

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS**

**GUSTAVO BORGES VIEIRA**

**TEORIA QUALITATIVA E ESTABILIDADE DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS DE  
EQUAÇÕES DE ORDEM FRACIONÁRIA E UMA APLICAÇÃO EM UM MODELO  
SIR-SI PARA A DENGUE**

Alfenas/MG

2017

**GUSTAVO BORGES VIEIRA**

**TEORIA QUALITATIVA E ESTABILIDADE DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE ORDEM FRACIONÁRIA E UMA APLICAÇÃO EM UM MODELO SIR-SI PARA A DENGUE**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, área de concentração em Estatística Aplicada e Biometria da Universidade Federal de Alfenas, MG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre. Linha de Pesquisa: Modelagem Estatística e Estatística Computacional.

Orientador: Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos.

Coorientador: Prof. Dr. Evandro Monteiro.

Alfenas/MG

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Alfenas

Vieira, Gustavo Borges.

Teoria qualitativa e estabilidade de Lyapunov para sistemas de equações de ordem fracionária e uma aplicação em um modelo SIR-SI para a dengue. / Gustavo Borges Vieira. -- Alfenas/MG, 2017.  
133 f.

Orientador: José Paulo Carvalho dos Santos.  
Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) -  
Universidade Federal de Alfenas, 2017.  
Bibliografia.

1. Epidemiologia. 2. Equações diferenciais. 3. Liapunov, Funções de.  
I. Santos, José Paulo Carvalho dos. II. Título.

CDD-519



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
Universidade Federal de Alfenas / UNIFAL-MG  
Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria

Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700. Alfenas - MG CEP 37130-000  
Fone: (35) 3299-1392 (Secretaria) (35) 3299-1121(Coordenação)  
<https://www.unifal-mg.edu.br/ppgeab/>



**GUSTAVO BORGES VIEIRA**

**“TEORIA QUALITATIVA E ESTABILIDADE DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE ORDEM FRACIONÁRIA E UMA APLICAÇÃO EM UM MODELO SIR-SI PARA A DENGUE”**

A Banca Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Estatística Aplicada e Biometria pela Universidade Federal de Alfenas. Área de Concentração: Estatística Aplicada e Biometria

Aprovado em: 14 de fevereiro de 2017.

Prof. Dr. José Paulo Carvalho dos Santos

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: 

Prof. Dr. José Claudinei Ferreira

Instituição: UNIFAL-MG

Assinatura: 

Prof. Dr. Rubens de Figueiredo Camargo

Instituição: UNESP

Assinatura: 

*Dedico aos meus pais, Graça e  
Isaias, e a todos os professores.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus, pela minha vida e pela oportunidade de cursar o Mestrado e assim, com grande satisfação, concluir mais uma etapa da minha formação.

Aos meus pais, Graça e Isaias, por todo o amor e apoio incondicional e por acreditarem num dia melhor pela educação que sempre quiseram me oferecer.

Ao meu orientador, Prof. José Paulo, pela orientação, exemplo, dedicação, amizade, paciência e acima de tudo o empenho e conselhos que fizeram toda a diferença neste trabalho e no meu crescimento.

Ao meu coorientador, Prof. Evandro, por todos os esclarecimentos e sugestões e todos os professores do curso de Matemática-Licenciatura e do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria da Unifal-MG que contribuíram para mais esta etapa.

Aos professores membros da banca por terem aceito o convite.

Ao Prof. Nelson Teixeira, pelo apoio, ajuda e esclarecimentos com as simulações numéricas.

Ao meu amigo Joelson e sua família, que conheci durante a graduação e que também acompanhou de perto minha caminhada.

À minha amiga e companheira de estudos Renata, por toda a ajuda, conselhos e principalmente pela convivência nestes dois anos.

A todos os amigos, Isabela, Pórtya, Larissa, Pablo, Roger, Thais, Gisele, Cássia, Victor e Lais.

E não poderia faltar o agradecimento a todos os professores que tive durante toda a Educação Básica, sem dúvida, foram grandes exemplos que sempre me incentivaram.

## RESUMO

Neste trabalho fazemos o estudo da teoria de equações diferenciais fracionárias do ponto de vista qualitativo. Para isso, estudamos teoremas de existência, unicidade e prolongamento de soluções, teoria de comparação, teoria de estabilidade de Lyapunov para sistemas de ordem fracionárias e fazemos uma aplicação desses resultados. Fizemos uso da teoria desenvolvida para estudar um modelo matemático para a transmissão do vírus da Dengue via equações diferenciais com a derivada fracionária de Caputo, cujo o modelo está disponível na literatura. Desse modo, é fundamental a análise do comportamento assintótico, ou seja, o que acontece com as soluções quando faz-se o tempo tender para o infinito, na qual, utilizou-se a Estabilidade de Lyapunov. Seguiu-se uma linha numérica, na qual foram realizadas simulações para validação do modelo adotado e investigação da estabilidade assintótica global dos pontos de equilíbrio. Assim, foram considerados quatro valores como condições iniciais, cujas soluções convergem para os pontos de equilíbrio. Além disso, foi feito a comparação com uma simulação utilizando equações diferenciais ordinárias e constatou-se que as soluções do modelo de ordem fracionária tem menos oscilações por garantir um sistema de amortecimento, fazendo com que as soluções converjam em menor velocidade.

Palavras-chave: Epidemiologia. Modelagem Matemática. Equações Diferenciais Fracionárias. Teoria Qualitativa. Estabilidade de Lyapunov.

## ABSTRACT

This work is a study of the theory of fractional differential equations from the point of view qualitative. To this, we study theorems of existence, uniqueness and continuation of solutions, comparison theory, Lyapunov stability theory to fractional order systems and we apply these results. In recent years, study of fractional-order systems has attracted the attention of many researchers and has generated several publications. The possible applications of this theory are present in several areas of the knowledge such as Viscoelasticity, Electrochemistry, Physics, Epidemiology, among many others that can be modeled by fractional differential equation. We make use of this theory to study a mathematical model to transmission of Dengue Disease, by fractional derivative of Caputo type, whose model is available in the literature. Thus, a fundamental result is the analysis of the behavior asymptotic, that is, what happens to the solutions when the time to infinity, so we will use Lyapunov stability. We use numerical simulations to carried out to validate the model and investigate whether the equilibrium points are globally asymptotically stable, since four values were considered as initial conditions, whose solutions converge to the equilibrium points. In addition, it was compared to a simulation using ordinary differential equations and it was found that the solutions of the fractional order model have less oscillations because they guarantee a damping system, causing the solutions to converge at a lower speed.

Key-words: Epidemiology. Mathematical Modeling. Fractional differential equations.

Lyapunov stability.

## **LISTA DE TABELAS**

- Tabela 1 – Valores para os parâmetros do o sistema de ordem fracionária da Dengue.125
- Tabela 2 – Valores para os parâmetros do o sistema de ordem fracionária da Dengue.126

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Esquema realização de modelos matemáticos. . . . .	18
Figura 2 –	Fluxograma do modelo epidemiológico SIR Kermack-McKendrick. . .	24
Figura 3 –	Modelo epidemiológico compartmentado SIR com taxa de vacinação.	26
Figura 4 –	Fluxograma para infecção de dengue. . . . .	28
Figura 5 –	Dinâmica com o valor inicial $a$ . . . . .	125
Figura 6 –	Dinâmica com o valor inicial $b$ . . . . .	125
Figura 7 –	Dinâmica com o valor inicial $c$ . . . . .	125
Figura 8 –	Dinâmica com o valor inicial $d$ . . . . .	125
Figura 9 –	Dinâmica com o valor inicial $a$ . . . . .	126
Figura 10 –	Dinâmica com o valor inicial $b$ . . . . .	126
Figura 11 –	Dinâmica com o valor inicial $c$ . . . . .	126
Figura 12 –	Dinâmica com o valor inicial $d$ . . . . .	126
Figura 13 –	Dinâmica com o valor inicial $b$ e ordem da derivada $q = 1$ . . . . .	127

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
2	<b>CONCEITOS EPIDEMIOLÓGICOS</b>	14
2.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS DA EPIDEMIOLOGIA DE DOENÇAS INFECCIOSAS	16
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA	17
2.3	DINÂMICA POPULACIONAL DE DOENÇAS INFECCIOSAS	19
2.4	MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR	21
2.4.1	<b>O modelo SIR com Demografia</b>	24
2.5	MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR-SI PARA A DENGUE	27
3	<b>CÁLCULO FRACIONÁRIO</b>	30
3.1	CONCEITOS PRELIMINARES	31
3.2	TRANSFORMADA DE LAPLACE	34
3.3	INTEGRAL FRACIONÁRIA	37
3.4	DERIVADAS FRACIONÁRIAS	42
3.5	FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER	54
3.6	TRANSFORMADA DE LAPLACE DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS	55
4	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM FRACIONÁRIA</b>	61
4.1	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES	61
4.2	PROLONGAMENTO DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA	72
4.2.1	<b>Teorema de Existência Global de solução</b>	81
4.3	DESIGUALDADES FRACIONÁRIAS	83
5	<b>ESTABILIDADE DE LYAPUNOV E APLICAÇÕES</b>	94
5.1	ESTABILIDADES PARA SISTEMAS FRACIONÁRIOS	94
5.1.1	<b>Conceitos de Estabilidade para Sistemas de Ordem Fracionária</b>	95
5.2	MODELO SIR-SI FRACIONÁRIO DA DENGUE	106
5.2.1	<b>Estabilidade Assintótica Local de <math>E^0</math></b>	115
5.2.2	<b>Estabilidade Assintótica Local de <math>E^*</math></b>	118
6	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA</b>	123
6.1	PONTO DE EQUILÍBRIO LIVRE DA DOENÇA $E^1$	124
6.2	PONTO DE EQUILÍBRIO ENDÊMICO $E^2$	125
7	<b>CONCLUSÃO</b>	128
	<b>REFERÊNCIAS</b>	130

## 1 INTRODUÇÃO

O cálculo fracionário originou-se em 30 de Setembro de 1695, quando L'Hospital escreveu uma carta ao seu amigo Leibniz, propondo e discutindo o significado de uma derivada de ordem meio (PODLUBNY, 2002). A partir daí, outros matemáticos deram sua contribuição para o desenvolvimento dessa teoria, dentre eles Riemann e Liouville.

O matemático Abel foi o primeiro a encontrar uma aplicação para o cálculo de ordem não inteira, em 1823, para resolver o clássico problema da tautócrona, que buscava determinar a curva tal que o tempo de descida até o ponto mínimo de um corpo abandonado sobre ela e sujeito a ação da gravidade seja o mesmo, independentemente do ponto onde ele foi abandonado. Apesar de não ter utilizado diretamente o cálculo fracionário para solucioná-lo mostrou que era possível escrever a solução em termos de derivadas fracionárias (CAMARGO, 2009). Entretanto, apenas em 1969 que Caputo propôs uma nova definição para a derivada de ordem não inteira que aplicou a problemas de viscoelasticidade e sismologia (CAPUTO, 1969).

A utilização de conceitos e técnicas do Cálculo Fracionário tem possibilitado importantes resultados em várias áreas do conhecimento (CAPUTO, 1992; MACHADO, 2003; MATIGNON, 1996; PODLUBNY, 2002). Além disso, é uma ferramenta importante para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular aqueles que possuem memória, de acordo com Tarasov (2013). O estudo de sistemas de ordem fracionária tem atraído a atenção de muitos pesquisadores e por isso tem gerado várias publicações. As aplicações possíveis dessa teoria estão presentes em diversas áreas do conhecimento tais como Viscoelasticidade, Eletroquímica, Física, Epidemiologia, entre muitas outros que possam ser modelados por meio de uma equação diferencial fracionária.

Assim como a resolução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes tem sua solução dada, em vários casos, em termos da função exponencial, uma equação diferencial de ordem não inteira tem sua solução dada em termos de funções de Mittag-Leffler (MITTAG-LEFFLER, 1903). Daí surge a importância de se estudar tais funções. A função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial a partir de uma série de potências mais geral. Por isso, uma equação diferencial de ordem não-inteira é capaz de fornecer uma descrição mais refinada de um dado fenômeno do que a respectiva equação de ordem inteira (DIETHELM, 2013; MAOLIN, ZAIHUA, HAIYAN, 2013; POOSEH, RODRIGUES, TORRES, 2011; SARDAR et al., 2014).

Além dos conceitos de integral e derivada fracionários, o estudo da teoria de sistemas de equações diferenciais fracionárias é fundamental. As equações diferenciais fracionárias foram utilizadas em muitas aplicações para descrições de fenômenos não lineares em diversos ramos da ciência, por isso, o estudo de resultados sobre existência e unicidade de soluções destes sistemas são importantes para garantir se o problema é bem posto e para a interpretação das aplicações. Do mesmo modo, como no caso ordinário, também é necessário estabelecer conceitos de prolongamento de soluções no âmbito global.

Este trabalho contém quatro seções: em Conceitos Epidemiológicos são apresentados alguns conceitos preliminares da Epidemiologia, tais como, os meios de transmissão, características e definições, algumas medidas de controle e prevenção de doenças, modelos epidemiológicos de sistemas compartimentados em populações e a interpretação prática da Razão de Reprodução Básica.

Na seção Cálculo Fracionário é abordado o cálculo diferencial e integral de ordem não inteira. São definidas as funções Gama e Beta, a Transformada de Laplace, e a definição da integral fracionária. Além disso, apresentamos técnicas para resolução e alguns exemplos. Formalizamos também a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo, e alguns lemas que mostram a relação entre ambas as derivadas. Para finalizar foram introduzidos as funções de Mittag-Leffler e alguns teoremas para o desenvolvimento do trabalho.

A seção Equações Diferenciais de Ordem Fracionária é dedicada à Teoria Qualitativa para Equações Diferenciais Fracionárias, o Teorema de Existência, Unicidade e apresentamos um novo Teorema de Prolongamento de Soluções para sistemas de equações diferenciais fracionários, além da apresentação de alguns resultados sobre desigualdades envolvendo derivadas fracionárias.

