
&= \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho (A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}) \\
&= \eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma [(ik_\rho) A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] \\
&= -\eta^{\sigma\rho} (k_\rho k_\sigma) A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \\
&= -A^{\mu\nu} k_\sigma k^\sigma e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Para que seja verdadeira, apenas duas situações são possíveis:  $A^{\mu\nu} = 0$  e  $k_\sigma k^\sigma = 0$ . Sendo uma onda, o tensor de amplitudes não pode ser nulo, ou não existe ondas gravitacionais, então o quadrivetor de onda com índices iguais se anulam, ou seja, é um vetor tipo luz, já que não é nulo mas sua norma é nula. Aplicando o calibre harmônico, vemos outra propriedade das ondas gravitacionais:

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, (ik_\mu) A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} = 0 \implies k_\mu A^{\mu\nu} = 0. \tag{3.33}$$

Isso mostra que as ondas gravitacionais se propagam transversalmente.

Falta identificar quem são as constantes do tensor  $A^{\mu\nu}$  que a princípio tem 16 componentes, mas como segue a simetria de  $h^{\mu\nu}$  caem para 10, ou seja:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{03} & A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Pela implicação da Eq. (3.32), escolhemos a direção de propagação a componente de índice  $k_3$ , juntamente com a componente temporal  $k_0$  e podemos reescrevê-la como:

$$\eta^{00} k_0 k_0 + \eta^{03} k_0 k_3 + \eta^{30} k_3 k_0 + \eta^{33} k_3 k_3 = 0, \tag{3.35}$$

A partir da métrica de Minkowski:

$$-(k_0)^2 + (k_3)^2 = 0 \implies k_0 = \pm k_3 = k. \tag{3.36}$$

Assim como na assinatura da métrica, deixaremos a parte temporal negativa e a espacial positiva, ou seja:

$$k_\sigma = (-k, 0, 0, k). \tag{3.37}$$

e seu quadrivetor contravariante:

$$k^\sigma = (k, 0, 0, k). \tag{3.38}$$

Então, quando aplicamos na Eq. (3.33):

$$k_\nu A^{\mu\nu} = -k A^{\mu 0} + k A^{\mu 3} = 0 \implies A^{\mu 0} = A^{\mu 3}. \tag{3.39}$$



Que nos leva a uma redução maior da matriz  $A^{\mu\nu}$ :

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{00} & A^{13} & A^{23} & A^{00} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

O calibre harmônico ainda dá liberdade de uma nova perturbação do sistema de coordenadas:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}. \quad (3.41)$$

Aplicando esta transformação para  $\bar{h}^{\mu\nu}$ :

$$\bar{h}'^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} + \partial_{\mu}\xi^{\nu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu} + \eta^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\xi^{\lambda}. \quad (3.42)$$

Então, por um *ansatz*, supomos que:

$$\xi^{\mu} = -i\varepsilon^{\mu}e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}}, \quad (3.43)$$

i.e.

$$A'^{\mu\nu}e^{ik'_{\alpha}x^{\alpha'}} = \left(A^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu}k^{\nu} - \varepsilon^{\nu}k^{\mu} + \eta^{\mu\nu}k_{\lambda}\varepsilon^{\lambda}\right)e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}}. \quad (3.44)$$

É possível o cancelamento da exponencial fazendo uma aproximação de primeira ordem:

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu}k^{\nu} - \varepsilon^{\nu}k^{\mu} + \eta^{\mu\nu}k_{\lambda}\varepsilon^{\lambda}. \quad (3.45)$$

Como a matriz é definida com 6 termos independentes, podemos escrever para cada termo:

$$A'^{00} = A^{00} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3), \quad (3.46)$$

$$A'^{01} = A^{01} - \varepsilon^1 k, \quad (3.47)$$

$$A'^{02} = A^{02} - \varepsilon^2 k, \quad (3.48)$$

$$A'^{21} = A^{21} - k(\varepsilon^3 - \varepsilon^0), \quad (3.49)$$

$$A'^{12} = A^{12}, \quad (3.50)$$

$$A'^{22} = A^{22} - k(\varepsilon^3 - \varepsilon^0)k. \quad (3.51)$$

Esta propagação está generalizada para qualquer direção, então podemos impor que o sistema de coordenadas seja perpendicular a direção de propagação, e convenientemente escolhemos  $\varepsilon^{\mu}$  fazendo  $A'^{00} = A'^{01} = A'^{02} = 0$  e também  $A^{11} = -A^{22}$ , temos:

$$\varepsilon^0 = (2A^{00} + A^{11} + A^{22})/4k, \quad (3.52)$$

$$\varepsilon^1 = A^{01}/k, \quad (3.53)$$

$$\varepsilon^2 = A^{02}/k, \quad (3.54)$$

$$\varepsilon^3 = (2A^{00} - A^{11} - A^{22})/4k. \quad (3.55)$$

Este novo calibre, com apenas 4 entradas na matriz  $A^{\mu\nu}$ , que implica que a matriz  $h^{\mu\nu}$  também tenha 4 entradas, é chamado de calibre de traço reverso e transversal, ou simplesmente calibre TT, que dá a nova matriz de amplitudes:

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{12} & -A^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Podemos também entender esta matriz como uma combinação linear de duas outras matrizes:

$$A^{\mu\nu} = \alpha e_1^{\mu\nu} + \beta e_2^{\mu\nu}. \quad (3.57)$$

onde  $e_1^{\mu\nu}$  e  $e_2^{\mu\nu}$  são

$$e_1^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

denominadas como matrizes de polarização das ondas gravitacionais.

As duas matrizes da Eq. (3.58) são matrizes de polarização e estudaremos a seguir como as ondas gravitacionais afetam partículas.

### 3.3 POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

Podemos testar como essas polarizações funcionam em um vetor espacial  $\xi^\mu = (0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$  que determina as coordenadas de partículas vizinhas. Por conta da dilatação espaço-tempo que as ondas gravitacionais causam em  $\xi^\mu$ , mesmo as diferenças das coordenadas sendo constantes, a separação  $d$  não é necessariamente constante. Então definimos o intervalo  $d$  como:

$$d^2 = \tilde{g}_{ij} \xi^i \xi^j, \quad (3.59)$$

onde

$$\tilde{g}_{ij} \equiv g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}. \quad (3.60)$$

Definindo também uma variação em  $\xi^\mu$  como:

$$\zeta^i \equiv \xi^i + \frac{1}{2} h_k^i \xi^k, \quad (3.61)$$

desprezando os termos de ordem superior  $h(\mathcal{O}^2)$ , temos:

$$d^2 = (\delta_{ij} + h_{ij}) \xi^i \xi^j = \delta_{ij} \zeta^i \zeta^j. \quad (3.62)$$

Aplicando o calibre TT, vemos que os termos com índice 3 são constantes, ou seja,  $\zeta^3 = \xi^3 = \text{constante}$ , ou seja, o deslocamento das partículas são transversais às ondas gravitacionais que passam por elas.

Com isso, a partir da Eq. (3.31), lembrando do calibre TT, podemos substituir na Eq. (3.61), obtendo:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}A^{ij}e^{i\kappa_\alpha x^\alpha}\xi_j. \quad (3.63)$$

Escolhemos agora por conveniência  $A^{ij} = \alpha A e^{ij}$ , onde os  $e^{ij}$ s são referentes à Eq. (3.58), escolhemos primeiro  $e_1^{ij}$  e lembrando que como os índices são apenas espaciais, a posição deles não faz diferença, então reescrevemos a Eq. (3.63) como:

$$\zeta^i = \xi^i + \frac{1}{2}Ae^{i\kappa_\alpha x^\alpha} \left[ (e_1^{i1}\xi^1 + e_1^{i2}\xi^2) \right]. \quad (3.64)$$

Usando apenas a parte real da exponencial e usando a equação de Euler, e varrendo os valores de  $i = 1, 2, 3$  obtemos apenas o cosseno:

$$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (\xi^1, \xi^2, 0) + \frac{1}{2}\alpha \cos[\kappa(x^3 - x^0)] (\xi^1, -\xi^2, 0). \quad (3.65)$$

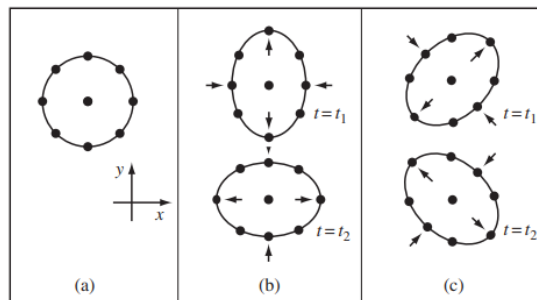
Isso mostra que em um círculo, que é descrito por  $\zeta$ , quando os valores de cosseno são iguais a 1, o eixo  $\zeta^1$  estica e o eixo  $\zeta^2$  se encolhe, e o inverso acontece quando o cosseno é igual à  $-1$ .

Escolhendo agora  $e_2^{ij}$ , onde  $A^{ij} = \beta e_2^{ij}$  temos a seguinte equação:

$$(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (\xi^1, \xi^2, 0) + \frac{1}{2}\beta \cos[\kappa(x^3 - x^0)] (\xi^2, \xi^1, 0), \quad (3.66)$$

assim quando o cosseno assume valores não nulos, a deformação é em relação às diagonais.

**Figura 5** – Polarização das ondas gravitacionais ilustrada por um círculo de partículas livres antes (a), e depois da passagem das ondas gravitacionais nas polarizações + (b) e  $\times$  (c)



Fonte: [34].

As polarizações descritas pelas Eqs. (3.65) e (3.66) são comumente chamadas de polarização cruz e polarização mais, e os elementos dessa matriz são representados por  $h_\times$  e  $h_+$ . Essas ondas gravitacionais são detectáveis em um universo mais recente, onde a curvatura de fundo é praticamente nula, no limite da métrica de Minkowski, então no próximo capítulo trataremos as gravitacionais para um fundo mais geral.

## 4 ONDAS GRAVITACIONAIS EM UM FUNDO CURVO

Aproximação de ondas curtas

Até agora, vimos o tratamento das ondas gravitacionais com o fundo em Minkowski, mas podemos estudar as ondas gravitacionais em um fundo geral, não necessariamente plano. Então usaremos a métrica aproximada com uma pequena perturbação  $h_{\mu\nu}$ .

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})} + h_{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Podemos entender estas perturbações como uma rugosidade em uma casca de laranja, que não altera sua geometria em “larga escala”, ou seja, apesar da casca ter rugosidade, a laranja não deixa de ser esférica [35].

Definimos então  $\mathcal{R}$  como o raio da curvatura de fundo,  $\lambda$  o comprimento de onda reduzido  $\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)$  e  $\mathcal{A}$  como amplitude das ondas gravitacionais.

Dessa forma, temos as propriedades [36]:

1. Se  $\mathcal{A}$  é a amplitude da perturbação:

$$h_{\mu\nu} \leq (\text{valor típico de } g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})})\mathcal{A}; \quad (4.2)$$

2. A escala com que  $g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})}$  varia é  $\neq \mathcal{R}$

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})} \leq \frac{(\text{valor típico de } g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})})}{\mathcal{R}}; \quad (4.3)$$

3. A escala com que  $h_{\mu\nu}$  varia é  $\sim \lambda$

$$\partial_\alpha h_{\mu\nu} \sim \frac{(\text{valor típico de } g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})})}{\lambda}. \quad (4.4)$$

Para podermos utilizar essa nova métrica nas equações de Einstein, primeiro devemos encontrar a inversa da métrica para ordem 2:

$$g^{\mu\nu} = g^{(\mathbf{B})\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_\alpha^\nu - h^{\mu\alpha}h_\alpha^\beta h_\beta^\nu + O(h^3). \quad (4.5)$$

Dessa forma, podemos encontrar o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{\mathbf{B}} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (4.6)$$

onde  $R_{\mu\nu}^{\mathbf{B}}$  e  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  e  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  são perturbações do tensor de Ricci de acordo com a ordem de grandeza de  $h$ .

Recuperaremos as Eqs. (2.6) e (2.7) para o cálculo do tensor de Ricci aplicando a variação da métrica de fundo, onde o tensor de fundo  $R_{\mu\nu}^{\mathbf{B}}$  mais uma perturbação é a variação, dessa forma, a variação de Ricci é:

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha. \quad (4.7)$$

Utilizando então a métrica descrita na Eq. (4.1) e aplicando na Eq. (4.7) temos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[ -\nabla_\nu \nabla_\mu h + \nabla_\alpha \nabla_\nu h_\mu^\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\mu h^\alpha_\nu - \square h_{\mu\nu} \right] + O(h^2). \quad (4.8)$$

onde o primeiro termo que tem ordem  $h$  é referente as altas frequências pelo fato de  $h$  ser pequeno, enquanto o segundo termo tem contribuições tanto para altas frequências quanto para baixas frequências (para baixas frequências, em um termo quadrático,  $h_{\alpha\beta} h_{\rho\delta}$ , um modo com vetor de onda alto  $\mathbf{k}_1$  de  $h_{\alpha\beta}$  pode se combinar com outro modo com vetor de onda alto  $\mathbf{k}_2 \approx -\mathbf{k}_1$  de  $h_{\rho\delta}$  e encontrar um modo com vetor de onda baixo [37]). Os termos de baixa frequência afetam a métrica de fundo, ligado ao tensor energia-momento, ou seja, afetam a curvatura de fundo [37]. É importante enfatizar que  $g_{\mu\nu}^{\mathbf{B}}$  é quem abaixa e levanta índices e que as derivadas covariantes  $\nabla_\alpha$  são calculadas a partir da métrica de fundo.

Como queremos estudar a propagação das ondas gravitacionais num fundo curvo, usando a aproximação de ondas curtas, o tensor de Ricci em primeira ordem é:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[ -\square h_{\mu\nu} - \nabla_\nu \nabla_\mu h + \nabla_\alpha \nabla_\nu h_\mu^\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\mu h^\alpha_\nu \right] = 0. \quad (4.9)$$

Identificamos a propriedade da derivada covariante de segunda ordem de um tensor de ordem dois:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta S^{\mu\nu} = \nabla_\beta \nabla_\alpha S^{\mu\nu} + R_{\alpha\rho\beta}^\mu S^{\rho\nu} + R_{\alpha\rho\beta}^\nu S^{\mu\rho}. \quad (4.10)$$

Aplicando na Eq. (4.9):

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( -\square h_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu h + \nabla_\mu \nabla^\alpha h_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \nabla^\alpha h_{\mu\alpha} - R_{\mu\alpha}^{(\mathbf{B})} h_\nu^\alpha - R_{\nu\alpha}^{(\mathbf{B})} h_\mu^\alpha + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(\mathbf{B})} h^{\alpha\beta} \right). \quad (4.11)$$

Na construção das ondas gravitacionais linearizadas, utilizou-se o traço reverso de  $h_{\mu\nu}$ , então é possível aplicá-la aqui também:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})} \bar{h}. \quad (4.12)$$

Aplicando a Eqs. (4.11) e (4.12) na Eq. (4.9):

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})} \square \bar{h} + \nabla_\mu \nabla_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha + \nabla_\nu \nabla_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(\mathbf{B})} \bar{h}^{\alpha\beta} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - R_{\mu\alpha}^{(\mathbf{B})} h_\nu^\alpha - R_{\nu\alpha}^{(\mathbf{B})} h_\mu^\alpha \right). \quad (4.13)$$

Como estamos trabalhando com a propagação no vácuo, a Eq. (4.13) se torna igual a 0. De novo, resgatamos da teoria linearizada, por uma escolha apropriada de uma quadrifunção, aplica-se o calibre de Lorenz, sendo dessa forma:

$$\nabla_\lambda \bar{h}^{\lambda\alpha} = 0. \quad (4.14)$$

Dessa forma, chegamos a uma equação para descrever a propagação das ondas gravitacionais em um fundo curvo:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(\mathbf{B})} \bar{h}^{\alpha\beta} + R_{\mu\alpha}^{(\mathbf{B})} \bar{h}_{\nu}^{\alpha} + R_{\nu\alpha}^{(\mathbf{B})} \bar{h}_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad (4.15)$$

e por causa do vácuo, em algumas situações, podemos aproximar a Eq.(4.15) eliminando os tensores de Ricci, ficando apenas:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(\mathbf{B})} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.16)$$

Em determinadas ocasiões, podemos fazer uma aproximação de primeira ordem da Eq. (4.16), já que  $R_{\mu\alpha\nu\beta}^{(\mathbf{B})} \bar{h}^{\alpha\beta}$  é de ordem maior que  $\square \bar{h}_{\mu\nu}$  [37].

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.17)$$

Ambos os casos abordaremos nas próximas subseções, quando escolhermos a Métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker (FLRW)

Métrica FLRW Conseguimos informações sobre escalas cosmológicas observando a luz emitidas por estrelas e galáxias. Essas informações vem em linhas difratadas indicando os componentes químicos nelas contidos, mas devido ao afastamento e aproximação destes entes, há um desvio nas linhas difratadas, mas mantendo o mesmo padrão. Chamamos este desvio de redshift, ou seja, por conta da velocidade que estão em relação ao observador, o seu comprimento de onda se estica ou comprime, que é dado por:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (4.18)$$

Na observação de uma série de galáxias, observou-se que em sua grande maioria, tinham um desvio para o vermelho, indicando um afastamento, plotado em um gráfico, notou-se que existia uma relação entre a distância e o redshift. Foi então possível observar um gráfico linear:

$$z = \frac{H_0}{c} r, \quad (4.19)$$

onde  $H_0$  é a constante de Hubble. Utilizando o efeito Doppler combinado com a Eq.(4.19), podemos relacionar a velocidade das galáxias com a distância delas:

$$v = H_0 r. \quad (4.20)$$

Dessa forma podemos concluir que o universo está em expansão, e se o universo é homogêneo e isotrópico, esta expansão deve ser homogênea e isotrópica, então podemos supor um termo de expansão que varia com o tempo  $a(t)$ . Como em todas as direções a expansão é igual, este afastamento se dá por uma relação linear:

$$v = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) r \quad (4.21)$$

No tempo atual,  $t = t_0$ , comparando com a Eq.(4.19) é possível observar que:

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}. \quad (4.22)$$

e para um tempo qualquer, temos a função de Hubble:

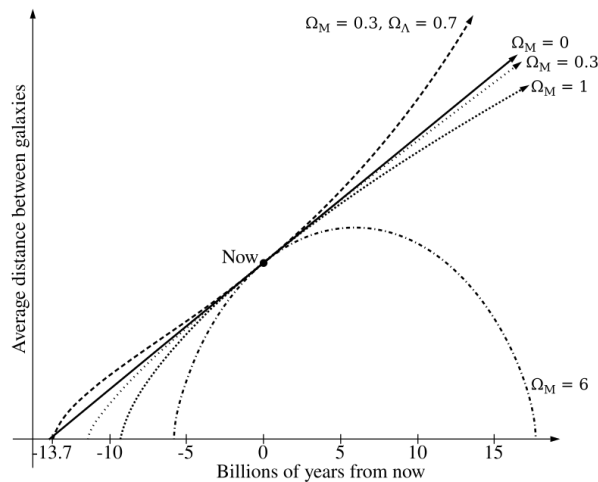
$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (4.23)$$

Em um universo em expansão, a métrica não pode ser estacionária, então os termos relacionados as coordenadas espaciais ganham o termo de expansão  $a(t)$ , e para esse modelo usamos a métrica de FLRW:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + S_\kappa(r)^2 d\Omega^2], \quad (4.24)$$

em que  $S_\kappa$  determina a curvatura espacial do universo, sendo  $\kappa = 1$  para uma curvatura fechada,  $\kappa = 0$  plana e  $\kappa = -1$  uma curvatura aberta e  $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  como e mostrada na Figura 6. As medidas atuais sugerem que a curvatura é nula, ou seja, plana, com isso, implica que  $S_\kappa = r$ . Essa métrica começa a fazer diferença quando tratamos de distâncias muito grandes, onde começamos a observar uma isotropia e homogeneidade do universo e, supondo que esta expansão que é descrita em  $a(t)$  seja também homogênea e isotrópica.

**Figura 6** – Possíveis formatos de universo de acordo com a densidade de matéria e radiação



Fonte: [38]

Para a luz, ou no caso as ondas gravitacionais,  $ds^2 = 0$ , pois viajam em uma geodésica nula. Portanto, a Eq. (4.24) tem a forma:

$$dt = a(t)dr. \quad (4.25)$$

as componentes de  $\Omega$  para esse caso se mantém constante. A distância própria que definiremos como  $d_p$  é obtida quando integramos a Eq.(4.25) sobre a coordenada radial:

$$d_p(t) = \int_0^r ds = a(t) \int_0^r dr = a(t)r. \quad (4.26)$$

Observamos que a distância própria  $d_p$  é dependente do tempo, sendo assim, teremos diferentes distâncias para tempos diferentes, então seria interessante entender como ocorre esta variação temporal sobre ela.

$$\dot{d}_p(t) = \dot{a}r = \frac{\dot{a}}{a}d_p. \quad (4.27)$$

e colocando no tempo presente, temos que a velocidade própria  $v_p(t_0) = \dot{d}_p(t_0)$ , retornamos a constatar a Eq.(4.21).

Esta expansão do universo é governada pelas equações de Einstein, logo devemos encontrar as conexões a partir dessa métrica, posteriormente os tensores de curvatura e Ricci, mas considerando um universo plano, ou seja,  $\kappa = 0$ . Temos então:

$$\Gamma_{ij}^0 = a^2 H \delta_{ij}, \quad (4.28)$$

$$\Gamma_{i0}^j = H \delta_i^j, \quad (4.29)$$

e os tensores de Riemman:

$$R_{010}^1 = R_{020}^2 = R_{030}^3 = \dot{H} + H^2, \quad (4.30)$$

$$R_{101}^0 = R_{202}^0 = R_{303}^0 = -a^2 (\dot{H} + H^2), \quad (4.31)$$

$$R_{131}^3 = R_{232}^3 = R_{121}^2 = -a^2 H^2. \quad (4.32)$$

#### 4.1 PROPAGAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS NO FUNDO DE FRW

Vamos agora estudar a propagação das ondas gravitacionais em um fundo curvo, mas analisaremos a Eq. (4.16) em uma aproximação de primeira ordem, ou seja,  $\square h_{\mu\nu} = 0$  e aplicaremos a métrica FRW Eq. (4.24) e explicitaremos o operador Laplace-Beltrami

$$\square h_{\mu\nu} = \partial_\rho \nabla^\rho h_{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\sigma}^\rho \nabla^\sigma h_{\mu\nu} - 2\Gamma_{\rho\mu}^\sigma \nabla^\rho h_{\sigma\nu}. \quad (4.33)$$

Pelas Eqs.(4.28) e (4.29) que são as conexões quando as coordenadas espaciais são planas, cada termo se apresenta como:

$$\Gamma_{\rho\alpha}^\rho \nabla^\alpha h^{\mu\nu} = -3H \partial_0 h^{\mu\nu}, \quad (4.34)$$

$$\partial_\rho g^{\mathbf{B}\rho\sigma} \nabla_\sigma h^{\mu\nu} = \begin{cases} \mu = 0, & \partial_\rho \partial^\rho h^{0\nu} + 2\partial_\rho g^{(\mathbf{B})\rho i} \delta_{ij} a^2 H h^{j\nu}, \\ \mu = i, & \partial_\rho \partial^\rho h^{i\nu} + 2\partial_\rho g^{(\mathbf{B})\rho j} \sigma_j^i H h^{0j}, \end{cases} \quad (4.35)$$

$$2\Gamma_{\rho\alpha}^\mu \nabla^\rho h^{\alpha\nu} = \begin{cases} \mu = 0, & H \nabla_i h^{i\nu}, \\ \mu = i & \frac{H}{a^2} \nabla_i h^{0\nu}. \end{cases} \quad (4.36)$$



Agora, precisamos reescrever essas equações para os casos  $\mu = \nu = 0$ ;  $\mu = 0, \nu = i$  e  $\mu = i, \nu = j$ .