A seção Estabilidade de Lyapunov e Aplicações discutimos e utilizamos a Teoria de Estabilidade de Lyapunov de sistemas de equações diferenciais fracionários, como sistemas não autônomos, estabilidade assintótica e funções de classe  $K$  e  $K_\infty$ . Além de uma aplicação em um modelo epidemiológico para a infecção e propagação da dengue em populações de indivíduos humanos e mosquitos. Serão dados os pontos de equilíbrio do sistema, a Razão de Reprodução Básica da doença. Sendo assim, para a estabilidade de soluções determinamos uma função de Lyapunov para ser utilizada como hipótese dos teoremas de estabilidade local de soluções.

Na seção Simulação Numérica foram realizadas simulações numéricas de soluções de

um sistema de equações diferenciais de ordem fracionária simplificado da seção anterior, sendo assim, teremos uma nova Razão de Reprodução Básica  $\mathcal{R}_0$ . Estão apresentados os dois cenários epidemiológicos, quando o novo  $\mathcal{R}_0 < 1$  as soluções convergem para o ponto de equilíbrio livre da doença e quando o novo  $\mathcal{R}_0 > 1$  as soluções convergem para o ponto de equilíbrio endêmico. De maneira a investigar a estabilidade global de soluções, foram simulados para diferentes valores de condição inicial e todos apresentaram convergência, dado um cenário epidemiológico.

## 2 CONCEITOS EPIDEMIOLÓGICOS

A Epidemiologia é uma ciência que estuda os padrões relacionados às doenças e a saúde da população (MARTCHEVA, 2015). A palavra Epidemiologia vem do grego, *epi*, que significa sobre, *demos*, que significa população e *logos*, que significa estudo. Sendo assim, podemos entender a Epidemiologia como o estudo das doenças infecciosas que acometem a população humana.

Uma doença infecciosa é caracterizada pela presença de um agente microbiano patogênico. Os agentes microbianos causadores das doenças infecciosas podem ser: vírus, bactérias, fungos, parasitas, ou qualquer tipo de proteína tóxica, como as chamadas *prions*. Dentre as doenças infecciosas causadas por bactérias, podemos citar a tuberculose e a pneumonia, e as causadas por vírus, o HIV e a influenza. E para as doenças causadas por fungos, temos como exemplo as micoses. Infecções parasitárias são causadas por macroparasitas, protozoários, helmintos, trematóides e cestódeos.

Dentre as doenças infecciosas temos as que são contagiosas, ou seja, são as doenças que podem ser transmitidas de uma pessoa infectada para outra, direta ou indiretamente. Geralmente, não é feita essa distinção entre doenças infecciosas e contagiosas. Entretanto, há doenças que são infecciosas mas não são contagiosas, como o tétano.

Há as doenças transmissíveis que podem ser transmitidas de um indivíduo para o outro por meio de outros caminhos, como por exemplo, através de instrumentos cirúrgicos e transplantes.

A transmissão de doenças infecciosas podem ocorrer por meio de diversas vias. De acordo com os meios de transmissão, podemos classificá-las das seguintes maneiras:

- a) **Horizontal:** quando a transmissão se dá de uma pessoa para outra e podem ser:
  - **Contato direto:** são transmitidas por toque ou contato sexual. Por exemplo, as doenças sexualmente transmissíveis (DST);
  - **Contato indireto:** são transmitidas por troca de objetos infectados, sangue ou qualquer outro líquido corporal. Nesta modalidade temos a influenza é transmitida por contato indireto;
  - **Vias aéreas:** são transmitidas pela inalação de gotículas contaminadas presentes no ar. Podemos citar como exemplo a influenza, varíola, sarampo, catapora e tuberculose;

- **Alimentos e água contaminados:** são transmitidas pela ingestão de alimentos e água contaminados. Aqui temos a cólera que é transmitida por água contaminada pela bactéria *Vibrio cholerae*, salmonella e gastroenterite são transmitidas por alimentos contaminados;
  - **Por vetores:** são transmitidas por vetores, os mais comuns são os artrópodes, como mosquitos e carrapatos, e os moluscos, como caracol. Por exemplo, malária e dengue são doenças infecciosas transmitidas por um vetor;
- b) **Vertical:** ocorre quando a transmissão da doença se dá de mãe para filho, pela placenta, no nascimento, ou no colostro do leite materno.

Quando se constitui contato suficiente para a doença ser transmitida, isso irá depender de cada caso especificado. Para as doenças sexualmente transmissíveis, o contato sexual é necessário, enquanto, as doenças transmitidas por vias aéreas requer um certo grau de proximidade físico, sem que haja toque. A modelagem de doenças transmitidas por vetores requer a inclusão da dinâmica do vetor na dinâmica da infecção. No ambiente das doenças infecciosas, temos que são modeladas separadamente a dinâmica do vírus e a transmissão que ocorre no contato entre o indivíduo e o elemento patogênico.

O vetor (reservatório patogênico) é um nicho ecológico no qual o patógeno vive e se reproduz, além disso, desempenha um papel importante na propagação. De acordo com cada reservatório, os agentes microbianos são classificados como **humano**, **animal** e **ambiental**. Os patógenos humanos circulam na maioria das vezes entre humanos, sendo estes os que desempenham o papel na transmissão da doença. Os patógenos animais tem os vertebrados como reservatório, e circulam primeiramente entre os animais. Embora, epidemiologicamente, os patógenos animais podem adaptar-se para infectar humanos por meio de transmissões animal-humano. Infecções que se espalham de animais vertebrados para humanos são chamadas de **zoonoses**. Os patógenos ambientais multiplicam-se primeiramente no ambiente (principalmente na água e no solo) e espalham-se a partir das populações de animais para humanos.

Muitas doenças infecciosas tem mais de uma via de infecção. Por exemplo, o vírus HIV é transmitido primeiramente pelo contato sexual, mas pode ser também transmitido por transfusão de sangue ou compartilhamento de seringas, e ainda pode ser transmitida no nascimento, de mãe para filho. A gripe aviária H5N1 é primeiramente transmitida pelo contato direto com aves infectadas e raramente de humano para humano. Entretanto, não há evidências significativas que H5N1 pode persistir no ambiente, e as vias de transmissão no ambiente ganham mais

evidência.

## 2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS DA EPIDEMIOLOGIA DE DOENÇAS INFECCIOSAS

Existem alguns conceitos relacionados estritamente à Epidemiologia de doenças infecciosas que desempenham um papel importante na construção de modelos matemáticos pela adição de várias características ao modelo. Alguns conceitos que são largamente utilizados estão listados abaixo:

- a) **Indivíduos suscetíveis:** quando um indivíduo saudável é vulnerável a contrair uma doença fazendo um contato potencialmente infeccioso, este indivíduo torna-se suscetível. Indivíduos suscetíveis podem ou não desenvolver a doença, ou seja, são não infectados. Nos modelos matemáticos frequentemente assumimos que os indivíduos suscetíveis eventualmente desenvolvem a doença.;
- b) **Indivíduos infectados e infecciosos:** se o agente patogênico se estabelecer num indivíduo suscetível, então este indivíduo torna-se infectado. Indivíduos infectados que podem transmitir a doença são chamados de infecciosos. Indivíduos infectados podem não ser infecciosos durante todo o tempo de infectado;
- c) **Indivíduos latentes:** existem indivíduos que são infectados, mas ainda não são infecciosos. O período de latência é definido como o tempo entre o momento da infecção e o momento em que o indivíduo é capaz de transmitir o agente patogênico para outro;
- d) **Período de Incubação:** é o período entre a exposição de um agente infeccioso e o aparecimento dos sintomas da doença. Em doenças infecciosas, o período de incubação é o tempo necessário para o agente infeccioso se multiplicar até o limiar do aparecimento de sintomas ou evidências de infecção. O período de incubação não coincide, necessariamente, com o período de latência. Por exemplo, na influenza, indivíduos tornam-se infecciosos aproximadamente um dia antes de apresentarem sintomas de gripe visíveis;
- e) **Incidência:** é definido como o número de indivíduos que adoecem durante um intervalo de tempo especificado (por exemplo, um ano). Em valores percentuais, a incidência é a proporção entre o número de indivíduos que adoecem durante um intervalo de tempo pelo

total da população. Na maioria, a incidência é determinada pelo número de casos confirmados, que subestima a verdadeira incidência, pois são ignorados os casos suspeitos;

- f) **Prevalência:** a prevalência de uma doença é o número de pessoas que têm a doença em um tempo especificado. Em valores percentuais, a prevalência é a proporção entre o número de pessoas que têm a doença por um tempo especificado pelo tamanho total da população;
- g) **Proporção de casos fatais:** é dado pela taxa de pessoas que morrem da doença, em relação aos que a contraíram. Por exemplo, em junho de 2014, 667 pessoas foram diagnosticadas com H5N1 e 393 dessas pessoas morreram, assim, a proporção de casos fatais foi de 0,59;
- h) **Mortalidade induzida pela doença:** é a proporção do número de pessoas que morreram da doença em uma unidade de tempo (um ano, por exemplo), pelo total da população.

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Um modelo matemático, de acordo com Martcheva (2015), é uma descrição de um sistema usando linguagens e ferramentas matemáticas, cujo o processo de desenvolvimento é chamado de modelagem matemática. Iremos nos concentrar na modelagem de doenças infecciosas e seu espalhamento em populações, mas a princípio, modelagem matemática pode ser aplicada para qualquer sistema biológico ou físico. Modelos matemáticos são desenvolvidos para entender os sistemas, estudar os efeitos dos vários componentes e fazer previsões sobre seu comportamento.

O processo de modelagem, descrito na figura ?? necessita de um entendimento do cenário biológico dentro de um problema matemático. Este processo se inicia com uma clara descrição do processo baseado num entendimento científico do sistema e a tradução para as equações matemáticas podem ser feitas com um objetivo específico ou uma questão biológica. Então, a descrição verbal do sistema é codificada com equações matemáticas.

O modelo deve incorporar somente as informações que são relevantes para o objetivo específico ou para a questão biológica. Uma vez que o modelo é formulado, pode ser investigado utilizando as ferramentas matemáticas:

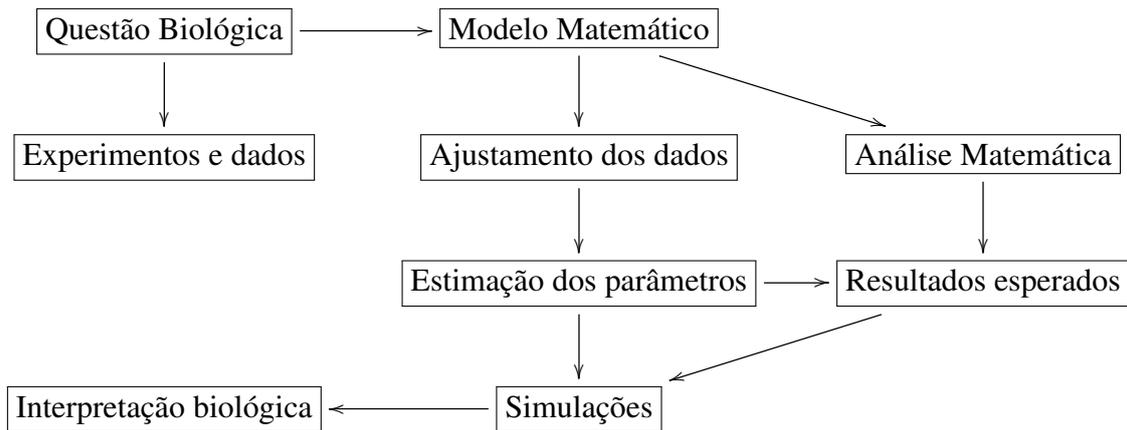


Figura 1 – Esquema realização de modelos matemáticos.

Fonte: Martcheva, (2015).

- a) As quantidades críticas do modelo que nos dizem como se comportam globalmente as soluções;
- b) Os dados disponíveis podem ser ajustados ou simulados novos dados,
- c) Estimação de parâmetros do modelo;
- d) Conhecer a importância de cada parâmetro por meio de simulações.

Após o modelo ter sido entendido, devemos interpretar os resultados à luz do cenário biológico considerado e buscar as questões do problema biológico proposto no início. No mínimo, é preciso considerar as perguntas: O que aprendemos sobre o mundo real a partir deste modelo? Esse é o modelo apropriado a partir das informações que temos sobre o sistema?

Modelos matemáticos usualmente consistem de parâmetros e variáveis que estão relacionados. As variáveis são as ideias abstratas das propriedades do sistema que são quantificadas ou mensuradas. Os modelos matemáticos podem ser classificados das seguintes maneiras:

- a) **Linear/não linear:** um modelo será não linear se conter dependência não linear entre as variáveis, caso contrário, será linear;
- b) **Estático/dinâmico:** um modelo dinâmico é responsável por mudanças no estado do sistema ao longo do tempo. Enquanto modelos estáticos resultam em quantidades assumindo que não se alteram ao longo do tempo. Geralmente, modelos dinâmicos empregam equações diferenciais;

- c) **Discreto/contínuo:** modelos discretos tratam o tempo ou o estado do sistema como discretos. Já os modelos contínuos incorporam o tempo ou o estado do sistema como dinâmicos;
- d) **Estocástico/determinístico:** um modelo determinístico é aquele na qual um conjunto de estados da variável é unicamente determinado pelos parâmetros do modelo e do estado inicial das variáveis. Já o estocástico é caracterizado por aleatoriedade e os estados das variáveis são descritos por distribuições de probabilidade.

Uma das principais ferramentas da modelagem matemática são as equações diferenciais ordinárias (SOTOMAIOR, 1979). Os modelos matemáticos têm uma grande importância para as ciências naturais, incluindo a ecologia, epidemiologia e a genética. Eles ajudam a ter mais entendimento sobre o sistema, organizam e dão sentido para os dados biológicos, obtêm a resposta para o comportamento, buscam otimização e estratégias de intervenção, e fazem previsões sobre o sistema.

### 2.3 DINÂMICA POPULACIONAL DE DOENÇAS INFECCIOSAS

Para o estudo da dinâmica de modelos aplicados para se entender o comportamento e a dinâmica de doenças infecciosas são necessários conhecer parâmetros fundamentais, como a força de infecção de uma doença e a Razão de Reprodução Básica.