Para  $\mu = \nu = 0$ :

$$\square h^{00} = -\partial_0 \partial_0 h^{00} + \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_i h^{00} + H \left( 2\partial_i h^{i0} - 3\partial_0 h^{00} - 2\nabla_0 h^{00} \right). \quad (4.37)$$

Aplicando então o calibre harmônico, Eq. (4.17) e a Eq. (4.37) se reduz à:

$$\partial_0 \partial_0 h^{00} + 3H \partial_0 h^{00} - \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_i h^{00} = 0. \quad (4.38)$$

Para  $\mu = i$  e  $\nu = 0$ :

$$\partial_0 \partial_0 h^{i0} - \frac{1}{a^2} \partial_k \partial_k h^{i0} - 2\frac{H}{a^2} \partial_i h^{00} + 3H \nabla_0 h^{i0} + \frac{2H}{a^2} \nabla_i h^{00} = 0. \quad (4.39)$$

E finalmente para  $\mu = i$  e  $\nu = j$ :

$$\partial_0 \partial_0 h^{ij} - \frac{1}{a^2} \partial_k \partial_k h^{ij} - H \left( 3\partial_0 h^{ij} + \frac{2}{a^2} \partial_0 h^{j0} - \partial_i h^{0j} \right) = 0. \quad (4.40)$$

Podemos trabalhar com o calibre transversal de traço nulo (TT), e dessa forma, só sobra a Eq. (4.40) com algumas alterações, denotando por exemplo a derivada temporal por  $\partial_0 h_{ij} = \dot{h}_{ij}$  e  $\partial_k \partial_k h_{ij} = \nabla^2 h_{ij}$ :

$$\ddot{h}^{ij} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h^{ij} - 3H \dot{h}^{ij} = 0. \quad (4.41)$$

A solução de ondas planas por uma transformação de Fourier tem a forma:

$$h_{ij} = e_{ij} \mathcal{D}_q(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (4.42)$$

onde  $\mathcal{D}$  satisfaz [39]:

$$\ddot{\mathcal{D}}_q + 3H \dot{\mathcal{D}}_q + \frac{q^2}{a^2} \mathcal{D}_q = 0. \quad (4.43)$$

A solução dessas equações diferenciais da Eq. (4.43) são diferentes para diferentes eras do universo, ou seja, para cada era específica, terá um  $\mathcal{D}_q$  e  $q$  diferentes.

Já em segunda ordem, usando a Eq. (4.15) com o calibre TT, vemos uma diferença na Eq. (4.41), em que agora aparece o termo da curvatura [37]:

$$\ddot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2} \nabla^2 h_{ij} + 3H \dot{h}_{ij} - 4\dot{a}^2 h_{ij} - 3\ddot{a} a \mathcal{D}_q = 0. \quad (4.44)$$

Da mesma forma que na Eq. (4.42) é a solução para a parte espacial das ondas, como não há nenhum termo de derivada espacial além do laplaciano, então podemos embutir na Eq. (4.44) [40]:

$$\ddot{\mathcal{D}}_q + 3H \dot{\mathcal{D}}_q - \left( \frac{q^2}{a^2} + 4\dot{a}^2 + 3\ddot{a} a \right) \mathcal{D}_q = 0. \quad (4.45)$$

Observamos que ambas as Eqs. (4.43) e (4.45) são equações de um oscilador harmônico amortecido, explicitando que  $H$  desempenha um papel de amortecimento da oscilação e que a escala de expansão definirá a frequência da oscilação. No caso da Eq. (4.43) o fator de escala é o agente responsável pela frequência, sendo diretamente proporcional, ou seja, querendo aplicar a aproximação de ondas curtas, deveremos usar fatores de escala grandes. Já no caso da Eq. (4.45) vemos uma dinâmica sobre os fatores de escala, que em determinados períodos do universo quando há uma expansão muito acelerada,  $\frac{1}{a^2} \approx \dot{a}^2$ , como por exemplo o período inflacionário, volta ao limite proposto de ondas curtas.

Pelos problemas abordados sobre a aceleração de expansão do universo [13], essa abordagem sobre ondas gravitacionais pela Relatividade Geral talvez não seja tão precisa, dessa forma, no próximo capítulo utilizaremos uma abordagem de gravidade modificada [41].

## 5 GRAVIDADE MODIFICADA

Com a ideia de renormalizar a Relatividade Geral, Stelle [26] propôs uma forma de quantizar a teoria gravitacional. Nessa construção, acrescentou termos de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert. Quando são adicionados termos quadráticos da curvatura, é possível fazer uma normalização, mas infelizmente se introduz instabilidades do tipo ghost.

A busca por uma situação em que é preciso uma renormalização da Relatividade Geral se dá quando é estudado, por exemplo, o universo primordial e inflacionário, e Starobinsky [25], usando a gravidade modificada proposta por Stelle, com o termo de  $R^2$ , tem um dos principais candidatos à descrição dessa era.

Por outro lado, na extremidade oposta da linha do tempo, quando falamos de expansão acelerada do universo, modelos de derivadas de ordem superior do escalar de curvatura  $f(R, \nabla R, \dots, \nabla^n R)$  podem ajudar descrição da aceleração da expansão do universo. Dessa forma, usaremos as contribuições que Podolsky aplicou para o eletromagnetismo de derivadas de ordem superior, e juntaremos com o termo de  $R^2$  de Starobinsky, para estudar eras distintas da cosmologia.

Então a correção proposta para as equações de Einstein Eq. (2.19), é adicionar os termos  $R^2$  e  $R\Box R$ , na ação gravitacional Eq. (2.3) [41]. Por razão de simplificação da leitura, utilizaremos  $g_{\mu\nu}^{(\mathbf{B})} = g_{\mu\nu}$ , omitindo o índice superior ( $\mathbf{B}$ ) na métrica de fundo.

$$S = \chi \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 - \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} R\Box R \right]. \quad (5.1)$$

A equação da ação obtida variando  $g_{\mu\nu}$  é:

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa_0} H_{\mu\nu} + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} I_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}. \quad (5.2)$$

Sendo essa ação no vácuo e onde  $G_{\mu\nu}$  é dado pela Eq. (2.19),

$$H_{\mu\nu} \equiv R(R_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}) - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu R - g_{\mu\nu} \Box R). \quad (5.3)$$

é a contribuição de  $R^2$  e

$$I_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha R + \nabla_\mu R \nabla_\nu R - 2R_{\mu\nu} \Box R - 2\Box(\nabla_\mu \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \Box R). \quad (5.4)$$

a contribuição de  $R\Box R$ .

Os cálculos estão explícitos no trabalho de Vilhena [28].

Aplicando agora a métrica Eq. (4.1), queremos encontrar as perturbações de  $G_{\mu\nu}$ ,  $H_{\mu\nu}$  e  $I_{\mu\nu}$ , desprezando termos de ordem superior à  $O(h^2)$ , e agora usando que  $g_{\mu\nu}$  é a

métrica de fundo então:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} (R^{(1)} + h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) + h_{\mu\nu} R], \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(1)} = & -R (R_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(1)}) - (\nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\nu h_\mu^\alpha - \nabla^\alpha h_{\mu\nu}) \nabla_\alpha R + 2h_{\mu\nu} \square R \\ & + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha R + (R_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} \square - 2\nabla_\mu \nabla_\nu) R_o \end{aligned} \quad (5.6)$$

e

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^{(1)} = & [-g_{\mu\nu} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha + 2\nabla_\mu R \nabla_\nu - 2R_{\mu\nu} \square + 2\square (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)] R_o \\ & - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha R - 2R_{\mu\nu}^{(1)} \square R - R_{\mu\nu} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha R - \nabla^\alpha h \nabla_\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \square R) \\ & - 2\square \left[ \frac{1}{2} (\nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\nu h_\mu^\alpha - \nabla^\alpha h_{\mu\nu}) \nabla_\alpha R - h_{\mu\nu} \square R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha R \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Aparecem termos nesta expressão como  $R_{\mu\nu}^{(1)}$  que é a Eq. (4.15),  $R_o$  e  $\Gamma^{(1)}$ , que já foram substituídos por:

$$R_o = R^{(1)} + R_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

$$R^{(1)} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = -\square h + \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta}, \quad (5.9)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(1)\alpha} = \frac{1}{2} (\nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\nu h_\mu^\alpha - \nabla^\alpha h_{\mu\nu}), \quad (5.10)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(1)\alpha} = \frac{1}{2} \nabla_\beta h, \quad (5.11)$$

e obtendo as equações de campo perturbado:

$$\begin{aligned} \chi T_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} (R^{(1)} + h^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) + h_{\mu\nu} R] \\ = & + \frac{1}{2\kappa_0} \left\{ R (R_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(1)}) - (\nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\nu h_\mu^\alpha - \nabla^\alpha h_{\mu\nu}) \nabla_\alpha R + 2h_{\mu\nu} \square R \right\} \\ & + \frac{1}{2\kappa_0} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha R + (R_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu} \square - 2\nabla_\mu \nabla_\nu) R_o \right] \\ & + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \{ [-g_{\mu\nu} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha + 2\nabla_\mu R \nabla_\nu - 2R_{\mu\nu} \square + 2\square (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)] R_o \} \\ & + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \left\{ -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \nabla^\alpha R \nabla_\alpha R - 2R_{\mu\nu}^{(1)} \square R - R_{\mu\nu} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha R - \nabla^\alpha h \nabla_\alpha (\nabla_\mu \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \square R) \right\} \\ & + \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \left\{ -2\square \left[ \frac{1}{2} (\nabla_\mu h_\nu^\alpha + \nabla_\nu h_\mu^\alpha - \nabla^\alpha h_{\mu\nu}) \nabla_\alpha R - h_{\mu\nu} \square R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha h \nabla^\alpha R \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Podemos observar que temos termos com derivadas de ordem 6:  $\square (\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu}) R_o$ , então uma das abordagens para facilitar a resolução das equações diferenciais seria fazer uma decomposição escalar-tensorial do campo [42]. Com isso, aplicando o traço na Eq. (5.12), temos:

$$G^{(1)} = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^{(1)} = -R^{(1)} - 2R_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rh \quad (5.13)$$

$$H^{(1)} = R \left( R^{(1)} + G^{(1)} \right) - 2\nabla_\alpha h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R + 2h\Box R + 3\nabla_\alpha h \nabla^\alpha R + 6\Box R_o \quad (5.14)$$

$$I^{(1)} = -\frac{1}{2}h\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R - 2R^{(1)}\Box R - R\nabla_\alpha h \nabla^\alpha R + 3\nabla^\alpha h \nabla_\alpha \Box R - \\ -\Box \left( 2\nabla_\beta h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R - 2h\Box R - 5\nabla_\alpha h \nabla^\alpha R \right) - \left( 2\nabla^\alpha R \nabla_\alpha + 2R\Box + 6\Box^2 \right) R_o, \quad (5.15)$$

e as equações do campo escalar ficam:

$$\chi T^{(1)} = -R^{(1)} - 2R_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rh \\ + \frac{1}{2\kappa_0} \left[ R \left( R^{(1)} + G^{(1)} \right) - 2\nabla_\alpha h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R + 2h\Box R + 3\nabla_\alpha h \nabla^\alpha R + 6\Box R_o \right] \\ \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \left[ -\frac{1}{2}h\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R - 2R^{(1)}\Box R - R\nabla_\alpha h \nabla^\alpha R + 3\nabla^\alpha h \nabla_\alpha \Box R \right] \\ \frac{\beta_0}{2\kappa_0^2} \left[ -\Box \left( 2\nabla_\beta h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R - 2h\Box R - 5\nabla_\alpha h \nabla^\alpha R \right) - \left( 2\nabla^\alpha R \nabla_\alpha + 2R\Box + 6\Box^2 \right) R_o \right]. \quad (5.16)$$