A força de infecção indica o grau de contaminação no grupo de indivíduos suscetíveis pelos agentes infecciosos transmitidos por todos os indivíduos infectados. Já a Razão de Reprodução Básica ( $R_0$ ) pode ser interpretada como o número de casos secundários que um indivíduo infeccioso pode gerar em uma população que está totalmente suscetível. Este parâmetro está relacionado com o Teorema do Valor Limiar (DIEKMANN, HEESTERBEEK, METZ, 1990), que determina a existência de uma densidade mínima de pessoas na população em estudo que são suscetíveis à uma doença, e acima da qual é favorável o surgimento de uma epidemia transmitida diretamente. Essa relação é importante, como é possível ver em Dietz (1993), pois  $R_0$  é um parâmetro que não se estima experimentalmente, pois nenhum pesquisador teria a conduta de inserir um infectado num grupo de suscetíveis apenas para contar os casos secundários. Para cada doença epidemiológica é possível estabelecer o parâmetro  $R_0$  pelo qual pode-se verificar o desenvolvimento dos infectados, além disso, como a Razão de Reprodução Básica é uma

grandeza matemática poderá ser derivado da Força de Infecção. Sendo assim, o parâmetro  $R_0$  poderá assumir os seguintes valores:

- a)  $R_0 = 1$ , tem-se uma condição de equilíbrio da doença;
- b)  $R_0 > 1$ , a doença espalha-se na população e o número de indivíduos infectados aumenta;
- c)  $R_0 < 1$ , a doença tende a desaparecer na população e o número de indivíduos infectados diminui.

$R_0$  é um parâmetro adimensional, pois como sua expressão é uma razão dada por um único caso em casos gerados. Além disso, é um valor médio, e quando ocorre de fato uma epidemia, este parâmetro é denominado como Razão de Reprodução Efetiva ( $R$ ).

A Razão de Reprodução Efetiva ( $R$ ) é entendida quando um indivíduo infectado gera casos secundários em uma população que não é totalmente suscetível, tendo assim, uma epidemia. Este novo parâmetro é dado pelo produto de  $R_0$  pela fração de indivíduos suscetíveis no equilíbrio da população  $x^*$ ,

$$R = R_0 x^*$$

no equilíbrio endêmico a fração de indivíduos suscetíveis no equilíbrio é o inverso da razão de reprodução básica  $R_0$ , ou seja,

$$R = 1 \Rightarrow x^* = \frac{1}{R_0} \quad (2.1)$$

então  $R = R_0$ , se  $x^* = 1$ .

Para analisar a proporção de indivíduos a serem vacinados de maneira que se evite uma epidemia é preciso deduzir  $p$ , considerando como a fração da população protegida por meio de vacinação, assim,

$$x^* = 1 - p$$

$$R = R_0 x^* = R_0(1 - p)$$

para que a doença seja controlada, temos

$$R = R_0(1 - p_c) < 1 \Rightarrow p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$$

logo, a proporção crítica  $p_c$  de vacinação que consiga erradicar a doença deve estar acima desta expressão que depende de  $R_0$ ,

$$p_c = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

## 2.4 MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR

Os modelos compartimentados epidemiológicos para doenças infecciosas foram propostos inicialmente por Kermack e McKendrick em 1927 (KERMACK, MCKENDRICK, 1927) e posteriormente por Isea, Lonngren (2013), um modelo conhecido como SIR (Suscetível - Infectado - Recuperado).

A obtenção do modelo epidemiológico proposto por Kermack e McKendrick dá-se quando uma doença espalha-se em uma população, e ela divide-se em classes disjuntas, inicialmente denotadas por:

- a) **Suscetíveis**  $S(t)$  é a classe de indivíduos que são saudáveis, mas que podem contrair a doença;
- a) **Infectados**  $I(t)$  é a classe de indivíduos infectados pela doença, que são considerados doentes;
- a) **Recuperados**  $R(t)$  é a classe de indivíduos recuperados e que não podem contrair novamente a mesma doença.

De acordo com Martcheva (2015) e Bassanezi (2006), o número de indivíduos em cada uma das três classes mudam em relação ao tempo, então,  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  são funções dependentes do tempo  $t$ . O total da população é a soma do número de indivíduos que estão em cada uma das classes:

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

Na formulação do modelo, é preciso assumir duas pressuposições:

- a) No modelo de Kermack-McKendrick os indivíduos infectados também são considerados infecciosos;
- b) O tamanho total da população permanece constante em relação ao tempo.

Modelos epidemiológicos consistem de sistemas de equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica de cada uma das classes. Um dos modelos SIR mais simples envolve a dinâmica dos indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados.

Para se obter as equações diferenciais, vamos considerar como as classes mudam ao longo do tempo. Quando um indivíduo suscetível entra em contato com um indivíduo infectado, este indivíduo suscetível torna-se infectado há uma certa probabilidade e transfere-se da classe de suscetíveis para a classe de infectados. O número de indivíduos suscetíveis decresce em uma unidade de tempo por causa dos indivíduos que se tornam infectados durante este tempo. Nesse mesmo tempo, o número de indivíduos infectados cresce por causa dos novos indivíduos infectados que agora estão nesta classe. Na epidemiologia, o crescimento do número de indivíduos que se tornam infectados é chamado de *incidência* e a taxa de mudança da classe de suscetíveis é denotado por:

$$S(t) = -\text{incidência}$$

Podemos representar a incidência considerando os indivíduos infectados assumindo que:

- a)  $cN$  é o número de contatos por uma unidade de tempo que produzem indivíduos infectados. Vamos assumir que o número de contatos feito por um indivíduo infeccioso é proporcional ao tamanho total da população com taxa per capita  $c$ ;
- b)  $\frac{S}{N}$  é a probabilidade de contato com indivíduo suscetível;
- c)  $cN\frac{S}{N}$  é o número de contatos com indivíduos suscetíveis de um indivíduo infectado por unidade de tempo. Nem todo contato com indivíduo suscetível conduz necessariamente a transmissão da doença. Vamos supor que  $p$  é a probabilidade de contato com indivíduo suscetível resultando em transmissão;
- d)  $pcS$  é o número de indivíduos suscetíveis que tornam-se infectados por unidade de tempo por indivíduo infectado;
- e)  $\beta SI$  é o número de indivíduos que tornam-se infectados por unidade de tempo (incidência). Tomando  $\beta = pc$ .

Se definimos  $\lambda(t) = \beta I$ , então o número de indivíduos que tornam-se infectados por unidade de tempo é igual a  $\lambda(t)S$ . A função  $\lambda(t)$  é chamada de *força de infecção*. O coefi-

ente  $\beta$  é uma constante de proporcionalidade chamada de *taxa de transmissão*. O número de indivíduos infectados na população  $I(t)$  é chamado de *prevalência* da doença.

Existem diferentes tipos de incidência, dependendo de como são feitas as pressuposições sobre a força de infecção, desse modo, uma delas é a Lei de Ação de Massas. Com este modo de incidência obtemos a seguinte equação diferencial para indivíduos suscetíveis:

$$S'(t) = -\beta IS$$

A Lei de Ação de Massas indica que o termo de transmissão  $\beta$  é uma taxa de contato entre os indivíduos suscetíveis e infectados, no qual, os indivíduos suscetíveis tornam-se infectados e movem-se para a classe  $I$ .

Os indivíduos infectados podem se recuperar ou morrer deixando a classe de infectados  $I$  por uma taxa constante per capita por unidade de tempo  $\alpha$ . Então  $\alpha I$  é o número de indivíduos infectados que recuperam-se. Assim,

$$I'(t) = \beta IS - \alpha I$$

Indivíduos que se recuperam deixam a classe  $I$  e movem-se para a classe de recuperados  $R$ . Assim,

$$R'(t) = \alpha I$$

Desse modo, o modelo inteiro é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta IS \\ I'(t) = \beta IS - \alpha I \\ R'(t) = \alpha I \end{cases} \quad (2.2)$$

Para o sistema (2.2) ser bem definido matematicamente é necessário fornecer uma condição inicial  $S(0)$ ,  $I(0)$  e  $R(0)$ . Quando o modelo é formulado, é preciso se preocupar com as unidades de medida das quantidades envolvidas. Estas unidades também auxiliam quando os parâmetros são estimados a partir de dados. As unidades de ambos os lados das equações do sistema (2.2) devem ser as mesmas. Todas as derivadas tem unidade número de pessoas por unidade de tempo, obrigatoriamente, o lado direito das equações devem ter a mesma unidade.

Da primeira equação, temos que  $I$  e  $S$  tem a unidade número de pessoas. A unidade de  $\beta$  deve ser  $1/[\text{número de pessoas} \times \text{unidade de tempo}]$ . Sendo  $\beta = pc$  e  $p$  uma probabilidade, que não possui unidade e a unidade de  $c$  deve ser  $1/[\text{número de pessoas} \times \text{unidade de tempo}]$ . Assim, a taxa de contato  $cN$  tem unidade  $1/\text{unidade de tempo}$ , equivalentemente, da segunda equação, temos que  $\alpha$  tem unidade  $1/\text{unidade de tempo}$ , então o número  $\alpha I$  tem como unidade o número de pessoas/unidade de tempo.

Um modelo de equações diferenciais ordinárias como no sistema (2.2) é bem definido através de um ponto (condição inicial), no qual existe uma única solução, segundo (??). Modelos de equações diferenciais devem ser bem definidos para serem aceitos matematicamente e possuírem significado biológico. Por causa de variáveis dependentes denotamos por quantidades físicas, para a maioria dos modelos em Biologia e Epidemiologia que as soluções comecem a partir de uma solução inicial positiva positivas (ou, não negativa), e que permaneçam positivas (ou, não negativas) por todo o tempo.

Iremos denotar por  $N$  o total da população no tempo zero  $N = S(0) + I(0) + R(0)$ . Somando as três equações do sistema (2.2) obteremos  $N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$ . Assim,  $N'(t)$  é constante e igual ao seu valor inicial. Esse modelo é chamado de SIR ou sistema SIR, porque cada letra refere-se a um **compartimento** no qual o indivíduo reside. Os sistemas compartimentados são exemplos de modelos matemáticos muito utilizados para estudos de doenças epidemiológicas (MARTCHEVA, 2015). São esquematizados por diagramas geralmente chamados por **fluxograma**. Cada compartimento é um fluxograma representado por uma caixa com a respectiva letra. As setas indicam a direção do movimento de indivíduos entre as classes. As setas de movimento são tipicamente rotuladas pelas taxas de transição, como mostram na Figura 2.



Figura 2 – Fluxograma do modelo epidemiológico SIR Kermack-McKendrick.

Fonte: Kermack e Mckendrick, (1927).

#### 2.4.1 O modelo SIR com Demografia

Agora vamos incorporar demografias no modelo epidemiológico SIR, para isto assumimos que os indivíduos nascem suscetíveis, e que  $\Lambda$  é o número total de nascimentos. Indivíduos

de cada classe morrem à uma taxa per capita de mortalidade  $\mu$ , então a taxa de mortalidade total na classe de suscetíveis  $S$  é  $\mu S$ , enquanto para a classe de infectados  $I$  é  $\mu I$  e para a classe de recuperados  $R$  é  $\mu R$ . O modelo epidemiológico SIR com demografia é dado por:

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta IS - \mu S \\ I'(t) = \beta IS - \alpha I - \mu I \\ R'(t) = \alpha I - \mu R \end{cases} \quad (2.3)$$

Cuja a força de infecção dada por:  $\lambda(t) = \beta I$

Vamos adicionar as três equações para obter o total da população. O modelo para o total da população é  $N'(t) = \Lambda - \mu N$ , quando  $N = S + I + R$ . O total da população não é constante, mas é assintoticamente constante, desde que  $N(t) \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

No processo de estimação da Razão de Reprodução Básica  $R_0$  na fase inicial da doença para o modelo (2.3) considere que há poucos indivíduos infectados na população, logo,  $S(t) \approx N$ . Assim,

$$I'(t) < 0 \Rightarrow I(\beta N - \alpha - \mu) < 0 \Rightarrow \frac{N\beta}{\alpha + \mu} < 1$$

A partir da Equação (2.1) temos que  $R_0 = \frac{N\beta}{\alpha + \mu}$ .

$$I'(t) < 0 \Rightarrow R_0 < 1$$

De maneira análoga, temos que

$$I'(t) > 0 \Rightarrow R_0 > 1$$

Quando a população não é constante e a incidência é proporcional ao produto de  $S$  e  $I$ , vamos dizer que a incidência é dada pelo **princípio de ação de massas**. Isto é análogo aos termos de um modelo de cinética química, (MARTCHEVA, 2015), no qual, os elementos químicos reagem por se chocarem aleatoriamente uns com os outros. Por esta razão, esta incidência é chamada de **incidência de ação de massas**.

$$\beta SI = \text{incidência de ação de massas}$$

Um outro tipo de incidência usada em modelos epidemiológicos é a **incidência padro-**

**nizada.** É equivalente à incidência de ação de massas, porém, é normalizada pelo total da população. Em particular,

$$\frac{\beta SI}{N} = \text{incidência padronizada}$$

A incidência de ação de massas e a incidência padrão coincidem quando o tamanho total da população é constante, mas diferem quando o tamanho total da população é variável. A incidência de ação de massas é usada para doenças nas quais o número de contatos relevantes aumenta quando o tamanho da população aumenta também. Por exemplo, *influenza* e SARS, o contato delas aumentam quando o tamanho da população aumenta. Incidência padronizada é usada para doenças, quando a taxa de contato pode não aumentar indefinidamente ou é sempre limitada se o tamanho da população aumenta. Esse é o caso de doenças sexualmente transmissíveis, onde o número de contatos podem não aumentar indefinidamente.

Incluindo a taxa de vacinação  $\nu$ , temos que o número  $\nu S$  de indivíduos suscetíveis vacinados ganham imunidade à doença e são retirados da classe de Suscetíveis  $S$  para a classe dos recuperados  $R$ , como apresentado no sistema (2.4).