Quando utilizamos a métrica de Minkowski, reduzimos as equações (5.12) e (5.16) ao trabalho de Vilhena [42], sendo dessa forma um indicativo de que conseguiremos chegar em expressões mais compactas e finalmente resolvê-las. Os próximos passos serão reduzir a ordem de derivadas, encontrar um calibre em que simplifique as equações e temos expectativas de encontrar equações do tipo Klein-Gordon amortecidas, pois as equações de ondas gravitacionais com a Relatividade Geral sem modificação indica um amortecimento das amplitudes das ondas.

A continuidade do roteiro apresentado nos últimos dois parágrafos fica como aplicação futura dos resultados apresentados nesta dissertação de mestrado.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho foi escrito com o intuito de apresentar de forma construtiva: estudo das equações de Einstein, estudo das ondas gravitacionais em um fundo plano, e as ondas gravitacionais em um fundo curvo.

Na primeira parte, foi discutida a dedução das equações de Einstein a partir da ação Einstein-Hilbert, obtida através da Lagrangeana  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$ , e sua conexão com a Mecânica Clássica, afim de encapsular as equações de Newton, já que a gravitação de Newton é válida para vários casos conhecidos.

Na segunda parte, consistiu na análise das ondas gravitacionais em um fundo plano. As equações de Einstein tiveram uma perturbação na métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , onde chegamos à equação de onda  $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$  no vácuo, usando o traço reverso  $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$  e o calibre harmônico  $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ . Assim, as soluções mostravam que as ondas gravitacionais eram planas e tinham duas polarizações, que são ondas transversais nos modos  $+$  e  $\times$ .

Na terceira parte, iniciamos os estudos das ondas gravitacionais em um fundo curvo, usando a aproximação de ondas curtas [35], e aplicamos a métrica FLRW, que é a mais usada para a cosmologia e admite a expansão do universo [29] e percebemos que o fator de escala influencia tanto na frequência quanto no amortecimento, independente da aproximação proposta.

Por último, introduzimos as ondas gravitacionais na Teoria da Gravidade Modificada, assim como Vilhena [42] fez em seu trabalho para um fundo plano, adicionando termos na ação de Einstein-Hilbert, em particular, a adição dos termos  $R^2$  e  $R\square R$  (Starobinsky-Podolsky) na ação [41], onde agora focaremos em uma abordagem geral em relação à métrica.

Com isso, pretendemos trabalhar futuramente em uma descrição mais robusta das ondas gravitacionais de fundo curvo (em especial usando a métrica FLRW) na gravidade modificada. Isso permitirá uma melhor descrição de períodos cosmológicos distantes, como por exemplo o universo primordial.

## REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. **Annalen der Physik**, [s. l.], v. 354, n. 7, p. 769–822, 1916.
- 2 WEBER, J. Observation of the thermal fluctuations of a gravitational-wave detector. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, New York, v. 17, p. 1228–1230, Dec. 1966.
- 3 WEBER, J. Evidence for discovery of gravitational radiation. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, [s. l.], v. 22, p. 1320–1324, Jun. 1969.
- 4 CERVANTES-COTA, J. L.; GALINDO-URIBARRI, S.; SMOOT, G. F. A brief history of gravitational waves. **Universe**, [s. l.], v. 2, n. 3, Sep. 2016. ISSN 2218-1997.
- 5 WEBER, J. The detection of gravitational waves. **Scientific American**, Scientific American, a division of Nature America, Inc., v. 224, n. 5, p. 22–29, May 1971. ISSN 00368733, 19467087.
- 6 TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A.; MCCULLOCH, P. M. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar psr1913 + 16. **Nature**, [s. l.], v. 277, p. 437–440, Feb. 1979. ISSN 00280836.
- 7 WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H. **Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis**. [s. l.]: [s.n.], 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407149>>. Acesso em: 29 maio 2024.
- 8 ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, College Park, v. 116, p. 061102, Feb. 2016.
- 9 GWTC. Disponível em: <<https://gwosc.org/eventapi/html/GWTC/>>. Acesso em: 28 maio 2024.
- 10 ELAVSKY, F.; NORTHWESTERN, A. G. **Mass Chart of Objects Detected by LIGO**. Pasadena: [s.n.], 2020. Disponível em: <<https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20200623a>>. Acesso em: 28 maio 2024.
- 11 ABBOTT, B. P. *et al.* Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, Ridge, v. 119, p. 161101, Oct. 2017.
- 12 BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, London, v. 90, p. 045002, Oct. 2018.
- 13 CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M. The physics of cosmic acceleration. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, Annual Reviews, Palo Alto, v. 59, n. Volume 59, 2009, p. 397–429, Jun. 2009. ISSN 1545-4134.
- 14 WEINBERG, S. The cosmological constant problem. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, Ridge, v. 61, p. 1–23, Jan. 1989.

- 15 PERIVOLAROPOULOS, L.; SKARA, F. Challenges for  $\lambda$ cdm: An update. **New Astronomy Reviews**, Elsevier BV, Amsterdam, v. 95, p. 101659, Dec. 2022. ISSN 1387-6473.
- 16 BERTONE, G.; TAIT, T. M. P. A new era in the search for dark matter. **Nature**, Springer Science and Business Media LLC, v. 562, n. 7725, p. 51–56, Oct. 2018. ISSN 1476-4687.
- 17 IOCCO, F.; PATO, M.; BERTONE, G. Evidence for dark matter in the inner milky way. **Nature Physics**, Springer Science and Business Media LLC, London, v. 11, n. 3, p. 245–248, Feb. 2015. ISSN 1745-2481.
- 18 CLOWE, D. *et al.* A direct empirical proof of the existence of dark matter. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 648, n. 2, p. L109–L113, Aug. 2006. ISSN 1538-4357.
- 19 BRAX, P. What makes the universe accelerate? a review on what dark energy could be and how to test it. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, Bristol, v. 81, n. 1, p. 016902, Dec. 2017.
- 20 NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: From  $f(r)$  theory to lorentz non-invariant models. **Physics Reports**, Elsevier BV, Amsterdam, v. 505, n. 2–4, p. 59–144, Aug. 2011. ISSN 0370-1573.
- 21 NOJIRI, S.; ODINTSOV, S.; OIKONOMOU, V. Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution. **Physics Reports**, Amsterdam, v. 692, p. 1–104, Jun. 2017. ISSN 03701573.
- 22 AFONSO, V. I.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Mapping ricci-based theories of gravity into general relativity. **Physical Review D**, American Physical Society, Ridge, v. 97, Jan. 2018. ISSN 24700029.
- 23 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V.  $f(r)$  theories of gravity. **Reviews of Modern Physics**, Ridge, v. 82, p. 451–497, Mar. 2010. ISSN 0034-6861.
- 24 BISWAS, T.; KOSHELEV, A. S.; MAZUMDAR, A. Consistent higher derivative gravitational theories with stable de sitter and anti-de sitter backgrounds. **Physical Review D**, Ridge, v. 95, p. 043533, Feb. 2017. ISSN 2470-0010.
- 25 STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letters B**, Amsterdam, v. 91, p. 99–102, Mar. 1980. ISSN 0370-2693.
- 26 STELLE, K. S. Classical gravity with higher derivatives. **General Relativity and Gravitation**, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, Dordrecht, v. 9, p. 353–371, Apr. 1978. ISSN 00017701.
- 27 GUROVICH, V.; STAROBINSKY, A. Quantum effects and regular cosmological models. **Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki**, Moscou, v. 77, p. 1683–1700, Sep. 1979.
- 28 VILHENA, S. G. **Ondas Gravitacionais no Modelo de Starobinsky de ordem superior**. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Alfenas, 2020. Disponível em: <<https://bdtd.unifal-mg.edu.br:8443/handle/tede/1742>>. Acesso em: 25 maio 2024.



- 29 RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. San Francisco: Cambridge University Press, 2016.
- 30 MAGGIORE, M. **Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology**. New York: Oxford University Press, 2018. ISBN 9780198570899.
- 31 HILBERT, D. The foundations of physics (first communication). In: JANSSEN, M. *et al.* (Ed.). **The Genesis of General Relativity**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2007. p. 1925–1938. ISBN 978-1-4020-4000-9. Disponível em <[https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4000-9\\_44](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4000-9_44)>. Acesso em: 5 junho 2024.
- 32 THORNTON, S.; MARION, J. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011. ISBN 9788522109067.
- 33 FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. **A Short Course in General Relativity**. New York: Springer, 2005. ISBN 9780387260785.
- 34 SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- 35 ISAACSON, R. A. Gravitational radiation in the limit of high frequency. i. the linear approximation and geometrical optics. **Phys. Rev.**, American Physical Society, Ridge, v. 166, p. 1263–1271, Feb. 1968.
- 36 MISNER, C. *et al.* **Gravitation**. San Francisco: Princeton University Press, 2017. ISBN 9781400889099.
- 37 MAGGIORE, M. **Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments**. Oxford: OUP Oxford, 2008. (Gravitational Waves). ISBN 9780198570745.
- 38 WIKIPEDIA. **Friedmann universes**. 2009. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Friedmann\\_universes.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Friedmann_universes.svg)>. Acesso em: 29 maio 2024.
- 39 WEINBERG, S. **Cosmology**. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN 9780198526827.
- 40 WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. New York, NY: Wiley, 1972.
- 41 CUZINATTO, R.; MEDEIROS, L.; POMPEIA, P. Higher-order modified starobinsky inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, Bristol, v. 2019, n. 02, p. 055, Feb. 2019.
- 42 VILHENA, S. G.; MEDEIROS, L. G.; CUZINATTO, R. R. Gravitational waves in higher-order  $R^2$  gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Ridge, v. 104, p. 084061, Oct. 2021.
- 43 ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to General Relativity**. New York: McGraw-Hill, 1965. (International series in pure and applied physics).

## APÊNDICE A – ÁLGEBRA TENSORIAL

Serão considerados sistemas quadrivetoriais, ou seja, um sistema que tenham 4 coordenadas e que seja possível transitarmos de um sistema para outro:

$$\bar{x}^j = f^j(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (\text{a.1})$$

$$x^k = h^k(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad (\text{a.2})$$

A transformação é um caso específico do Jacobiano e que deve ser contínuo, para que a sua derivada não seja nulo.