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta IS - (\mu + \nu)S \\ I'(t) = \beta IS - \alpha I - \mu I \\ R'(t) = \nu S + \alpha I - \mu R \end{cases} \quad (2.4)$$

em que a força de infecção dada por:  $\lambda(t) = \beta I$ .

O fluxograma do modelo SIR com demografia incluindo uma taxa de vacinação é apresentado na Figura 3.

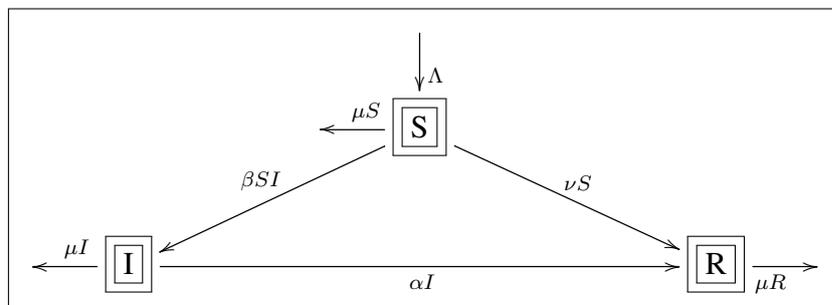


Figura 3 – Modelo epidemiológico compartmentado SIR com taxa de vacinação.

Fonte: Martcheva, (2015).

## 2.5 MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR-SI PARA A DENGUE

Nesta seção vamos fazer uma aplicação da teoria desenvolvida na seção anterior em um modelo SIR-SI para a transmissão do vírus da Dengue com derivadas de ordem Fracionária. A Dengue tem sido estudada em trabalhos como Esteva e Vargas (1998,1999) e, Deroucich e Boutayeb (2006), principalmente no que diz respeito a dinâmica de infecção, pois se trata de uma infecção viral causada por quatro sorotipos de vírus e transmitida indiretamente pela picada da fêmea do mosquito *Aedes Aegypti*. Pode ser considerada uma endemia que tem sido muito comum em regiões tropicais e subtropicais do planeta. Além disso, as manifestações desta doença podem variar de casos assintomáticos, passando por febres, erupções cutâneas, e hemorragias, podendo até causar a morte em casos mais graves.

O modelo matemático utilizado para descrever a dinâmica da epidemia de dengue está disponível em Diethelm (2013) e é baseado na decomposição da população humana em três compartimentos disjuntos (suscetível, infectado e recuperado), enquanto que a população de mosquitos fêmeas é somente dividido em dois compartimentos, também disjuntos, (suscetível e infectado). Os compartimentos foram denotados por:

- a)  $N_h$  é o total da população de humanos;
- b)  $S_h$  é o total de humanos suscetíveis;
- c)  $I_h$  é o total de humanos infectados;
- d)  $R_h$  é o total de humanos recuperados;
- e)  $N_v$  é o total da população de mosquitos;
- f)  $S_v$  é o total de mosquitos fêmeas suscetíveis;
- g)  $I_v$  é o total de mosquitos fêmeas infectados.

em que  $N_h = S_h + I_h + R_h$ ,  $N_v = S_v + I_v$  e, com os totais da população constantes,  $m$  é o número de hospedeiros alternativos (animais domésticos, por exemplo) que também servem de fontes de sangue,  $\mu_h$ ,  $\mu_v$  são as taxas de natalidade e mortalidade *per capita* de humanos e vetores, respectivamente, de maneira que ambas as populações permaneçam constantes,  $\gamma$  é a taxa de recuperação,  $b$  é a taxa de picadas do mosquito,  $\beta_h$  é a taxa de contato do vetor

infectado para o hospedeiro suscetível, e  $\beta_v$  é a taxa de contato do hospedeiro infectado para o vetor suscetível.

Podemos descrever a dinâmica da doença pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinária não linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_h = \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v - \mu_h S_h, \\ I'_h = \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v - (\mu_h + \gamma) I_h, \\ R'_h = \gamma I_h - \mu_h R_h, \\ S'_v = \mu_v N_v - \frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h - \mu_v S_v \quad e \\ I'_v = \frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h - \mu_v I_v. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

O fluxograma do modelo SIR da dengue apresentado na figura (4).

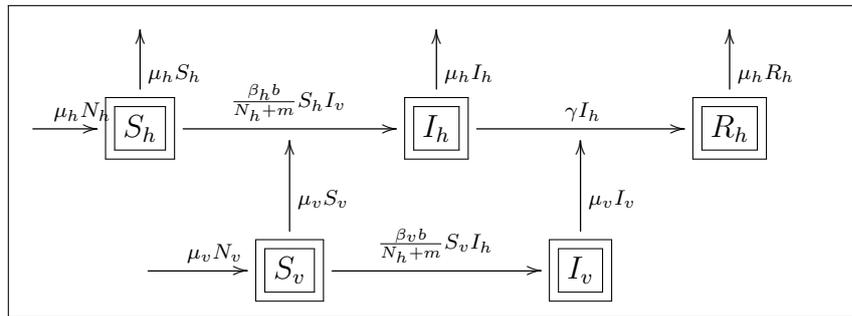


Figura 4 – Fluxograma para infecção de dengue.

Fonte: Diethelm, (2013)

O número de reprodução é dado por

$$R_0 = \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h N_v}{(N_h + m)^2 (\mu_h + m) \mu_v}.$$

Então, a Razão de Reprodução Básica  $\mathcal{R}_0$  será

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h N_v}{(N_h + m)^2 (\mu_h + m) \mu_v}}.$$

Todos os parâmetros apresentados são não-negativos. Usando a teoria clássica de equações diferenciais ordinárias, é possível provar que o sistema acima é bem definido dada uma condição inicial, ou seja, pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias (SOTOMAIOR, 1979), existe uma única solução que depende continuamente e pas-

sando por cada dado inicial em  $\mathbb{R}_+^5$ , então as soluções  $(S_h(t), I_h(t), R_h(t), S_v(t), I_v(t))$  estão definidas para todo  $t \geq 0$  e permanecem numa vizinhança de  $\mathbb{R}_+^5$ .

### 3 CÁLCULO FRACIONÁRIO

O conceito de cálculo fracionário surgiu a partir de uma questão proposta no ano de 1695 pelo Marquês de *L'Hopital*. Em uma carta datada de 30 de setembro de 1695, ele questiona Leibniz sobre a derivada de ordem  $1/2$  de uma função. A partir daí, muitos matemáticos propuseram várias definições para a integral e para a derivada de ordem não inteira.

Em 1969, Caputo em seu livro *Elasticit'a e Dissipazione* (CAPUTO, 1969), propôs uma definição para a derivada de ordem fracionária, com a qual resolveu problemas de viscoelasticidade. Pouco tempo depois, algumas interpretações físicas e geométricas para a derivada e a integral fracionárias foram apresentadas, dentre elas destacamos Podlubny (PODLUBNY, 2002) que apresenta interpretações físicas e geométricas para integrais e derivadas de ordem arbitrária para casos particulares e Lorenzo e Hartley, (LORENZO E HARTLEY, 1998), que em 1988, apresentaram uma interpretação geométrica para a derivada fracionária.

Até o final do século XX, o cálculo de ordem arbitrária era visto apenas como uma teoria matemática sem muitas aplicações, mas houve uma expansão do uso dessa teoria na modelagem de problemas reais em vários ramos da ciência, desde a física da difusão à controle de sistemas, finanças e economia (MACHADO, 2003). Em epidemiologia é possível encontrar inúmeras aplicações, dentre elas podemos destacar o trabalho de Diethelm, (2013), que propõe um modelo de ordem fracionária para a Dengue e de González-Parra, (2008), no qual, o autor escreve um modelo fracionário para a dinâmica da Influenza (H1N1) e por meio de simulação numérica, concluiu que o modelo de ordem fracionária se ajusta melhor a um conjunto de dados reais se comparado ao modelo de equações diferenciais ordinárias. Além dessas situações, é possível encontrar aplicações em outras áreas, como processos estocásticos, ciências e engenharia.

Além dessas aplicações, quando se tem o interesse em introduzir o efeito de memória no sistema, as funções de ordem não inteira são um instrumento poderoso para a descrição de propriedades de memória e hereditárias de diferentes substâncias e até mesmo na memória com respeito ao aprendizado repetido (MAOLIN, ZAIHUA, HAIYAN, 2013). Esta é a maior vantagem dos modelos de ordem fracionária em comparação aos de ordem inteira, nos quais, tais efeitos são negligenciados (PODLUBNY, 1999). A viscoelasticidade é o campo onde se concentra a sua maior aplicação, isso devido ao seu fenômeno de tratar de efeitos de memória (MACHADO, 2003; MAOLIN, ZAIHUA, HAIYAN, 2013; MCCALLEMAIL, DAVID, 2002).

As publicações têm se concentrado em processamento de sinais, modelagem e controle.

A aplicação das técnicas do Cálculo Fracionário tem permitido generalizações e importantes resultados em diversas áreas do conhecimento, tais como, finanças, processos estocásticos e em diversas áreas dentro das ciências aplicadas e engenharia (LORENZO, HARTLEY, 1998), (DIETHELM 2013) e (CHANPIN, YUTIAN, 2013). Além disso, é uma importante ferramenta para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular aqueles que possuem dependência temporal.

Assim como a resolução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes tem sua solução dada, em muitos casos, em termos da função exponencial, uma equação diferencial de ordem não inteira tem, em diversos casos, a solução dada em termos da função de Mittag-Leffler (CAMARGO, OLIVEIRA, 2015). Com isso, ao entender a forma que a função de Mittag-Leffler generaliza a função exponencial estamos, de certa forma, compreendendo o porque de, em alguns casos, uma equação diferencial de ordem não-inteira fornecer uma descrição mais refinada de um dado fenômeno do que a respectiva equação de ordem inteira (DEMIRCI, OZALP, 2012).

Nesta seção alguns conceitos válidos para o cálculo fracionário. Os tópicos aqui apresentados são fundamentais para o desenvolvimento da próxima seção.

### 3.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Inicialmente serão introduzidas as definições de Função Gama e Função Beta. A Função Gama será utilizada para definir as integrais e derivadas de ordem não inteira e a função beta para outras identidades envolvendo a primeira função.

**Definição 3.1** A Função Gama é a integral imprópria definida para  $q > 0$  dada por

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{q-1} dx.$$

Como a Função Gama é dada por uma integral imprópria e para que seja convergente fica implícito que  $q > 0$ .

A Função Gama possui algumas propriedades úteis para o cálculo fracionário, dentre as quais podemos destacar

**Propriedade 3.1** Para a Função Gama são válidas as afirmações:

- a)  $\Gamma(q + 1) = q\Gamma(q)$ ;  
 b)  $\Gamma(1) = 1!$ ;  
 c)  $\Gamma(n + 1) = n!$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 3.2** A função Beta é definida como

$$B(q,p) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx,$$

para  $q > 0$  e  $p > 0$ .

O teorema seguinte relaciona as duas funções.

**Teorema 3.1** As funções Beta e Gama se relacionam por meio da identidade

$$B(q,p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}.$$

**Demonstração:** Considere o seguinte produto de funções gama:

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du, \quad (3.1)$$

Se  $t = x^2$  então,  $dt = 2xdx$  e do mesmo modo, fazendo  $u = y^2$  temos que  $du = 2ydy$ . Substituindo na Equação (3.1), segue que

$$\begin{aligned} \Gamma(q)\Gamma(p) &= \left( \int_0^\infty e^{-x^2}x^{2(q-1)}2xdx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2}y^{2(p-1)}2ydy \right) \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}x^{2q-1}y^{2p-1}dxdy \\ &= 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \int_0^r e^{-x^2-y^2}x^{2q-1}y^{2p-1}dxdy. \end{aligned}$$

Sejam  $R = \{(x,y) : r \geq 0, 0 \leq y \leq r\}$  e,  $B_1$  e  $B_2$  são os primeiros quadrantes dos círculos inscritos e circunscritos, respectivamente aos quadrados  $-r \leq x \leq r$  e  $-r \leq y \leq r$ . O raio de  $B_1$  é  $r$  e o de  $B_2$  é  $r\sqrt{2}$ , então

$$\int \int_{B_1} f(x,y)dxdy \leq \int \int_R f(x,y)dxdy \leq \int \int_{B_2} f(x,y)dxdy \quad (3.2)$$

em que  $\int \int_R f(x,y) dx dy = \Gamma(q)\Gamma(p)$ . Por coordenadas polares temos que  $x = \rho \cos(\theta)$ ,  $y = \rho \sin(\theta)$ , daí  $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \rho$  e  $dx dy = \rho d\rho d\theta$ . Então,

$$\begin{aligned} \int \int_{B_2} f(x,y) dx dy &= 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{r\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)} (\rho \cos \theta)^{2q-1} (\rho \sin \theta)^{2p-1} \rho d\rho d\theta \\ &= 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(q+p)-1} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2q-1} (\sin \theta)^{2p-1} d\theta, \end{aligned}$$

Seja

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2q-1} (\sin \theta)^{2p-1} d\theta$$

Fazendo  $w = \cos^2 \theta$  e  $dw = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$ , mais ainda,  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  e alterando os limites de integração pela substituição, temos que

$$A = - \int_1^0 \frac{w^{q-1} (1-w)^{p-1}}{2} dw = \frac{1}{2} \int_0^1 w^{q-1} (1-w)^{p-1} dw = \frac{1}{2} B(q,p).$$

e,

$$C = \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(q+p)-1} d\rho = \int_0^{r\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2(q+p)-1} \frac{2\rho}{2} d\rho$$

Fazendo  $v = \rho^2$  e  $dv = 2\rho d\rho$  e alterando os limites de integração pela substituição, temos que

$$C = \frac{1}{2} \int_0^{2r^2} e^{-v} v^{(q+p)-1} dv$$

Aplicando o limite, temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{2r^2} e^{-v} v^{(q+p)-1} dv = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{(q+p)-1} dv = \frac{1}{2} \Gamma(q+p).$$

Desse modo, pela Equação (3.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma(q)\Gamma(p) &= 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \int_0^r e^{-(x^2+y^2)} x^{2q-1} y^{2p-1} dx dy \\
&\leq 4 \lim_{r \rightarrow \infty} \int \int_{B_2} e^{-(x^2+y^2)} x^{2q-1} y^{2p-1} dx dy \\
&= 4 \left( \frac{1}{2} \Gamma(q+p) \right) \left( \frac{1}{2} B(q,p) \right) \\
&= \Gamma(q+p) B(q,p)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma(q)\Gamma(p) \leq \Gamma(q+p)B(q,p). \quad (3.3)$$

Considerando  $\int \int_{B_1} f(x,y) dx dy$ , e com um raciocínio análogo ao anterior concluímos que

$$\Gamma(q)\Gamma(p) \geq \Gamma(q+p)B(q,p). \quad (3.4)$$

Logo, das Desigualdades (3.3) e (3.4), segue que

$$\Gamma(q+p)B(q,p) \leq \Gamma(q)\Gamma(p) \leq \Gamma(q+p)B(q,p).$$

Pelo Teorema do Confronto, concluímos que

$$B(q,p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}, p, q > 0.$$

■

### 3.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é uma importante ferramenta matemática para resolução de problemas físicos que envolvem equações diferenciais, principalmente nas Engenharias (BOYCE, DIPRIMA, 2006), pois permite a obtenção de uma solução através de uma equação algébrica. Desse modo, será relevante para a resolução de equações envolvendo derivadas e integrais fracionárias.