### DEFINIÇÃO DE ESCALAR, VETORES CONTRAVARIANTES, E VETORES COVARIANTES

**Quantias escalares:** Os escalares são uma quantidade que podemos medir com uma escala, este número não depende de qualquer sistema de referência, dessa forma, a métrica no espaço de Riemann

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx^i dx^j \quad (\text{a.3})$$

é um escalar e sua medida é constante em qualquer sistema de referência. **Vetores Contravariantes** Considere um deslocamento infinitesimal  $x^i + dx^i$  em um dado sistema de coordenadas. em um outro sistema de coordenadas, este deslocamento  $\bar{x}$  deve seguir a seguinte expressão:

$$d\bar{x}^i = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j \quad (\text{a.4})$$

que podemos reescrever como:

$$d\bar{x}^i = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j \quad (\text{a.5})$$

Podemos afirmar que qualquer conjunto de quatro quantidades  $\xi^i (i = 0, 1, 2, 3)$  que transforme igual a equação (a.5);

$$\bar{\xi}^i = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \xi^j \quad (\text{a.6})$$

é um vetor contravariante. Por convenção, denota-se componentes do vetor contravariante com índices em cima da letra que representa o vetor  $(\xi^j, \eta^j)$ . A soma de vetores contravariantes também é um vetor contravariante.

**Vetor Covariante** Considera um ponto  $M$  no espaço definido pelas coordenadas  $x^i$  em um particular sistema de coordenadas. Considere uma função  $\phi(x^i)$  no ponto  $M$

no espaço e definida na vizinhança de  $M$ ; sendo uma função de um ponto, seu valor não pode mudar em quaisquer sistemas de coordenadas. Isso é entretanto o que nós queremos chamar de campo escalar.

Considerando agora como quatro quantias  $A^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$  que transformam sob uma mudança de sistema de coordenadas  $(x^i)$  para  $\bar{x}^i$ . As quatro quantias correspondentes do sistema de coordenadas com barra serão da forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{j=0}^3 \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \quad (\text{a.7})$$

que dá:

$$\bar{A}_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j \quad (\text{a.8})$$

Para os vetores covariantes, denotamos o índice embaixo da letra que o representa.

**Teorema** O produto  $\sum_i \xi^i A_i$  formado por um vetor contravariante e um vetor covariante é um escalar invariante.

\*

Definição de Tensores Considera-se um  $P$  multilinear:

$$P = (T_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a})(\xi_{(1)}^{j_1} \dots \xi_{(b)}^{j_b})(\eta_{i_1}^{(1)} \dots \eta_{i_a}^{(a)}), \quad (\text{a.9})$$

sendo as quantias de  $\xi$  os vetores contravariantes,  $\eta$  os vetores covariantes e  $T_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a}$  é o tensor que tem um conjunto de  $n^{a+b}$  elementos que são covariantes e contravariantes.

**Casos particulares:**

- Tensor de ordem 0 é escalar;
- Tensor de ordem 1 pode ser tanto um tensor contravariante  $T^i$  como um tensor covariante  $T_i$
- Considerando a métrica  $g_{\mu\nu}$  no espaço de Riemann, temos a equação (a.3) com a notação de Einstein, quena repetição de índices, a somatória é implícita:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = (\text{tamanho invariante}). \quad (\text{a.10})$$

que logo na definição de (a.9), indica que  $g_{ik}$  é um tensor covariante de ordem 2.

## LEI DA TRANSFORMAÇÃO GERAL PARA TENSORES

Para decretar com segurança que é um tensor, uma transformação de sistema de coordenadas deve conservar  $P$  invariante, então:

$$(\bar{T}_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a})(\bar{\xi}_{(1)}^{j_1} \dots \bar{\xi}_{(b)}^{j_b})(\bar{\eta}_{i_1}^{(1)} \dots \bar{\eta}_{i_a}^{(a)}) = (T_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a})(\xi_{(1)}^{j_1} \dots \xi_{(b)}^{j_b})(\eta_{i_1}^{(1)} \dots \eta_{i_a}^{(a)}) \quad (\text{a.11})$$

que pode ser reescrito como:

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a} \left( \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{j_b}}{\partial x^{\beta_b}} \right) \left( \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_a}}{\partial \bar{x}^{i_a}} \right) = T_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} \quad (\text{a.12})$$

Para um caso mais específico, a lei da transformação de um tensor com 3 índices fica da forma:

$$\bar{T}_{\gamma}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\gamma}} T_k^{ij} \quad (\text{a.13})$$

## ÁLGEBRA TENSORIAL

**Equidade Tensorial** Dois tensores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são chamados de iguais se seus índices forem iguais:

$$A_{\gamma}^{\alpha\beta} = B_{\gamma}^{\alpha\beta} \quad (\text{a.14})$$

**Propriedades:**

1. A soma de dois tensores com o mesmo número de índices covariantes e contravariantes é um tensor

$$A_{\gamma}^{\alpha\beta} + B_{\gamma}^{\alpha\beta} = C_{\gamma}^{\alpha\beta} \quad (\text{a.15})$$

2. O produto escalar de dois tensores é também um tensor;

$$\bar{G}_{\gamma}^{\alpha\beta\mu\nu} = \bar{T}_{\gamma}^{\alpha\beta} \bar{S}_{\gamma}^{\mu\nu} \quad (\text{a.16})$$

## DECOMPOSIÇÃO DE UM TENSOR EM UMA SOMA DE PRODUTOS VETORIAIS

**Teorema:** Em um espaço  $n$ -dimensional, qualquer tensor de grau  $q > 1$  pode ser escrito como a soma dos produtos de tensores com  $q$  fatores cada  $n^{q-1}$  é em geral o menor número de produtos vetoriais que um tensor pode ser decomposto

## CONTRAÇÃO DE ÍNDICES

**Teorema:**  $T_{j_1 \dots j_{b-1} \sigma}^{i_1 \dots i_{a-1} \sigma}$  é um tensor de ordem  $a + b - 2$ , que pode ser denotado como  $R_{j_1 \dots j_{b-1}}^{i_1 \dots i_{a-1}}$

Ou seja, tensores que tenham índices iguais podem ser contraídos.

---

 ABAIXAMENTO E LEVANTAMENTO DE ÍNDICES - TENSORES ASSOCIADOS

A métrica  $g_{\mu\nu}$  abaixa os índices contravariantes tornando índices covariantes:

$$T_\mu = g_{\mu\nu}T^\nu \quad (\text{a.17})$$

e a inversa da métrica  $g^{\mu\nu}$  levanta os índices covariantes tornando índices contravariantes

$$g^{\mu\nu}T_\nu = T^\mu \quad (\text{a.18})$$

## DERIVADA COVARIANTE

A partir da transformação de um vetor contravariante:

$$\bar{\xi}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \xi^\nu, \quad (\text{a.19})$$

Podemos estipular uma transformação inversa

$$\left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \quad (\text{a.20})$$

Aplicando a inversa em (a.19) nos dois lados, temos:

$$\bar{\xi}^\mu \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} = \left( \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right) \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \xi^\nu = \delta_\nu^\rho \xi^\nu = \xi^\rho \quad (\text{a.21})$$

Então finalmente:

$$\xi^\rho = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \bar{\xi}^\mu \quad (\text{a.22})$$

que é a inversa de (a.19). Podemos substituir a diferencial em (a.22) para:

$$f(x) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \quad (\text{a.23})$$

Então considerando que podemos deixar  $f$  pequeno o suficiente, temos:

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{x}^\nu \quad (\text{a.24})$$

com (a.24) sendo também infinitesimal, obtemos:

$$\begin{aligned} d\xi^\nu &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \bar{\xi}^\mu + \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{\xi}^\mu \\ \Rightarrow d\xi^\rho &= \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\mu} \bar{\xi}^\mu d\bar{x}^\nu + \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} d\bar{\xi}^\mu \end{aligned} \quad (\text{a.25})$$

Por (a.25) é possível afirmar que:

O diferencial de um vetor não é um vetor

Na verdade existe uma condição em que  $d\xi^\rho$  seja vetor, quando  $\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu} = 0$ , e isso aplica por exemplo em um sistema euclidiano ou lorentziano. Para estudar o vetor em que ele conserve seu ângulo com a superfície, que não necessariamente é plana, utilizamos o **Transporte Paralelo**. Percorrendo uma distância  $dx^\mu$  do ponto inicial  $dx^i$ , o vetor  $\xi^\mu$  depois de transportado por um  $dx^\mu$  se dá na forma  $\xi^\mu + d\xi^\mu$  se dá na forma  $\xi^\mu + \delta\xi^\mu$ , e o vetor que foi apenas arrastado se torna  $\xi^\mu + d\xi^\mu$ . Portanto essa diferença é dada por:

$$D\xi^\mu = (\xi^\mu + d\xi^\mu) - (\xi^\mu + \delta\xi^\mu) = d\xi^\mu - \delta\xi^\mu \quad (\text{a.26})$$

Sendo  $D\xi^\mu$  um vetor contravariante, a lei de transformação (a.19) deve valer para este caso também:

$$D\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{D}\xi^\nu \quad (\text{a.27})$$

E isso só será possível se  $\delta\xi^i$  tiver um termo que cancele  $\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu} \bar{\xi}^\mu d\bar{x}^\nu$  presente em  $d\xi$ . Como esse termo é linear tanto para  $\bar{\xi}^\mu$  quanto para  $d\bar{x}^\mu$ ,  $\delta\xi^\mu$  deve haver uma expressão:

$$\delta\xi^\rho = -\Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi^\mu dx^\nu \quad (\text{a.28})$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  é chamado de conexão e é definido através de sua lei de transformação que garante (a.27). Então no sistema tempo-espaco plano discutido acima,  $\delta\xi^\mu = 0 \Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0$ , pois  $D\xi^\mu = d\xi^\mu$ , ou seja, o transporte paralelo se mantém sem nenhuma alteração do vetor em relação ao ponto anterior.

Reescrevendo (a.26) substituindo (a.28):

$$D\xi^\mu = d\xi^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \xi^\rho dx^\nu \quad (\text{a.29})$$

e podemos então determinar a lei de transformação de (a.29) como:

$$D\xi^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{D}\xi^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} (d\bar{\xi}^\nu + \Gamma_{\rho\alpha}^\nu \bar{\xi}^\alpha d\bar{x}^\rho) \quad (\text{a.30})$$

ou

$$d\xi^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\rho dx^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{\xi}^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \Gamma_{\rho\alpha}^\nu \bar{\xi}^\alpha d\bar{x}^\rho \quad (\text{a.31})$$

Aplicando a lei de transformação, vemos que:

$$\left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{\xi}^\alpha + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\rho \partial \bar{x}^\alpha} \bar{\xi}^\alpha d\bar{x}^\rho \right) + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \left( \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\xi}^\alpha \right) \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} d\bar{x}^\beta \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} d\bar{\xi}^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\nu \bar{\xi}^\alpha d\bar{x}^\rho \quad (\text{a.32})$$

Trocando os índices mudos  $\rho$  e  $\beta$ , temos:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\rho \partial \bar{x}^\alpha} \bar{\xi}^\alpha d\bar{x}^\rho + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\xi}^\alpha \right) \left( \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho} d\bar{x}^\rho \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\nu \bar{\xi}^\alpha d\bar{x}^\rho \quad (\text{a.33})$$

sendo  $\bar{\xi}^\alpha$  e  $d\bar{x}^\rho$  evidente em todos os termos;

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\rho \partial \bar{x}^\alpha} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{\Gamma}_{\rho\alpha}^\nu \quad (\text{a.34})$$

Aplicando agora a inversa da matriz de transformação de coordenadas:

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}\right)^{-1} = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \quad (\text{a.35})$$

Isolamos  $\bar{\Gamma}$ :

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\rho \partial \bar{x}^\alpha} + \left(\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right) \Gamma_{\nu\beta}^\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho} = \left(\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\nu \quad (\text{a.36})$$

e finalmente temos a lei de transformação da conexão

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\sigma = \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\rho} \Gamma_{\nu\beta}^\mu + \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\alpha}} \quad (\text{a.37})$$

Interessante observar que na lei de transformação da conexão é diferente de um tensor, já que há um termo independente, logo a conexão  $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma$  não é um tensor.

Reescrevendo agora

$$d\xi^\mu = \partial_\nu \xi^\mu dx^\nu \quad (\text{a.38})$$

que não é a lei de transformação, podemos substituir em  $D\xi^\mu$ :

$$D\xi^\mu = \partial_\nu \xi^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu dx^\nu = \left(\partial\xi^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\rho\right) dx^\nu \quad (\text{a.39})$$

ou

$$\frac{D\xi^\mu}{dx^\nu} = \partial_\nu \xi^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\rho = \nabla_\nu \xi^\rho \quad (\text{a.40})$$

que é definida como derivada covariante de  $\xi^\rho$ . O primeiro termo é uma derivada ordinária  $\partial_\nu \xi^\mu$ , e o segundo termo é a contração de  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  com  $\xi^\rho$ .

Para obter a derivada covariante de um vetor covariante  $\nabla_\nu \xi_\mu$ , analisamos o deslocamento paralelo do vetor covariante (arbitrário)  $\xi_\mu$ . Lembrando que:

$$\xi^2 = g_{\mu\rho} \xi^\mu \xi^\rho = \xi^\mu \xi_\mu \quad (\text{a.41})$$

sendo  $\xi^2$  um escalar e constante. dessa forma, o operador diferença  $\delta$  atuando em  $\xi^2$  é

$$\delta(\xi^2) = 0. \quad (\text{a.42})$$

Devido a linearidade de  $\delta$ , aplicamos a regra do produto em (a.42)

$$\delta(\xi^2) = \delta\xi^\mu \xi_\mu + \xi^\mu \delta\xi_\mu$$

ou

$$(\delta\xi^\mu) \xi_\mu = -\xi^\mu \delta\xi_\mu \quad (\text{a.43})$$

e isso mostra que:

$$\xi^\mu (\delta\xi_\mu) = -(\Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\rho dz^\nu) \xi_\mu = \xi_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\rho dx^\nu = \xi_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi^\mu dx^\nu \Rightarrow \delta\xi_\mu = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \xi_\rho dx^\nu \quad (\text{a.44})$$

Colocando em  $D\xi_\mu$ , temos:

$$D\xi_\mu = d\xi_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho dx^\nu \quad (\text{a.45})$$

Então a derivada covariante  $\nabla_\nu \xi_\mu$  é:

$$D\xi_\mu = s\xi_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho dx^\nu = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho dx^\nu = (\nabla_\nu \xi_\mu) \quad (\text{a.46})$$

Comparando as derivadas covariantes de um  $V$  covariante e  $V$  contravariante:

$$\nabla_\nu \xi_\mu = \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho \quad (\text{a.47})$$

e

$$\nabla_\nu \xi^\mu = \partial_\nu \xi^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu \xi^\rho \quad (\text{a.48})$$

A partir deste momento, usaremos ao invés de  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  apenas como  $\partial_\mu$ . Com isso, é fácil generalizar  $\nabla_\nu$  para tensores de ordem maior;

$$\nabla_\sigma \xi^{\mu\nu} = \partial_\sigma \xi^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \xi^{\sigma\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu \xi^{\mu\rho} \quad (\text{a.49})$$

e

$$\nabla_\sigma \xi_{\mu\nu} = \partial_\sigma \xi_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \xi_{\rho\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \xi_{\rho\mu} \quad (\text{a.50})$$

$D\xi^\mu$  é por definição um vetor contravariante, então ele pode ter o índice abaixado pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$

$$D\xi_\mu = D(g_{\mu\nu} \xi^\nu) \quad (\text{a.51})$$

Se considerarmos que o operador de derivação  $D$  é linear, podemos então aplicar a regra de derivação do produto em a.51:

$$D(g_{\mu\nu} \xi^\nu) = (Dg_{\mu\nu}) \xi^\nu + g_{\mu\nu} D\xi^\nu \quad (\text{a.52})$$

Se compararmos com  $D\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu$ , podemos observar que:

$$\boxed{Dg_{\mu\nu} = 0} \quad (\text{metricidade}) \quad (\text{a.53})$$

Para analisar a derivada covariante, reescrevemos a.53 como:

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = Dg_{\mu\nu} dx^\sigma = 0 \rightarrow \boxed{\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0} \quad (\text{metricidade}) \quad (\text{a.54})$$

Com isto, identificamos o **Postulado da Metricidade** na Relatividade Geral. Pela metricidade, podemos explorar como os Símbolos de Cristoffel atuam na métrica, já que ambos são simétricos. Então pelo postulado da metricidade temos que:

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho g_{\rho\mu} = 0 \quad (\text{a.55})$$



Isso permite a troca cíclica dos índices não contraídas:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\sigma} g_{\mu\nu} &= \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} g_{\rho\mu} = 0 \\
 \nabla_{\nu} g_{\mu\sigma} &= \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} g_{\rho\mu} = 0 \\
 \nabla_{\mu} g_{\sigma\nu} &= \partial_{\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} g_{\rho\sigma} = 0
 \end{aligned}
 \tag{a.56}$$

Multiplicando a primeira equação por  $(1/2)$  e as duas outras por  $-(1/2)$ , somando e multiplicando por  $g^{\rho\sigma}$  teremos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = g^{\sigma\rho} \frac{1}{2} (\partial_{\nu} g_{\sigma\mu} + \partial_{\mu} g_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}).
 \tag{a.57}$$

Dessa forma, a Conexão ou os Símbolos de Christoffel são mais usáveis nos cálculos da Relatividade Geral.

## APÊNDICE B – EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

A definição de Geodésica é a menor distância entre dois pontos. Imagina-se que esta será uma reta, mas este fato nem sempre é verdade, como por exemplo a superfície da Terra, que trata-se de sistemas não Euclidianos. Sabe-se também que em objetos muito grandes, como estrelas, o tempo-espaço se distorce, tendo uma curvatura, que transforma em um espaço não Euclidiano.

Para determinar qual a menor distância entre dois pontos em um espaço riemanniano, devemos recorrer a seguinte variação:

$$\delta \int ds = 0 \quad (\text{b.1})$$

onde  $ds$  é a raiz quadrada do elemento de linha  $ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ . Recorrendo a equação de Euler-Lagrange, vemos que a partir de um funcional:

$$I = \int L(x, \dot{x}, t) dx, \quad (\text{b.2})$$

$I$  é minimizado de tal forma que:

$$\delta I = 0 \quad (\text{b.3})$$

que é o princípio de mínima ação. Dessa forma, sendo  $L = L(x, \dot{x}, t)$  temos:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (\text{b.4})$$

Reescrevendo a Eq. (b.1), temos:

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} ds = 0 \quad (\text{b.5})$$

para não sobrecarregar notações, utilizaremos  $\frac{dx^\mu}{ds} = \dot{x}^\mu$ . Logo, notamos que  $\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = L$ , mas é complicado trabalhar com esta equação, então podemos estudar um funcional  $F$  que pode ser implícito à  $L$ , dessa forma, assumindo que  $\frac{\partial L}{\partial F} \neq 0$ , derivando  $L(F)$ , temos:

$$\left( \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial F} \right) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} + \left( \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \frac{\partial L}{\partial F} - \frac{\partial L}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\text{b.6})$$

Podemos usar que  $\frac{d}{ds} = \frac{dL}{ds} \frac{d}{dL}$  além de deixar em evidência  $\frac{\partial L}{\partial F}$ :

$$\frac{dL}{ds} \left( \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial F} \right) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} + \frac{\partial L}{\partial F} \left( \frac{d}{ds} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right) = 0 \quad (\text{b.7})$$

Pela Eq. (b.5) percebemos que  $L = \sqrt{\frac{ds^2}{ds^2}} = 1$ , isso implica que a primeira parcela da Eq. (b.7) é nula, então a lagrangeana se resume a parte entre parênteses, porque  $\frac{\partial L}{\partial F}$  é não nula. Neste caso, podemos fazer:

$$F = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu. \quad (\text{b.8})$$

Aplicando a lagrangeana em  $F$  temos:

$$2g_{\rho\mu}\ddot{x}^\mu + 2\partial_\mu g_{\rho\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \partial_\rho g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \quad (\text{b.9})$$

Na segunda parcela da conta, podemos dividir em duas metades e renomear índices mudos:

$$2g_{\rho\mu}\ddot{x}^\mu + \partial_\mu g_{\rho\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \partial_\nu g_{\rho\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu - \partial_\rho g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \quad (\text{b.10})$$

Dividindo a equação (b.10) por 2 e multiplicando por  $g^{\rho\lambda}$ ,

$$\delta_\mu^\lambda\ddot{x}^\mu + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \quad (\text{b.11})$$

onde reconhecemos a Eq.(a.57), e voltando de  $\ddot{x}^\lambda = \frac{d^2x^\lambda}{ds^2}$  e  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ , finalmente obtemos a equação da Geodésica.

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (\text{b.12})$$

## APÊNDICE C – TENSOR DE CURVATURA

Se um vetor  $\xi^\mu$  é transportado paralelamente ao longo de uma geodésica, seu ângulo com a tangente da curva  $u^\mu$ . Com isso, o deslocamento do transporte paralelo em uma curva infinitesimal fechada  $\gamma$  é dado por:

$$\Delta\xi^\mu = \oint_\gamma \delta\xi^\mu \quad (\text{c.1})$$

Substituindo a equação (a.29) em (c.1), e usando a métrica para abaixar o índice de  $A$  temos:

$$\Delta\xi_\mu = \oint_\gamma \delta\xi_\mu = \oint_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho dx^\nu \quad (\text{c.2})$$

A partir da equação (c.2) é possível empregar o Teorema de Stokes com a generalização quadridimensional;

$$\oint_\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho dx^\nu = \frac{1}{2} \int_S [\partial_\alpha (\Gamma_{\beta\mu}^\rho \xi_\rho) - \partial_\beta (\Gamma_{\alpha\mu}^\rho \xi_\rho)] da^{\alpha\beta} \quad (\text{c.3})$$

Lembrando que  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  e  $\xi_\rho$  são funções para um ponto, podemos usar a regra da derivada na multiplicação:

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} \int_S [(\partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho) \xi_\rho + \Gamma_{\beta\mu}^\rho \partial_\alpha \xi_\rho - \partial_\beta (\Gamma_{\alpha\mu}^\rho) \xi_\rho - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \partial_\beta \xi_\rho] da^{\alpha\beta} \quad (\text{c.4})$$

Reorganizando a (c.4);

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} \int_S [(\partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho) \xi_\rho + \Gamma_{\beta\mu}^\rho \partial_\alpha \xi_\rho - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho \partial_\beta \xi_\rho] da^{\alpha\beta} \quad (\text{c.5})$$

Como a mudança de  $\xi_\mu$  é devido a um transporte paralelo sobre um caminho geodésico que compõe  $\gamma$ , é esperado que a derivada covariante se anule, ou seja:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \xi_\rho = \partial_\mu \xi_\nu \quad (\text{c.6})$$

Usando então (c.6) em (c.5) encontramos:

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} \int_S [(\partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho) \xi_\rho + \Gamma_{\beta\mu}^\rho (\Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \xi_\lambda) - \Gamma_{\alpha\mu}^\rho (\Gamma_{\beta\rho}^\lambda \xi_\lambda)] da^{\alpha\beta} \quad (\text{c.7})$$

Renomeando os índices mudos:

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} \int_S [\partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\rho] \xi_\rho da^{\alpha\beta} \quad (\text{c.8})$$

ou:

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} \int_S R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho \xi_\rho da^{\alpha\beta}, \quad (\text{c.9})$$

onde usamos a definição:

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\rho + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\rho. \quad (\text{Tensor de Riemman}) \quad (\text{c.10})$$

Como não foi levado em conta que o contorno  $\gamma$  é um caminho infinitesimal, se reflete no cálculo da integral na Eq. c.8, que neste caso, a área da superfície  $S$  limitada em  $\gamma$  também é infinitesimal. Então se calcular a integral, temos:

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} \int_S R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho \xi_\rho da^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho \xi_\rho \int_S da^{\alpha\beta} \quad (S \text{ infinitesimal}) \quad (\text{c.11})$$

ou

$$\Delta\xi_\mu = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho \xi_\rho \Delta a^{\alpha\beta}, \quad (\text{c.12})$$

onde

$$\Delta a^{\alpha\beta} = \int_S da^{\alpha\beta} \quad (\text{c.13})$$

é a área da superfície infinitesimal de  $S$  de borda  $\gamma$ .