**Definição 3.3** Seja  $f(t)$  uma função definida no intervalo  $0 \leq t < \infty$ . A Transformada de Laplace de  $f(t)$  denotada por  $F(s)$  ou  $\mathcal{L}[f(t)]$  é a integral

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

na qual  $s$  é o parâmetro da transformada, tal que  $Re(s) > 0$ .

A seguir estão apresentadas algumas propriedades úteis da Transformada de Laplace. As demonstrações são imediatas e podem ser encontradas em (BOYCE, DIPRIMA, 2006).

**Propriedade 3.2** Sejam  $\mathcal{L}[f] = F(s)$  e  $\mathcal{L}[g] = G(s)$  as Transformadas de Laplace das funções  $f$  e  $g$ . São válidas as afirmações:

- a)  $\mathcal{L}[af + bg] = aF(s) + bG(s)$ ,
- b)  $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a)$ , para  $s > a$ .
- c)  $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ .

**Definição 3.4** Uma função real é de ordem exponencial  $\gamma \in \mathbb{R}$ , se existirem  $M$  e  $T$ , constantes reais positivas, tais que,

$$\|f(t)\| < Me^{\gamma t},$$

para todo  $M > T$ .

**Definição 3.5** Uma função  $f$  é seccionalmente contínua em um intervalo  $a \leq t \leq b$  se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ , de modo que:

- a)  $f$  é contínua em cada subintervalo aberto  $t_{i-1} < t < t_i$ ,
- b)  $f$  tende a um limite finito quando  $t$  tende, de dentro de cada um desses subintervalos, a um dos extremos.

**Propriedade 3.3** Se  $f$  e  $f'$  são integráveis em  $[0, b]$ , para todo  $b > 0$ , e se  $f$  for também de ordem exponencial, então existe

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

Em geral, a transformada de Laplace do produto de duas funções não é o produto das transformadas das funções, porém a seguir será introduzido o conceito de produto de convolução que é um produto conveniente para que a próxima propriedade seja válida, ou seja, a transformada de Laplace do produto de convolução é igual ao produto das transformadas. Essa operação entre funções será importante no cálculo de transformadas inversas.

**Definição 3.6** Sejam  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de ordem exponencial  $q$  e  $p$ , com transformadas de Laplace  $F(s)$  e  $G(s)$ , respectivamente, no intervalo  $[0, \infty)$ . Define-se o produto de convolução de  $f(t)$  por  $g(t)$ , denotada por  $(f * g)(t)$ , como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy = \int_0^t f(y)g(t-y)dy.$$

**Propriedade 3.4** Sejam  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que existam as transformadas de Laplace de  $f$  e  $g$ ,  $\mathcal{L}[f]$  e  $\mathcal{L}[g]$ , respectivamente, então,  $\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]$ .

A demonstração pode ser encontrada em (BOYCE, DIPRIMA, 2006).

**Propriedade 3.5** O produto de convolução é associativo.

**Demonstração:** Sejam  $f, g, h$  funções de ordem exponencial. Assim, queremos mostrar que

$$((f * g) * h)(t) = (f * (g * h))(t)$$

Então,

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \int_0^t (f * g)(t-s)h(s)ds \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} f(t-s-x)g(x)dxh(s)ds \end{aligned}$$

Fazendo a substituição:  $x = u - s$ , e pelo Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(t) &= \int_0^t \int_s^t f(t-u)g(u-s)h(s)duds \\
&= \int_0^t \int_0^u f(t-u)g(u-s)h(s)dsdu \\
&= \int_0^t f(t-u) \int_0^u g(u-s)h(s)dsdu \\
&= \int_0^t f(t-u)(g * h)(u)du \\
&= (f * (g * h))(t).
\end{aligned}$$

### 3.3 INTEGRAL FRACIONÁRIA

Inicialmente será feita a formalização da integral fracionária segundo Riemann-Liouville. Em seguida, a definição de derivada fracionária será feita a partir das ideias de Riemann-Liouville e depois a de Caputo. Ambas as derivadas necessitam da definição de integral fracionária para a formulação e, por esse motivo é necessário primeiro a definição de integral fracionária e depois a de derivada fracionária. Os resultados a seguir foram baseados de (CARMARGO, OLIVEIRA, 2015).

A seguir a motivação para a definição de integral fracionária.

**Definição 3.7** Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua por partes no intervalo  $[0, \infty)$  e integrável em todo subintervalo de  $[0, \infty)$ . Denotamos por  $Jf(t)$  o operador integral da seguinte maneira

$$Jf(t) = \int_0^t f(s)ds$$

desse modo, também temos que  $J^0 f(t) = f(t)$  e  $J^k f(t) = (JJ\dots J)f(t)$ .

Observe que pelo Teorema de Fubini (BOUCHARA, 1999), temos

$$\begin{aligned}
J^2 f(t) &= (JJ)f(t) \\
&= \int_0^t Jf(s)ds \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi)d\xi ds \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)dsd\xi \\
&= \int_0^t f(\xi) \int_\xi^t dsd\xi \\
&= \int_0^t f(\xi)[s]_\xi^t d\xi \\
&= \int_0^t f(\xi)(t - \xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
J^3 f(t) &= JJ^2 f(t), \\
&= \int_0^t J^2 f(s)ds, \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi)(s - \xi)d\xi ds \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)(s - \xi)dsd\xi \\
&= \int_0^t f(\xi) \int_\xi^t (s - \xi)dsd\xi \\
&= \int_0^t f(\xi) \left[ \frac{(s - \xi)^2}{2} \right]_\xi^t d\xi \\
&= \int_0^t f(\xi) \frac{(t - \xi)^2}{2} d\xi.
\end{aligned}$$

Fazendo esse processo recursivamente, obtemos

$$J^n f(t) = \int_0^t \frac{(t - s)^{n-1}}{(n - 1)!} f(s)ds.$$

Como já visto  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ , para  $n \in \mathbb{Z}^+$ , segue

$$J^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - s)^{n-1} f(s)ds. \quad (3.5)$$

A Equação (3.5) continua bem definida para  $q > 1$ . O que motiva a seguinte definição:

**Definição 3.8** Sejam  $q \in \mathbb{C}$  com  $Re(q) > 0$  e  $f$  uma função contínua por partes em  $[0, \infty)$  e integrável em qualquer subintervalo de  $[0, \infty)$ . Então para  $t > 0$  a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $q$  é dada por

$$J^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds. \quad (3.6)$$

**Observação 3.1** Definimos  $\mathcal{C}$  como sendo a classe das funções que satisfazem a Definição 3.8. Para mais informações veja (CAMARGO, 2015).

**Exemplo 3.1** De acordo com a Definição 3.8 é possível calcular a integral de ordem arbitrária  $q$ , de  $f(t) = t^l$ , com  $l > -1$ .

De fato, seja

$$J^q t^l = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} s^l ds.$$

Fazendo a substituição  $u = \frac{s}{t}$ , obtemos

$$\begin{aligned} J^q t^l &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (t-ut)^{q-1} (ut)^l t du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 t^{q-1} (1-u)^{q-1} u^l t^{l+1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 t^q (1-u)^{q-1} u^l t^l du \\ &= \frac{t^{q+l}}{\Gamma(q)} \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^{(l+1)-1} du. \end{aligned}$$

Tomando pela Definição 3.2, temos que

$$B(q, l+1) = \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^{(l+1)-1} du$$

Logo,

$$J^q t^l = \frac{t^{q+l}}{\Gamma(q)} B(q, l+1).$$

Usando o Teorema 3.1, temos que

$$\begin{aligned} J^q t^l &= \frac{t^{q+l} \Gamma(q) \Gamma(l+1)}{\Gamma(q) \Gamma(q+l+1)} \\ &= \frac{t^{q+l} \Gamma(l+1)}{\Gamma(q+l+1)}. \end{aligned}$$

**Proposição 3.1** Seja a função de Gel'fand-Shilov dada por  $\Phi_q(t) = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}$ , para  $t > 0$ . Então  $(\Phi_q * f)(t) = J^q f(t)$ .

**Demonstração:** Pela Definição 3.7 e pela Definição 3.6 de produto convolução, temos que

$$\begin{aligned} (\Phi_q * f)(t) &= \int_0^t \Phi_q(t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\Phi_q * f)(t) = J^q f(t).$$

**Teorema 3.2** Sejam  $q, p \geq 0$  temos que  $J^q J^p = J^{q+p}$ , e mais ainda  $J^q J^p = J^p J^q$ .

**Demonstração:** Vamos mostrar que

$$\Phi_q(t) * \Phi_p(t) = \Phi_{q+p}(t).$$

Usando as funções auxiliares:  $\Phi_q(t) = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}$  e  $\Phi_p(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_q(t) * \Phi_p(t) &= \int_0^t \Phi_q(t-y) \Phi_p(y) dy \\ &= \int_0^t \frac{(t-y)^{q-1}}{\Gamma(q)} \frac{y^{p-1}}{\Gamma(p)} dy. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u = \frac{y}{t}$ , temos que

$$\begin{aligned} \Phi_q(t) * \Phi_p(t) &= \int_0^1 \frac{(t-ut)^{q-1}}{\Gamma(q)} \cdot \frac{(ut)^{p-1}}{\Gamma(p)} t du \\ &= \frac{t^{q+p-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_0^1 (1-u)^{q-1} u^{p-1} du. \end{aligned}$$

Tomando  $x = 1 - u$ , temos que

$$\begin{aligned}\Phi_q(t) * \Phi_p(t) &= \frac{t^{q+p-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_1^0 x^{q-1}(1-x)^{p-1}(-dx) \\ \Phi_q(t) * \Phi_p(t) &= \frac{t^{q+p-1}}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Multiplicando e dividindo a Equação (3.7) por  $\Gamma(q+p)$

$$\Phi_q(t) * \Phi_p(t) = \frac{t^{q+p-1}\Gamma(q+p)}{\Gamma(q)\Gamma(p)\Gamma(q+p)} \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx.\tag{3.8}$$

O integrando da Equação (3.8) é a função  $B(q,p)$ , assim,

$$\Phi_q(t) * \Phi_p(t) = \frac{t^{q+p-1}\Gamma(q+p)}{\Gamma(q)\Gamma(p)\Gamma(q+p)} B(q,p).$$

Usando o Teorema 3.1

$$\Phi_q(t) * \Phi_p(t) = \frac{t^{q+p-1}\Gamma(q+p)}{\Gamma(q)\Gamma(p)\Gamma(q+p)} \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}.$$

Então,

$$\Phi_q(t) * \Phi_p(t) = \frac{t^{q+p-1}}{\Gamma(q+p)}.$$

Logo,

$$\Phi_q * \Phi_p(t) = \Phi_{q+p}(t).\tag{3.9}$$

Pela Proposição 3.1, temos

$$(J^q f)(t) = (\Phi_q * f)(t).\tag{3.10}$$

Das Equações (3.10), (3.9) e da Propriedade 3.5, associativa da convolução, obtemos

$$\begin{aligned}(J^q J^p f)(t) &= \Phi_q(t) * J^p f(t) \\ &= \Phi_q(t) * [\Phi_p(t) * f(t)], \\ &= \Phi_{q+p}(t) * f(t).\end{aligned}$$

Portanto,

$$(J^q J^p f)(t) = (J^{q+p} f)(t).$$

A comutatividade é imediata.

### 3.4 DERIVADAS FRACIONÁRIAS

A seguir apresentaremos a definição de derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e segundo Caputo.

A definição de derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville é consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo. Sabemos desse Teorema que se  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e se  $F : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

então  $F$  é diferenciável e  $F' = f$ .

Usando a notação de integral fracionária para  $(Jf)(t) = \int_0^t f(s) ds$  e a notação  $(Df)(t) = f'(t)$  para o operador Derivada, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que  $(DJf)(t) = f(t)$ . De forma geral, é fácil ver por indução finita que para todo  $m \in \mathbb{N}$  a relação

$$(D^m J^m f)(t) = f(t), \tag{3.11}$$

é verdadeira, em que  $D^m f = (DD\dots D)f$  é a composição  $m$  vezes do operador  $D$  ou derivada de ordem  $m$  de  $f$ .

Assim, considerando que vale para algum  $m = k$  e provando que vale para  $m = k + 1$  temos, para todo  $t \in [0, b]$  que

$$\begin{aligned} (D^{k+1} J^{k+1} f)(t) &= (D^k DJ J^k f)(t) \\ &= (D^k J^k f)(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Vale lembrar que o operador Derivada satisfaz a lei dos expoentes  $D^m D^n f = D^{m+n} f$ .