O tensor de curvatura  $R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho$  dá a medida da variação  $\Delta\xi_\mu$  sofrido pelo vetor  $\xi_\mu$  sob o transporte paralelo ao longo da curva geodésica fechada de uma superfície curva de área  $\Delta a^{\alpha\beta}$ .

Um método alternativo para o tensor de Riemman é calcular o comutador de duas derivadas covariantes:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \xi^\mu = (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) \xi^\mu = \nabla_\alpha (\nabla_\beta \xi^\mu) - \nabla_\beta (\nabla_\alpha \xi^\mu) = R_{\alpha\beta\rho}{}^\mu \xi^\rho. \quad (\text{c.14})$$

O Tensor de Riemman, que como vimos depende de  $\Gamma$  e sua derivada  $\partial\Gamma$ , quando aplicado em um espaço plano de Minkowsky, onde a métrica é constante, fica evidente que:

$$(\text{espaço-tempo plano}) \implies R_{\alpha\beta\mu}{}^\rho = 0. \quad (\text{c.15})$$

Como todo tensor, o Tensor de Riemman também pode ter os índices abaixados e levantados quando se aplica o tensor métrico, que por uma conveniência iremos abaixar o seu índice:

$$R_{\alpha\beta\sigma\nu} = g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\sigma}{}^\mu \quad (\text{c.16})$$

Mas este abaixamento implicaria também nos Símbolos de Christoffel, que não é um tensor, mas pela definição dada pela Eq. (a.57) vemos que existe um tensor métrico multiplicando todos os elementos, dessa forma, é possível apenas abaixar o índice dos Símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\alpha\beta\nu} = g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu, \quad (\text{c.17})$$

mas os índices inferiores de  $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu$  não podem ser levantados por  $g^{\alpha\nu}$ .

O tensor de curvatura satisfaz as seguintes propriedades:

1. O tensor de Riemann é antissimétrico no último par de índices:

$$R_{\alpha\beta\sigma\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\sigma} \quad (\text{c.18})$$

2. o tensor de Riemann é antissimétrico no primeiro par de índices:

$$R_{\alpha\beta\sigma\nu} = -R_{\beta\alpha\nu\sigma} \quad (\text{c.19})$$

3. O tensor de Riemann  $R_{\alpha\beta\sigma\nu}$  é simétrico pela troca do primeiro par com o segundo par de índices:

$$R_{\alpha\beta\sigma\nu} = R_{\nu\sigma\alpha\beta} \quad (\text{c.20})$$

4. A soma da permutação cíclica dos índices inferiores de  $R_{\alpha\beta\sigma}^{\mu}$  é nula:

$$R_{\alpha\beta\sigma}^{\mu} + R_{\sigma\alpha\beta}^{\mu} + R_{\beta\sigma\alpha}^{\mu} = 0 \quad (\text{c.21})$$

5. Vale a identidade de Bianchi:

$$\nabla_{\rho} R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + \nabla_{\nu} R_{\rho\mu}^{\alpha\beta} + \nabla_{\mu} R_{\nu\rho}^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{c.22})$$

## APÊNDICE D – TENSOR DE RICCI E O ESCALAR DE CURVATURA

O tensor de Ricci é obtido pela contração de índices do tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} \quad (\text{d.1})$$

Já o escalar de curvatura é o traço do tensor de Ricci:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}{}^{\mu} = R \quad (\text{d.2})$$

Pelas propriedades de simetria e antissimetria do tensor de curvatura, podemos observar que:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 = g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{d.3})$$

limitando o número de contrações não-nulas para o tensor de Riemann. Dessa forma, é possível chegar a conclusão que o tensor de Ricci é um tensor simétrico de ordem 2:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (\text{d.4})$$

De forma mais clara:

$$R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} \quad (\text{d.5})$$

Para uma conclusão mais rigorosa, devemos mostrar que os índices  $\mu$  e  $\nu$  são simétricos para que satisfaça a simetria dos índices do tensor de Ricci. O terceiro e primeiro termo, a simetria é mais evidente, no quarto termo, precisamos fazer uma renomeação adequada de índices mudos:

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} = \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\rho}, \quad (\text{d.6})$$

Agora falta apenas o segundo termo, e para isso precisamos iniciar com a definição dos símbolos de Christoffel dada na Eq. (a.57) e com alguma manipulação de índices chegamos à:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(\partial_{\alpha}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\alpha} - \partial_{\rho}g_{\nu\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}\partial_{\rho}g_{\nu\alpha} + \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\nu}g_{\rho\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\rho}g_{\alpha\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\rho}g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\nu}g_{\rho\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\rho}g_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (\text{d.7})$$

Dessa forma, o primeiro e terceiro termo se cancelam, sobrando então:

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\partial_{\nu}g_{\alpha\rho} \quad (\text{d.8})$$

Precisamos ainda de uma relação entre a Eq.(d.7) e a simetria dos índices da Eq. (d.8), então lançamos mão do determinante da métrica  $g$ . Como o tensor métrico  $\mathbf{g}$  é essencialmente uma matriz  $4 \times 4$ , podemos encontrar seu determinante a partir da matriz de cofator:

$$\mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{g}} \mathbf{C}^T \quad (\text{d.9})$$

onde  $\mathbf{C}$  é a matriz de cofatores, que reorganizando, pode ser escrita como:

$$g = \det \mathbf{g} = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} c_{\mu\nu}, \quad (\text{d.10})$$

então derivando a Eq.(d.10) com respeito a um elemento genérico  $g_{\alpha\beta}$ , temos que:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial g_{\alpha\beta}} \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} c_{\mu\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} c_{\mu\nu} = c_{\alpha\beta}. \quad (\text{d.11})$$

O motivo do cofator  $c_{\mu\nu}$  não ser afetado pela derivada é que não contém qualquer elemento da matriz  $\mathbf{g}$ . Agora, a partir da Eq. (d.11) torna viável calcular a derivada de  $g$  com respeito à coordenada  $x^\rho$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x^\rho} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = c_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}, \quad (\text{d.12})$$

substituindo em uma equação equivalente à Eq. (d.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{-1} = \frac{1}{g} \mathbf{C}^T \quad \text{equivale à} \quad g_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{g} c_{\mu\nu} \\ c_{\mu\nu} = g g_{\mu\nu}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{d.13})$$

substituindo a Eq. (d.13) na Eq. (d.12):

$$\frac{\partial g}{\partial x^\rho} = g g_{\mu\nu}^{-1} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}. \quad (\text{d.14})$$

Mas lembramos que  $g_{\mu\nu}^{-1} = g^{\mu\nu}$ , então:

$$\partial_\rho g = g g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} \quad (\text{d.15})$$

Sendo o traço de  $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$  e aplicando a derivada no traço, observamos:

$$\partial_\rho g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = (\partial_\rho g_{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\partial) \rho g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{d.16})$$

ou seja:

$$g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu} \quad (\text{d.17})$$

substituindo a Eq. (d.17) na Eq. (d.15):

$$\partial_\rho g = -g g_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu}. \quad (\text{d.18})$$



Como sabemos agora a derivar  $g$  em relação à coordenada  $x^\rho$ , podemos determinar a derivada de  $\sqrt{-g}$ :

$$\partial_\rho \sqrt{-g} = \partial_\rho (-g)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (-g)^{-\frac{1}{2}} \partial_\rho (-g) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho g, \quad (\text{d.19})$$

substituindo (d.19) em (d.18):

$$\partial_\rho \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu} \quad (\text{d.20})$$

Rearranjando (d.20):

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \sqrt{-g} \quad (\text{d.21})$$

que identificamos com a Eq. (d.9) e finalmente desta forma fica evidente que o tensor de Ricci é simétrico.

## APÊNDICE E – O TENSOR DE EINSTEIN

A partir da identidade de Bianchi, (c.21), contrairemos os índices  $\beta$  e  $\mu$ :

$$\nabla_\rho R_{\mu\nu}{}^{\alpha\mu} + \nabla_\nu R_{\rho\mu}{}^{\alpha\mu} + \nabla_\mu R_{\nu\rho}{}^{\alpha\mu} = 0 \quad (\text{e.1})$$

e identificamos que com a soma de índices, o primeiro termo transforma no tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu}{}^{\alpha\mu} = R_\nu^\alpha \quad (\text{e.2})$$

e pela antissimetria, o segundo termo também se transforma no tensor de Ricci:

$$R_{\rho\mu}{}^{\alpha\mu} = -R_{\mu\rho}{}^{\alpha\mu} = -R_\rho^\alpha \quad (\text{e.3})$$

Então a identidade de Bianchi torna:

$$\nabla_\rho R_\nu^\alpha - \nabla_\nu R_\rho^\alpha + \nabla_\mu R_{\nu\rho}{}^{\alpha\mu} = 0 \quad (\text{e.4})$$

Com uma nova contração entre os índices  $\nu$  e  $\alpha$ , temos:

$$\nabla_\rho R_\nu^\nu - \nabla_\nu R_\rho^\nu + \nabla_\mu R_{\nu\rho}{}^{\nu\mu} = 0 \quad (\text{e.5})$$

e identificamos o escalar de curvatura no primeiro termo e um novo tensor de Ricci no último termo:

$$\nabla_\rho R - \nabla_\nu R_\rho^\nu - \nabla_\mu R_\rho^\mu = 0 \quad (\text{e.6})$$

Substituindo os índices mudos  $\mu$  e  $\nu$  por  $\sigma$ , e introduzindo o fator  $\delta_\rho^\sigma$ , temos:

$$\begin{aligned} \delta_\sigma^\rho \nabla_\sigma R - \nabla_\sigma R_\rho^\sigma - \nabla_\sigma R_\rho^\sigma &= \\ \nabla_\sigma R_\rho^\sigma + \nabla_\sigma \left( -\frac{1}{2} \delta_\rho^\sigma R \right) &= \\ \nabla_\sigma \left( R_\rho^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\rho^\sigma R \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{e.7})$$

E entre parênteses, obtemos o tensor de Einstein  $G_\rho^\sigma$ , e como foi construído pela identidade de Bianchi, notamos que aplicado a derivada covariante é zero, ou seja, o tensor de Einstein é covariantemente conservado:

$$\boxed{G_\rho^\sigma = R_\rho^\sigma - \frac{1}{2} \delta_\rho^\sigma R} \quad (\text{e.8})$$

e pela definição acima, aplicando na Eq. (e.7):

$$\boxed{\nabla_\sigma G_\rho^\sigma = 0} \quad (\text{e.9})$$

Esta equação é chamada de **identidade de Bianchi contraída**.

Como  $G_\rho^\sigma$  é um tensor, podemos abaixar e levantar seus índices usando a métrica:

$$G_{\rho\mu} = g_{\sigma\mu} G_\rho^\sigma \quad (\text{e.10})$$

além de que na sua definição é usado o tensor de Ricci, implica que  $G_{\rho\mu}$  é simétrico.

## APÊNDICE F – O TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Tendo em vista a identidade de Bianchi contraída, é possível imaginar que haja um tensor de mesma ordem que na sua derivada covariante também se anule, ou seja, é também um tensor que é covariantemente conservado:

$$\nabla_{\sigma} G_{\rho}^{\sigma} = \nabla_{\sigma} T_{\rho}^{\sigma} = 0 \quad (\text{f.1})$$

Dessa forma, esses objetos podem se diferir no máximo por uma constante multiplicativa  $\chi$ :

$$G_{\rho}^{\sigma} = \chi T_{\rho}^{\sigma} \quad (\text{f.2})$$

Usando a métrica para abaixar os índices:

$$g_{\mu\sigma} G_{\rho}^{\sigma} = \chi g_{\mu\sigma} T_{\rho}^{\sigma} \implies \boxed{G_{\mu\rho} = \chi T_{\mu\rho}} \quad (\text{f.3})$$

Com esta construção, a equação em destaque são as **Equações de Einstein para a gravitação**, se  $T_{\mu\rho}$  for o tensor energia-momento.

## APÊNDICE G – LIMITE DE CAMPO FRACO

Quando estamos na ausência de fonte gravitacional, o tensor de Einstein consegue descrever a gravitação. Mas como tende ser uma teoria generalista, a Relatividade Geral precisa encapsular a Mecânica Newtoniana, ou seja, descrever a gravitação que permeia por exemplo o nosso sistema solar, que dá uma pequena curvatura no espaço-tempo. Dessa forma, podemos resolver as equações de Einstein para o campo fraco, condizente com a Mecânica Newtoniana.

Sabemos que:

$$R_{\mu\nu} \propto \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \propto \partial_\alpha^2 g_{\mu\nu}. \quad (\text{g.1})$$

Dessa forma, podemos supor que a métrica faz o papel do potencial gravitacional  $\Phi$ , já que na Equação de Poisson temos  $\nabla^2 \Phi$ . Como descrito acima, no limite do campo fraco podemos supor uma pequena perturbação na métrica de Minkowski, ou seja:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{g.2})$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski com assinatura  $(-, +, +, +)$  e  $h_{\mu\nu}$  é a perturbação.

Supondo uma partícula com  $v \ll c$  em um campo fraco, o elemento de linha  $ds^2$  é:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \approx \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ ds^2 &= -c^2 dt^2 + \underbrace{\left( \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)}_{\vec{v}} dt^2, \end{aligned} \quad (\text{g.3})$$

ou seja, para o campo fraco, podemos fazer a aproximação de  $ds^2 \approx c^2 dt^2$ .

Resolvendo a geodésica para o campo fraco, Eq. (b.12), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 x^\lambda}{c^2 dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{cdt} \frac{dx^\nu}{cdt} &= 0, \\ \frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{g.4})$$

Como as combinações espaciais, ou seja, os índices (1,2,3) são velocidades baixas, o segundo termo é muito pequeno, então as coordenadas que devem ser estudadas são as temporais:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{00}^\lambda \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} = 0 \implies \frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{00}^\lambda c^2 \left( \frac{dt}{dt} \right)^2 = 0 \implies \frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{00}^\lambda c^2 = 0. \quad (\text{g.5})$$

Então resolvendo a Eq. (a.57) para  $\Gamma_{00}^\lambda$ :

$$\Gamma_{00}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_0 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{0\rho} - \partial_\rho g_{00}), \quad (\text{g.6})$$

então supomos que o campo é estático, logo:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{g.7})$$

Por causa da derivada temporal ser nula, seguiremos com índices latinos para representar coordenadas espaciais ( $k$  ao invés de  $\rho$ ), logo:

$$\Gamma_{00}^\lambda \approx -\frac{1}{2} g^{\lambda k} \partial_k g_{00}. \quad (\text{g.8})$$

Incorporando a métrica do campo fraco:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\lambda &\approx -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda k} + h^{\lambda k}) (h_{00} \partial_k \eta_{00} + \eta_{00} \partial_k h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda k} + h^{\lambda k}) (\partial_k h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} (\eta^{\lambda k} \partial_k h_{00} - h^{\lambda k} \partial_k h_{00}). \end{aligned} \quad (\text{g.9})$$

Pelo fato de que  $|h^{\mu\nu}| \ll 1$ , o segundo termo é desprezado e chegamos a:

$$\Gamma_{00}^\mu \approx -\frac{1}{2} (\eta^{\mu k} \partial_k h_{00}). \quad (\text{g.10})$$

Como estamos lidando com a métrica de Minkowski no sistema cartesiano, ou seja:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{g.11})$$

ou seja, é não nulo apenas na diagonal, a Eq. (g.11) se resumem às equações:

$$\Gamma_{00}^0 \approx -\frac{1}{2} (\eta^{00} \partial_0 h_{00}) \quad (\text{g.12})$$

e

$$\Gamma_{00}^j \approx -\frac{1}{2} (\eta^{jk} \partial_k h_{00}). \quad (\text{g.13})$$

Pela Eq. (g.7), a Eq. (g.12) também se anula. Substituindo agora a Eq. (g.13) na Eq. (g.5), temos:

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} - \frac{1}{2} c^2 \eta^{jk} \partial_k h_{00} = 0. \quad (\text{g.14})$$

Para  $j = 1$ :

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \eta^{11} \partial_1 h_{00} = \frac{d^2 x^1}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_1 h_{00} = 0. \quad (\text{g.15})$$

Similarmente para  $j = 2, 3$ :

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_2 h_{00} = 0. \quad (\text{g.16})$$

$$\frac{d^2 x^3}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_3 h_{00} = 0. \quad (\text{g.17})$$

Dessa forma, explicitando a soma temos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 x^1}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_1 h_{00} \right) \hat{i} + \left( \frac{d^2 x^2}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_2 h_{00} \right) \hat{j} + \left( \frac{d^2 x^3}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \partial_3 h_{00} \right) \hat{k} &= 0 \\ \left( \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \nabla h_{00} \frac{c^2}{2} \right) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\nabla h_{00}}{2} c^2}. \end{aligned} \quad (\text{g.18})$$

Comparando com a equação de campo gravitacional Newtoniana, numa fonte de simetria esférica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{c}}{dt^2} &= \vec{g} = -\nabla \Phi \text{ e} \\ \Phi &= 4\pi G \rho, \end{aligned} \quad (\text{g.19})$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa e  $G$  é a constante da gravitação universal.

Então chegamos a conclusão de que:

$$h_{00} = -\frac{2\Phi}{c^2} = -\frac{8\pi GM}{rc^2}, \quad (\text{g.20})$$

ou seja:

$$\boxed{g_{00} \approx -\left(1 + \frac{8\pi G\rho}{c^2}\right)}. \quad (\text{g.21})$$

Para completar o argumento que as equações de Einstein são válidas em uma aproximação newtoniana, utilizaremos a métrica de campo fraco nas próprias equações de Einstein (f.3). Para calcular o tensor de Ricci o escalar e tensor de curvatura, substituímos a Eq. (g.13) na Eq. (d.5):

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_\alpha \Gamma_{00}^\alpha - \partial_0 \Gamma_{\alpha 0}^\alpha + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha 0}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\alpha \\ R_{00} &= \partial_j \Gamma_{00}^j - \partial_0 \Gamma_{j0}^j + \Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^j - \Gamma_{j0}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^j. \end{aligned} \quad (\text{g.22})$$

Como  $\Gamma$  é expresso em termos de  $h_{\mu\nu}$ , o produto de  $\Gamma\Gamma$  é desprezado e a derivada temporal é nula, por se tratar de um campo estático, podemos aproximar para:

$$R_{00} \approx \partial_j \Gamma_{00}^j. \quad (\text{g.23})$$

Substituindo a Eq. (g.13) na Eq. (g.22):

$$\begin{aligned} R_{00} &\approx \partial_j \left( -\frac{1}{2} \eta^{jk} \partial_k h_{00} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \eta^{jk} \partial_j \partial_k h_{00} \right) \\ &= -\frac{\nabla^2}{2} h_{00}. \end{aligned} \quad (\text{g.24})$$

Extraindo o traço da Eq. (f.3) e substituindo de volta nas equações de Einstein, é possível encontrar o tensor de Ricci isolado do lado esquerdo:

---

$$R_{\mu\nu} = \chi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (\text{g.25})$$

onde o tensor  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia momento para a poeira, com isso [43], escolhendo os índices  $\mu = 0$  e  $\nu = 0$  chegamos à:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \chi \rho c^2. \quad (\text{g.26})$$

Igualando agora a Eq. (g.26) com a Eq. (g.22), vemos que:

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (\text{g.27})$$

Com este resultado chegamos às equações de Einstein com suas constantes explícitas:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (\text{g.28})$$

## TENSOR DE RICCI NA APROXIMAÇÃO DE ONDAS CURTAS

Recordamos a Eq. (2.7) e aplicaremos a métrica perturbada:

$$\begin{aligned} \nabla_\kappa \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_\kappa \nabla_\mu h + \nabla_\kappa \nabla_\lambda h_\mu^\lambda - \nabla_\kappa \nabla_\lambda h_\kappa^\lambda + \nabla_\kappa \left( -h^{\lambda\rho} + h^{\lambda\alpha} h_\lambda^\rho - h^{\lambda\alpha} h_\lambda^\beta h_{\beta\gamma} g^{\beta\rho} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \nabla_\lambda h_{\rho\mu} + \nabla_\mu g_{\rho\lambda} - \nabla_\rho h_{\mu\lambda} \right) \right] \end{aligned} \tag{g.29}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda &= \frac{1}{2} \left[ \nabla_\lambda \nabla_\kappa h_\mu^\lambda + \nabla_\lambda \nabla_\mu h_\kappa^\lambda - \square h_\kappa^\lambda + \nabla_\lambda \left( -h^{\lambda\rho} + h^{\lambda\alpha} h_\alpha^\rho - h^{\lambda\alpha} h_\alpha^\beta h_{\beta\gamma} g^{\beta\rho} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \nabla_\kappa h_{\rho\mu} + \nabla_\mu g_{\rho\kappa} - \nabla_\rho h_{\mu\kappa} \right) \right] \end{aligned} \tag{g.30}$$

Juntando e rearranjando os termos, temos:

$$\delta R_{\mu\kappa} = \nabla_\kappa \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda = \frac{1}{2} \underbrace{\left( -\square h_{\mu\kappa} + \nabla_\kappa \nabla_\mu h - \nabla^\alpha \nabla_\kappa h_{\mu\lambda} - \nabla^\lambda \nabla_\mu h_{\lambda\kappa} \right)}_{R_{\mu\kappa}^{(1)}} + h(O^2) \tag{g.31}$$

que está disposto na Eq. (4.7).