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $m$  o menor inteiro maior que  $n$  e  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua

que admite derivadas até ordem  $n$ , usando a Equação (3.11) temos

$$D^{m-n} J^{m-n} f(t) = f(t).$$

Por outro lado, aplicando o operador  $D^n$  em ambos os lados

$$D^m J^{m-n} = D^n f(t),$$

como a integral fracionária pode ser definida para números não inteiros  $q > 0$ , trocando  $n$  por  $q$  na expressão acima obtemos

$$D^q f(t) = D^m J^{m-q} f(t).$$

Portanto, a discussão anterior motiva a seguinte definição formal.

**Definição 3.9** Sejam  $q > 0$  e  $n$  o menor inteiro maior que  $q$ , assim a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $q$  da função  $f$  é dada por

$${}^R D^q f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{q+1-n}}, & n-1 < q < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \text{se } q = n. \end{cases}$$

**Exemplo 3.2** A derivada de ordem  $q$  segundo Riemann-Liouville de  $f(t) = t^l$  com  $l > -1$  e  $l \neq 0$  é

$${}^R D^q f(t) = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-q+1)} t^{l-q}. \quad (3.12)$$

Com efeito, sabemos que a integral fracionária de  $t^l$  de ordem  $q$  é

$$J^q t^l = \frac{t^{q+l} \Gamma(l+1)}{\Gamma(q+l+1)}, \quad (3.13)$$

Desse modo,

$$J^{n-q} t^l = \frac{t^{n-q+l} \Gamma(l+1)}{\Gamma(n-q+l+1)}, \quad (3.14)$$

Se ao aplicar o operador derivada de ordem  $n$ , pela Definição 3.9 teremos aplicado o operador derivada de Riemann-Liouville de ordem  $q$ , ou seja,

$${}^R D^q f(t) = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(n-q+l+1)} D^n [t^{n-q+l}]. \quad (3.15)$$

Analisando  $D^n[t^{n-q+l}]$  separadamente, para se obter as derivadas sucessivas até  $n$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
D[t^{n-q+l}] &= (n-q+l)t^{n-q+l-1} \\
D^2[t^{n-q+l}] &= (n-q+l)(n-q+l-1)t^{n-q+l-2} \\
D^3[t^{n-q+l}] &= (n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2)t^{n-q+l-3} \\
&\vdots \\
D^{n-1}[t^{n-q+l}] &= (n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2) \\
&\quad \cdots (n-q+l-(n-2))t^{n-q+l-(n-1)} \\
&= (n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)t^{l-q+1} \\
D^n[t^{n-q+l}] &= (n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2) \\
&\quad (n-q+l-(n-1))t^{n-q+l-n} \\
&= (n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)(l-q+1)t^{l-q}
\end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo em (3.15) e usando a Propriedade (3.1), temos que

$$\begin{aligned}
{}^R D^q t^l &= \frac{\Gamma(l+1) [(n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)(l-q+1)t^{l-q}]}{\Gamma(n-q+l+1)} \\
&= \frac{\Gamma(l+1) [(n-q+l)(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)(l-q+1)t^{l-q}]}{(n-q+l)\Gamma(n-q+l)} \\
&= \frac{\Gamma(l+1) [(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)(l-q+1)t^{l-q}]}{\Gamma(n-q+l)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^R D^q t^l &= \frac{\Gamma(l+1) [(n-q+l-1)(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)(l-q+1)t^{l-q}]}{(n-q+l-1)\Gamma(n-q+l-1)} \\
&= \frac{\Gamma(l+1) [(n-q+l-2) \cdots (l-q+2)(l-q+1)t^{l-q}]}{\Gamma(n-q+l-1)}
\end{aligned}$$

Fazendo esse processo sucessivamente  $n$  vezes, obtemos

$${}^R D^q t^l = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-q+1)} t^{l-q}. \quad (3.16)$$

O próximo teorema refere-se ao comportamento da composição a direita e a esquerda entre a derivada e a integral de Riemann-Liouville.

**Teorema 3.3**

$$\begin{aligned} (({}^R D^q)(J^q)f)(t) &= f(t) \\ ((J^q)({}^R D^q)f)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(q-k+1)} t^{q-k} D^{m-k} J^{m-q} f(0). \end{aligned}$$

**Demonstração:** Temos que

$${}^R D^q J^q f(t) = D^m J^{m-q} J^q f(t) = D^m J^m f(t) = f(t).$$

Por outro lado, notemos que

$$\begin{aligned} (J^q)({}^R D^q)f(t) &= DJ(J^q)({}^R D^q)f(t) \\ &= D[(J^{q+1})({}^R D^q)f(t)], \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^t (t-s)^q ({}^R D^q f(s)) ds \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^t (t-s)^q D^m J^{m-q} f(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Integrando sucessivamente por partes na variável  $s$ , temos que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^t (t-s)^q D^m J^{m-q} f(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} [(t-s)^q D^{m-1} J^{m-q} f(s)]_0^t - \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_0^t -q(t-s)^{q-1} D^{m-1} J^{m-q} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} [-t^q D^{m-1} J^{m-q} f(0)] + \frac{q}{\Gamma(q)q} \int_0^t (t-s)^{q-1} D^{m-1} J^{m-q} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} [-t^q D^{m-1} J^{m-q} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(q)} [(t-s)^{q-1} D^{m-2} J^{m-q} f(s)]_0^t \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t -(q-1)(t-s)^{q-1} D^{m-2} J^{m-q} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} [-t^q D^{m-1} J^{m-q} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(q)} [-t^{q-1} D^{m-2} J^{m-q} f(0)] \\ &\quad + \frac{(q-1)}{\Gamma(q-1)(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} D^{m-2} J^{m-q} f(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} [-t^q D^{m-1} J^{m-q} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(q)} [-t^{q-1} D^{m-2} J^{m-q} f(0)] \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q-1)} \int_0^t (t-s)^{q-2} D^{m-2} J^{m-q} f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& \frac{1}{\Gamma(q+1)} [-t^q D^{m-1} J^{m-q} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(q)} [-t^{q-1} D^{m-2} J^{m-q} f(0)] \\
& + \frac{1}{\Gamma(q-1)} [-t^{q-2} D^{m-3} J^{m-q} f(0)] + \dots \\
& + \frac{1}{\Gamma(q-(m+2))} [-t^{q-(m-1)} J^{m-q} f(0)] + \frac{1}{\Gamma(q-(m-1))} \int_0^t (t-s)^{q-m} J^{q-m} f(s) ds \\
& = - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(q-(k-2))} [t^{q-(k-1)} D^{m-k} J^{m-q} f(0)] \\
& + \frac{1}{\Gamma(q-(m-1))} \int_0^t (t-s)^{q-m} J^{m-q} f(s) ds \\
& = - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(q-(k-2))} [t^{q-(k-1)} D^{m-k} J^{m-q} f(0)] + J^{q-m+1} J^{q-m} f(t) \\
& = - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(q-(k-2))} [t^{q-(k-1)} D^{m-k} J^{m-q} f(0)] + Jf(t) \\
& = (J^{q+1})({}^R D^q) f(t)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(J^q)({}^R D^q) f(t) &= D [(J^{q+1})({}^R D^q) f(t)] \\
&= \frac{d}{dt} \left[ - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(q-(k-2))} [t^{q-(k-1)} D^{m-k} J^{m-q} f(0)] + Jf(t) \right] \\
&= f(t) - \sum_{k=1}^m \frac{(q-k+1)}{(q-k+1)\Gamma(q-k+1)} [t^{q-k} D^{m-k} J^{m-q} f(0)] \\
&= f(t) - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(q-k+1)} [t^{q-k} D^{m-k} J^{m-q} f(0)].
\end{aligned}$$

A primeira definição de derivada fracionária foi a de Riemann-Liouville, mas somente com a Definição de Caputo algumas aplicações práticas foram possíveis. Para mais informações veja (CAPUTO, 1992) e (GORENFLO, MAINARDI, 1997).

**Definição 3.10** Seja  $Re(q) > 0$ , e  $n$  o menor inteiro maior que  $q$ . Desse modo, a derivada de ordem  $q$  segundo Caputo é definida por

$${}^C D^q f(t) = J^{n-q} [D^n f(t)].$$

Com exceção do índice inferior, o índice superior da integral da definição tem o mesmo significado que na derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e para  $q = n \in \mathbb{N}$  definimos

${}^C D^q = D^n$ , ou seja

$${}^C D^q f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{q+1-n}}, & n-1 < q < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \text{se } q = n. \end{cases}$$

**Observação 3.2** Note que a definição de derivada fracionária segundo Caputo é mais restritiva que a definição de Riemann-Liouville, uma vez que requer a integrabilidade da derivada de ordem  $n$  da função. Sempre que utilizarmos o operador  ${}^C D^q$  será considerado que esta hipótese é satisfeita.

**Exemplo 3.3** A derivada de ordem  $q$  segundo Caputo de  $f(t) = t^l$  com  $l > -1$  e  $l \neq 0$  é

$$\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-q+1)} t^{l+q}.$$

Com efeito, temos que

$${}^C D^q t^l = J^{n-q} [D^n t^l]$$

Analisando  $D^n t^l$  separadamente, temos

$$\begin{aligned} D^n t^l &= l(l-1)(l-2) \cdots (l-n+1) t^{l-n} \\ &= \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-n+1)} t^{l-n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^C D^q t^l &= J^{n-q} \left[ \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-n+1)} t^{l-n} \right] \\ &= \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-n+1)} J^{n-q} [t^{l-n}] \\ &= \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l-n+1)} \frac{\Gamma(l-n+1)}{\Gamma(l-q+1)} t^{l-q}. \end{aligned}$$

**Lema 3.1** É válida a seguinte relação:

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$$

**Demonstração:** Usando o Princípio da Indução Finita, temos, para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} JDf(t) &= \int_0^t Df(s)ds \\ &= f(t) - f(0) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^0 D^k f(0) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Agora, suponha que a proposição seja verdadeira para  $n = m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$J^m D^m f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Daí, vamos provar que a proposição é verdadeira para  $n = m + 1$ , logo

$$\begin{aligned} J^{m+1} D^{m+1} f(t) &= J[J^m D^m]f(t) \\ &= J \left[ D(f) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k Df(0) \frac{t^k}{k!} \right] \\ &= J \left[ Df(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1} f(0) \frac{t^k}{k!} \right] \\ &= f(t) - f(0) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k+1} f(0) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= f(t) - \frac{D^0 f(0)}{0!} - \left( \frac{Df(0)}{1!} t + D^2 \frac{f(0)}{2!} t^2 + \dots + D^m \frac{f(0)}{m!} t^m \right) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^m D^k f(0) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Portanto pelo Princípio da Indução Finita, temos que

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^m D^k f(0) \frac{t^k}{k!}.$$

**Teorema 3.4** Sejam  ${}^R D^q f(t)$  a derivada fracionária de  $f$  segundo Riemann-Liouville,  ${}^C D^q f(t)$  a derivada fracionária de  $f$  segundo Caputo, ambas de ordem  $q$ , e  $m$  o menor inteiro maior que  $q$ . Então,

$${}^R D^q f(t) = {}^C D^q f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} D^k f(0).$$

**Demonstração:** Pela definição de derivada segundo Caputo (3.10), temos que

$${}^C D^q f(t) = J^{n-q}[D^n f(t)]$$

Aplicando o operador integral em ambos os lados

$$(J^q)({}^C D^q)f(t) = J^q J^{n-q}[D^n f(t)]$$

Pelo Teorema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} (J^q)({}^C D^q)f(t) &= J^{q+n-q}[D^n f(t)] \\ &= J^n[D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.1, temos que

$$(J^q)({}^C D^q)f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!}$$

Aplicando o operador derivada

$$\begin{aligned} ({}^R D^q)(J^q)({}^C D^q)f(t) &= {}^R D^q \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!} \right] \\ &= {}^R D^q f(t) - ({}^R D^q) \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!} \\ &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{k!} ({}^R D^q) t^k. \end{aligned}$$

Da equação (3.16) sabemos

$${}^R D^q t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-q+1)} t^{k-q}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 {}^C D^q f(t) &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-q+1)} t^{k-q} \\
 &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k-q+1)} t^{k-q} \\
 &= {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{\Gamma(k-q+1)} t^{k-q}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$${}^C D^q f(t) = {}^R D^q f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(0)}{\Gamma(k-q+1)} t^{k-q}.$$

■

A próxima propriedade fornece a condição necessária e suficiente para que a derivada de Riemann-Liouville de uma função  $f$  coincida com a derivada de Riemann-Liouville de uma função  $g$ .

**Propriedade 3.6** A igualdade  ${}^R D^q f(t) = {}^R D^q g(t)$  é válida, se, e somente se,

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j}, \tag{3.17}$$

com  $t > 0$  e  $n-1 < q < n$ .

**Demonstração:** Condição necessária. Para  $n \in \mathbb{N}$ , pode-se induzir do cálculo usual que

$$\begin{aligned}
 Df(t) &= Dg(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + a_1 \\
 D^2 f(t) &= D^2 g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + a_1 t + a_2.
 \end{aligned}$$

Assim sucessivamente

$$D^n f(t) = D^n g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i. \tag{3.18}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 {}^R D^q f(t) &= {}^R D^q g(t) \Leftrightarrow \\
 D^n [J^{n-q} f(t)] &= D^n [J^{n-q} g(t)].
 \end{aligned}$$

Note que  $n$  é inteiro, então da Expressão 3.18, podemos escrever

$$J^{n-q} f(t) = [J^{n-q} g(t)] + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i.$$

Aplicando o operador derivada de Riemann-Liouville de ordem  $n - q$  em ambos os lados e usando o Teorema 3.3 temos,

$$\begin{aligned} {}^R D^{n-q} J^{n-q} f(t) &= {}^R D^{n-q} \left[ J^{n-q} g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right] \\ f(t) &= {}^R D^{n-q} [J^{n-q} g(t)] + {}^R D^{n-q} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(t) = g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i ({}^R D^{n-q})[t^i]. \quad (3.19)$$

Analisando  ${}^R D^{n-q}[t^i]$  da Equação 3.19 e usando o exemplo da Equação 3.16, obtemos

$$\begin{aligned} {}^R D^{n-q} t^i &= \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i - (n-q) + 1)} t^{-n+q+i} \\ &= \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-n+q+1)} t^{-n+q+i}. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na Equação 3.19 temos,

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left[ \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i-n+q+1)} t^{-n+q+i} \right] \\ &= g(t) + \frac{a_0 \Gamma(1) t^{q-n}}{\Gamma(q-n+1)} + \frac{a_1 \Gamma(2) t^{q-n+1}}{\Gamma(q-n+2)} + \dots + \frac{a_{n-1} \Gamma(n) t^{q-1}}{\Gamma(q)} \\ &= g(t) + c_1 t^{q-1} + c_2 t^{q-2} + \dots + c_n t^{q-n} \\ &= g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j}. \end{aligned}$$

Condição suficiente. Aplicando o operador derivada de Riemann-Liouville de ordem  $q$  em

ambos os lados da Equação 3.17

$${}^R D^q f(t) = {}^R D^q g(t) + {}^R D^q \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j} \right]. \quad (3.20)$$

Então, o segundo termo do lado direito da Equação 3.20 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} {}^R D^q \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j} \right] &= D^n \left[ J^{n-q} \left( \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j} \right) \right] \\ &= D^n \sum_{j=1}^n c_j J^{n-q} [t^{q-j}]. \end{aligned}$$

De acordo com o Exemplo 3.1 segue que

$$\begin{aligned} {}^R D^q \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j} \right] &= D^n \sum_{j=1}^n c_j \left[ \frac{t^{n-j} \Gamma(q-j+1)}{\Gamma(n-j+1)} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left( c_j \frac{\Gamma(q-j+1)}{\Gamma(n-j+1)} D^n [t^{n-j}] \right). \end{aligned}$$

Mas

$$D^n [t^{n-j}] = 0,$$

então, segue que

$${}^R D^q \left[ \sum_{j=1}^n c_j t^{q-j} \right] = 0.$$

Portanto, de (3.20) concluímos o resultado

$${}^R D^q f(t) = {}^R D^q g(t).$$

■

A próxima propriedade fornece a condição para que a derivada segundo Caputo da função  $f$  seja igual a derivada segundo Caputo da função  $g$  (GORENFLO, MAINARDI, 1997).

**Teorema 3.5** A igualdade  ${}^C D^q f(t) = {}^C D^q g(t)$  é válida, se, e somente se,

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{n-j}$$

com  $t > 0$  e  $n - 1 < q < n$ .

**Demonstração:** Condição Necessária. Suponhamos que  ${}^C D^q f(t) = {}^C D^q g(t)$  então,

$$J^{n-q} D^n f(t) = J^{n-q} D^n g(t)$$

Aplicando o operador integral de ordem  $q$  em ambos os lados, isto é,

$$J^n D^n f(t) = J^n D^n g(t)$$

Pelo Lema 3.1, segue que

$$\begin{aligned} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) \frac{t^k}{k!} &= g(t) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k g(0) \frac{t^k}{k!} \\ \Rightarrow f(t) &= g(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k(f(0) - g(0))}{k!} t^k \end{aligned}$$

Assim, tomando  $c_j = \frac{D^j(f(0)-g(0))}{j!}, j = 1, \dots, m$ . Teremos,

$$f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{n-j}.$$

Condição Suficiente. Se  $f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^n c_j t^{n-j}$ , e aplicando a derivada segundo Caputo de ordem  $q$ , segue que

$$\begin{aligned} {}^C D^q f(t) &= {}^C D^q g(t) + \sum_{j=1}^n c_j ({}^C D^q) t^{n-j} \\ &= {}^C D^q g(t) + \sum_{j=1}^n c_j J^{n-q} [D^n t^{n-j}]. \end{aligned}$$

Como, se  $D^n t^{n-j} = 0$  então  $\sum_{j=1}^n c_j J^{n-q} [D^n t^{n-j}] = 0$ , segue que

$${}^C D^q f(t) = {}^C D^q g(t).$$

■

### 3.5 FUNÇÕES DE MITTAG-LEFFLER

As funções de Mittag-Leffler são importantes funções relacionadas ao cálculo de ordem não inteira. Essas funções generalizam a função exponencial. As variáveis podem ser complexas, ou seja, será considerado  $z \in \mathcal{C}$  e real quando considerado  $x \in \mathbb{R}$ . As definições da Função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros são baseadas em Camargo, (2015).

**Definição 3.11** A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é dada por

$$E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk + 1)},$$

para  $z \in \mathbb{C}$  e  $\text{Re}(z) > 0$ .

**Observação 3.3** No caso em que  $q = 1$ , e  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Dessa forma, podemos entender a função de Mittag-Leffler como uma generalização da função exponencial.

**Definição 3.12** A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é dada por

$$E_{q,p}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk + p)}$$

para  $z \in \mathbb{C}$  e  $\text{Re}(z) > 0$ .

**Observação 3.4** Se  $p = 1$ , então  $E_{q,1}(z) = E_q(z)$ .

Imediatamente da definição de Função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros temos as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.7**  $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos h(z).$

**Propriedade 3.8**  $E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k + 1)!} = \frac{\sin h(z)}{z}.$

**Teorema 3.6** Consideremos a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros  $E_{q_1, q_2}(z)$ , para  $q_1, q_2 > 0$ . A série de potências definida por  $E_{q_1, q_2}(z)$  é convergente para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Em outras palavras,  $E_{q_1, q_2}$  é uma função inteira.

A demonstração pode ser encontrada em Diethelm (2013) e Dumbar (2009).

**Lema 3.2** A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros satisfaz a seguinte identidade

$$E_{p, q}(z) = zE_{p, p+q}(z) + \frac{1}{\Gamma(q)}. \quad (3.21)$$

A demonstração pode ser encontrada em (DIETHELM, 2004).

### 3.6 TRANSFORMADA DE LAPLACE DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Introduzimos agora, os conceitos de Transformada de Laplace da para a integral fracionária e para as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo, bem como a transformada de Laplace inversa para as derivadas.

**Lema 3.3 (Teorema do Valor Final)** Suponhamos que  $f(t)$  é contínua para  $t \geq 0$  e  $f'(t)$  é seccionalmente contínua e de ordem exponencial, isto é,

$$|f'(t)| \leq Me^{at},$$

para todo  $t \geq 0$ . Desse modo, se  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  é finito, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s),$$

em que  $F(s)$  é a Transformada de Laplace de  $f(t)$ .

**Demonstração:** Temos que

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \quad (3.22)$$

Integrando a Equação (3.22) por partes com

$$u = e^{-st} \Rightarrow du = -se^{-st}$$

$$dv = \frac{df(t)}{dt} dt \Rightarrow v = f(t),$$

temos que

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( e^{-st} f(t) \Big|_0^b - \int_0^b -s f(t) e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-bt} f(t) - f(0) + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b s f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + sF(s). \end{aligned}$$

Desse modo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ISNARD, 2007), temos que

$$\left| e^{-st} \frac{df(t)}{dt} \right| \leq M e^{-(s-a)t},$$

para  $t \geq 0$ . É fácil ver que  $M e^{-(s-a)t} \in L^1([0, A])$  para todo  $A$  fixo. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s) - f(0)) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{df(t)}{dt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (f(A) - f(0)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} f(A).$$

■

**Lema 3.4** A Transformada de Laplace da integral fracionária é dada por

$$\mathcal{L}[J^q f(t)] = s^{-q} \mathcal{L}[f(t)].$$

**Demonstração:** Seja  $\Phi_q(t) = \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)}$ . Usando a definição de Transformada de Laplace e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\Phi_q](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \Phi_q(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} dt\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte substituição:  $st = u$  e mudando os limites de integração temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\Phi_q](s) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{bs} e^{-u} \frac{\left(\frac{u}{s}\right)^{q-1}}{\Gamma(q)} \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{bs} e^{-u} \frac{u^{q-1}}{s^{q-1}} \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{bs} e^{-u} \frac{u^{q-1}}{s^q} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q) s^q} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{q-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q) s^q} \Gamma(q) \\ &= s^{-q}.\end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 3.1, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J^q f(t)] &= \mathcal{L}[\Phi_q(t) * f(t)] \\ &= \mathcal{L}[\Phi_q(t)] \mathcal{L}[f(t)] \\ &= s^{-q} \mathcal{L}[f(t)].\end{aligned}$$

**Teorema 3.7** Seja  $f(t) = t^{p-1} E_{q,p}(at^q)$ , a Transformada de Laplace dessa função é

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^{q-p}}{s^q - a}.$$

**Demonstração:** Como  $E_{q,p}(at^q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^q)^k}{\Gamma(qk+p)}$ . Pela definição de Transformada de Laplace

temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{p-1} E_{q,p}(at^q) dt \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at^q)^k}{\Gamma(qk+p)} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(qk+p)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t^{qk+p-1} dt
 \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $st = u$  e utilizando a convergência da série geométrica, segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(qk+p)} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{sb} e^{-u} \frac{u^{qk+p-1}}{s^{qk+p-1}} \frac{du}{s} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(qk+p) s^{qk+p}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{sb} e^{-u} u^{qk+p-1} du \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(qk+p) s^{qk+p}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{qk+p-1} du \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(qk+p) s^{qk+p}} \Gamma(qk+p) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^p s^{qk}} \\
 &= \frac{1}{s^p} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^q}\right)^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{s^p} \frac{s^q}{s^q - a} \\
 &= \frac{s^{q-p}}{s^q - a}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s^{q-p}}{s^q - a}.$$

■

**Propriedade 3.9** É válida a seguinte relação:

$$\mathcal{L}[D^m f(t)] = s^m \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} D^{(k)} f(0) s^{m-1-k}.$$

A demonstração é feita utilizando indução finita e pode ser encontrada em Camargo (2009).

**Teorema 3.8** A transformação de Laplace da Derivada de Caputo de ordem  $q$  é dada por

$$\mathcal{L}[{}^C D^q f(t)] = s^q F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k f(0) s^{q-k-1},$$

em que  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ .

**Demonstração:** Pela Definição 3.10 e aplicando a Transformada de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^C D^q f(t)] &= \mathcal{L}[J^{n-q}(D^n f(t))] \\ &= s^{-n+q} \mathcal{L}[D^n f(t)]. \end{aligned}$$

Usando a Propriedade 3.9, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^C D^q f(t)] &= s^{-n+q} \left[ s^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) s^{n-1-k} \right] \\ &= s^q \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) s^{q-1-k} \\ &= s^q F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k f(0) s^{q-1-k}. \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.9** A Transformada de Laplace da Derivada de Riemman-Liouville de ordem  $q$  é dada por

$$\mathcal{L}[{}^R D^q f(t)] = s^q F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} D^{(k)} J^{n-q} f(0) s^{n-k-1},$$

em que  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ .

**Demonstração:** Pela Definição 3.9 e aplicando a Transformada de Laplace vem

$$\mathcal{L}[{}^R D^q f(t)] = \mathcal{L}[D^n (J^{n-q} f(t))].$$

Usando a Propriedade 3.9 e juntamente com o Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[{}^R D^q f(t)] &= s^n [s^{-n+q} \mathcal{L}[f(t)]] - \sum_{k=0}^{n-1} D^k J^{n-q} f(0) s^{n-1-k} \\ &= s^q F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} D^k J^{n-q} f(0) s^{n-1-k}.\end{aligned}$$

■

**Definição 3.13** Sejam  $f(s) = \frac{s^{q-p}}{s^q - a}$  e  $g(s) = \frac{s^{q-p}}{s^q + a}$ . A Transformada de Laplace inversa dessas funções são, respectivamente:

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = t^{p-1} E_{q,p}(at^q) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}[g(s)] = t^{p-1} E_{q,p}(-at^q).$$

**Teorema 3.10** A Transformada de Laplace inversa de  ${}^C D^q f(t)$  e  ${}^R D^q f(t)$  são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[ s^q F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k f(0) s^{q-k-1} \right] &= {}^C D^q f(t) \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ s^q F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{m-q} f(0) s^{m-1-k} \right] &= {}^R D^q f(t).\end{aligned}$$

## 4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM FRACIONÁRIA

Nesta seção estudamos a existência e unicidade de soluções para um sistema de equações de ordem fracionária com condição inicial (PVI). Assim como é estudado para o caso ordinário, (BARREIRA, VALLS, 2012) e (BRAUER, NOHEL, 1989), também iremos estudar o caso fracionário. Para a concepção desses resultados usamos como referência o trabalho de Zhou, (2009).

### 4.1 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Considere o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde a derivada fracionária utilizada é a derivada de Caputo com  $q \in (0,1)$ . A função  $f(t, x(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é chamada de campo vetorial com dimensão  $m \geq 1$ . Como estamos trabalhando com a norma da convergência uniforme  $\|\cdot\|$  temos que  $\mathbb{R}^m$  é um espaço métrico completo.

Lembramos que neste caso a definição de derivada fracionária de Caputo para  $q \in (0,1)$  é dada por

$${}^C D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q} x'(s) ds. \quad (4.2)$$

Sejam:

- a)  $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ .
- b)  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$ .
- c)  $E = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in J, x \in B\}$ .

**Definição 4.1** A função  $x \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$  é uma solução do PVI (4.1), se  $x$  satisfaz a equação  ${}^C D^q x(t) = f(t, x(t))$  em  $J$  e a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ .

**Definição 4.2** O conjunto  $BC(D, X)$  é o espaço das funções contínuas e limitadas entre os espaços métricos  $D$  e  $X$  com a norma do supremo sobre  $D$ .

Serão apresentados alguns lemas que serão utilizados em resultados posteriores.

**Lema 4.1** Suponhamos que  $f(t,x(t))$  é uma função contínua. Então, o Problema de Valor Inicial (4.1) é equivalente à equação integral não linear de Volterra de segundo tipo

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s)) ds. \quad (4.3)$$

Toda solução da equação integral de Volterra (4.3) é também uma solução do PVI original (4.1).

**Demonstração:** Sabemos pela definição de derivada de Caputo que

$${}^C D^q f(t) = J^{1-q} Df(t),$$

com  $0 < q < 1$ . Logo, aplicando o operador  $J^q$  temos que

$$J D x(t) = J^q f(t,x(t)),$$

Isso implica que

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s)) ds.$$

Portanto,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s)) ds. \quad \blacksquare$$

As seguintes definições podem ser encontradas em (BOTELHO, PELLEGRINO, TEIXEIRA, 2015) e (MUNKRES, 2000) e será utilizada nos próximos resultados que tratam de existência, unicidade e prolongamento de soluções.

**Definição 4.3** A família  $\mathcal{C} = \{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  de funções definidas em  $C(D,X)$  é dita equicontínua em  $x_0 \in D$  se, para cada  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que se  $\|x - x_0\| \leq \delta$  então

$$\|f_\gamma(x) - f_\gamma(x_0)\| \leq \epsilon,$$

com  $\gamma \in \Gamma$  e  $x \in D$ . A família  $\mathcal{C}$  é dita ser equicontínua se for equicontínua em cada ponto de  $D$ .

**Definição 4.4** Seja  $(Y,d)$  um espaço métrico. O subespaço  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}(X,Y)$  é dito ser pontual-

mente limitado na métrica  $d$  se para cada  $x \in X$ , temos que o subconjunto

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) | f \in \mathcal{F}\}$$

de  $Y$  é limitado na métrica  $d$ .

**Teorema 4.1 (Teorema de Ascoli)** Sejam  $X$  um espaço compacto e  $(\mathbb{R}, d)$  um espaço euclidiano na métrica quadrada ou euclidiana e  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$  o espaço topológico correspondente. O subespaço  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$  é compacto e fechado se, e somente se,  $\mathcal{F}$  é equicontínuo e pontualmente limitado na métrica  $d$ .

**Definição 4.5** Uma função  $A : D \rightarrow X$  é dita ser completamente contínua se for contínua e compacta.

**Teorema 4.2 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)** Seja  $U$  um subconjunto fechado, limitado e convexo de um espaço de Banach  $X$ . Suponhamos que  $T : U \rightarrow U$  é completamente contínuo. Então,  $T$  terá, pelo menos, um ponto fixo em  $U$ .

**Demonstração:** Pode ser encontrada em (ZEIDLER, 1986).

**Lema 4.2** A função  $a(t) = (t - 1)^p - (t^p - 1)$  é decrescente com  $p \geq 1$  e além disso, se dados  $t_1, t_2$ , com  $0 < t_1 < t_2$ , então

$$(t_2^p - t_1^p) \geq (t_2 - t_1)^p.$$

Se  $p < 1$ , então a função  $a(\cdot)$  é crescente e dados  $t_1, t_2$  com  $0 < t_1 < t_2$ , então

$$(t_2^p - t_1^p) \leq (t_2 - t_1)^p.$$

**Demonstração:** Seja  $p \geq 1$ . Derivando a função  $a$ , temos

$$a'(t) = p [(t - 1)^{p-1} - t^{p-1}] < 0, \quad t \geq 1,$$

logo,  $a(t)$  é decrescente para  $t \geq 1$  e temos que  $a(t) \leq a(1) = 0$ . Considerando  $0 < t_1 \leq t_2$ , então  $\frac{t_2}{t_1} \geq 1$ , portanto,

$$\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)^p - \left(\frac{t_2^p}{t_1^p} - 1\right) \leq 0$$

de onde segue que

$$\frac{(t_2 - t_1)^p}{t_1^p} - \frac{(t_2^p - t_1^p)}{t_1^p} \leq 0 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^p \leq t_2^p - t_1^p.$$

Se  $p < 1$ , procedendo como o caso anterior obtemos que  $a'(t) > 0$ , o resto da demonstração segue de forma análoga ao caso anterior considerando a desigualdade apropriada.

**Proposição 4.1 (Desigualdade de Hölder para integrais)** Sejam  $1 < p, q < \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (Conjugados de Lebesgue), e as funções  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $f \in L^p(D)$  e  $g \in L^q(D)$  então,

$$\left| \int_D (f(x)g(x)) dx \right| \leq \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_D |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Observemos que a desigualdade implica em  $fg \in L^1(D)$ .

Agora apresentamos o primeiro resultado de existência dessa seção, disponível em (ZHOU, 2009).

**Teorema 4.3** Assuma que a função  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz as seguintes condições do tipo de Carathéodory:

- $f(t, x)$  é mensurável por Lebesgue com respeito à variável  $t$  em  $J$ .
- $f(t, x)$  é contínua com respeito à variável  $x$  em  $B$ .
- Existe uma constante  $\beta \in (0, q)$  e uma função real  $m(t) \in L^{\frac{1}{\beta}}(J)$  tal que

$$\|f(t, x)\| \leq m(t),$$

para quase todo  $t \in J$  e para todo  $x \in B$ .

Então, para  $q \in (0, 1)$ , existe pelo menos uma solução para o PVI (4.1) no intervalo  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , onde  $h = \min \left\{ a, \left[ \frac{b\Gamma(q)}{M} \left( \frac{q-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{q-\beta}} \right\}$  e  $M = \left( \int_{t_0}^{t_0+a} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta}$ .

**Demonstração:** Para o PVI (4.1) somente será discutido o caso  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Uma abordagem similar pode ser usada para verificar o caso  $[t_0 - h, t_0]$ .

Sabemos que  $f(t, x(t))$  é Lebesgue mensurável em  $[t_0, t_0 + h]$  de acordo com as condições (a) e (b). Cálculos diretos mostram que

$$(t - s)^{q-1} \in L^{\frac{1}{1-\beta}}[t_0, t],$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . De acordo com a Desigualdade de Hölder para Integrais, Teorema 4.1, obtemos que  $(t - s)^{q-1} f(s, x(s))$  é Lebesgue integrável com respeito à  $s \in [t_0, t]$  para todo  $t \in [t_0, t_0 + h]$  e,

$$\int_{t_0}^t \|(t - s)^{q-1} f(s, x(s))\| ds \leq \left( \int_{t_0}^t ((t - s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta}$$

Para  $x \in C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$  definimos a norma  $\|x\| = \sup_{s \in [t_0, t_0 + h]} \|x(s)\|$ . Então  $C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$  com a norma  $\|\cdot\|$  é um espaço de Banach.

Seja  $\Omega = \{x \in C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n) : \|x - x_0\| \leq b\}$ . Então,  $\Omega$  é fechado, limitado e é um subconjunto convexo de  $C([t_0, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$ .

É fácil ver que  $\Omega$  é convexo, pois

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)x_1(t) + \lambda x_2(t) - x_0\| &= \|(1 - \lambda)x_1(t) + \lambda x_2(t) - x_0 + \lambda x_0 - \lambda x_0\| \\ &= \|(1 - \lambda)x_1(t) - (1 - \lambda)x_0 + \lambda(x_2(t) - x_0)\|, \\ &\leq (1 - \lambda)\|x_1(t) - x_0\| + \lambda\|x_2(t) - x_0\| \\ &\leq (1 - \lambda)b + \lambda b = b. \end{aligned}$$

O que implica que  $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$ , com  $\lambda \in [0, 1]$ .

Para cada elemento  $x \in \Omega$ , seja

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

para todo  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Mostremos que para qualquer  $x \in \Omega$ , temos que  $Tx \in \Omega$ . Para isso, utilizando a Desigualdade de Hölder e a condição (c) obtemos

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - x_0| &= \left| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t |(t-s)^{q-1} f(s, x(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta}
\end{aligned}$$

Resolvendo a primeira integral e fazendo a seguinte substituição  $w = t - s, dw = -ds$  temos

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} ds = \int_{t-t_0}^0 w^{\frac{q-1}{1-\beta}} (-dw) = \int_0^{t-t_0} w^{\frac{q-1}{1-\beta}} dw = \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) (t-t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|(Tx)(t) - x_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) (t-t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t-t_0)^{q-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} h^{q-\beta} M \\
&\leq b,
\end{aligned}$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Isso significa que  $\|Tx - x_0\| \leq b$ . Então,  $T$  é uma função de  $\Omega$  nele mesmo.

Mostremos que  $T$  é completamente contínuo. Primeiramente, o operador  $T$  é contínuo.

Assim, para qualquer  $x_m, x \in \Omega, m = 1, 2, \dots$ , com  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x\| = 0$ , temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t) = x(t),$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Assim, da condição (b), temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(t, x_m(t)) = f(t, x(t)),$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Das condições (a) e (c) temos que

$$\int_{t_0}^t |(t-s)^{q-1} f(s, x_m(s))| ds \leq \left( \int_{t_0}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} < \infty.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada (ISNARD, 2007) obtemos

$$\|(Tx_m)(t) - (Tx)(t)\| = \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, x_m(s)) - f(s, x(s))] ds \right\| \rightarrow 0,$$

quando  $m \rightarrow \infty$ .

Isso significa que  $T$  é contínua. Agora mostremos que  $T(\Omega)$  é relativamente compacto.

Verificamos  $\Omega$  é fechado, para isto tomemos  $\{x_n\}$  uma sequência em  $\Omega$ . Então,

$$\|x_n(t) - x_0\| \leq b,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x_n(t) \rightarrow x$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - x_0\| \leq b &\Rightarrow \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) - x_0 \right\| \leq b \\ &\Rightarrow \|x - x_0\| \leq b \\ &\Rightarrow x \in \Omega. \end{aligned}$$

Logo,  $\Omega$  é fechado. Assim, pelo Teorema 4.1 é suficiente mostrar que a família de funções  $\{Tx : x \in \Omega\}$  é pontualmente limitada e equicontínua em  $[t_0, t_0 + h]$ .

Para  $x \in \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t)\| &= \|(Tx)(t) - x_0 + x_0\| \\ &\leq \|(Tx)(t) - x_0\| + \|x_0\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} h^{q-\beta} M + \|x_0\| \\ &\leq b + \|x_0\|. \end{aligned}$$

O que significa que  $\{Tx : x \in \Omega\}$  é uniformemente limitada. Por outro lado, para quaisquer  $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + h]$ , com  $t_1 < t_2$  e usando a Desigualdade de Hölder juntamente com o Lema

4.2, temos que

$$\begin{aligned}
& \|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)\| = \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} \|(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\| f(s, x(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \|(t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s))\| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] m(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_1} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_1}^{t_2} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} - (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}}] ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}}] ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_1 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_1}^{t_0} - (t_2 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_1}^{t_0} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_2}^{t_1} \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_1 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t_2 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( - \left( (t_2 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t_1 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right) + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( -(t_2 - t_0 - t_1 + t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2 - t_1)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( -(t_2-t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2-t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2-t_1)^{1-\beta} \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2-t_1)^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Quando  $t_1 \rightarrow t_2$ , o lado direito da desigualdade acima tende a zero, então  $\{Tx : x \in \Omega\}$  é equicontínuo em  $[t_0, t_0 + h]$ . Portanto  $T(\Omega)$  é relativamente compacto. Pelo Teorema do Ponto Fixo Schauder, Teorema 4.2, existe  $x^* \in \Omega$ , tal que,  $Tx^* = x^*$  assim,

$$x^*(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x^*(s)) ds,$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Portanto,  $x^*$  é uma solução para o PVI em  $[t_0, t_0 + h]$ . ■

A demonstração do próximo Corolário é semelhante à do Teorema 4.3.

**Corolário 4.1** Seja  $f \in C(J \times B, \mathbb{R}^n)$ . Então, para  $q \in (0, 1)$ , existe pelo menos uma solução para o PVI (4.1) no intervalo  $[t_0 - h', t_0 + h']$ , onde  $h' = \min \left\{ a, \left[ \frac{b}{M'} \Gamma(q+1) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$  e  $M' = \sup_{(t,x) \in J \times B} f(t, x)$ .

O próximo Teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em (BOTELHO, PELLEGRINO, TEIXEIRA, 2015), diz que toda contração possui um ponto fixo.

**Teorema 4.4 (Princípio da Contração de Banach)** Sejam  $S$  um espaço métrico completo. Se  $T : S \rightarrow S$  é uma contração, então  $T$  possuirá um ponto fixo. Além disso, se  $x^*$  é um ponto fixo de  $T$  e para todo  $x \in S$ , temos que

$$\|T^m(x) - x^*\| \rightarrow 0.$$

**Teorema 4.5** Suponhamos que as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema 4.3 sejam válidas. Assumamos ainda que

d) Existem uma constante  $\gamma \in (0, q)$  e uma função real  $\mu(t) \in L^{\frac{1}{\gamma}}[t_0, t_0 + a]$ , tal que,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \mu(t) \|x - y\|,$$

para todo  $t \in J$  e para todo  $x, y \in B$ .

Então, existirá uma única solução para o PVI (4.1) em  $[t_0 - h_1, t_0 + h_1]$ , onde

$$h_1 < \min \left\{ a, h, \left[ \frac{\Gamma(q)}{M_1} \left( \frac{q - \gamma}{1 - \gamma} \right)^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{q-\gamma}} \right\} \text{ e } M_1 = \left( \int_{t_0}^{t_0+a} (\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right)^\gamma$$

**Demonstração:** Seja  $\Omega = \{x \in C([t_0, t_0 + h_1], \mathbb{R}^n) : \|x - x_0\| \leq b\}$ . Para cada elemento  $x \in \Omega$ , seja:

$$(Tx)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds,$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h_1]$ . Da mesma forma que provamos no Teorema 4.3, temos que  $T(\Omega) \subset \Omega$ .

Por outro lado, vamos mostrar que o operador  $T$  é uma contração em  $\Omega$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \mu(s) ds \right) \max_{s \in [t_0, t_0+h_1]} \|x(s) - y(s)\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \mu(s) ds \right) \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\gamma}} ds \right)^{1-\gamma} \left( \int_{t_0}^t (\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right)^\gamma \|x - y\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\gamma}{q-\gamma} \right)^{1-\gamma} (t-t_0)^{q-\gamma} \left( \int_{t_0}^{t_0+h_1} (\mu(s))^{\frac{1}{\gamma}} ds \right)^\gamma \|x - y\| \end{aligned}$$

$$\|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| \leq \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\gamma}{q-\gamma} \right)^{1-\gamma} h_1^{q-\gamma} \|x - y\|,$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h_1]$ . Isso implica que

$$\|Tx - Ty\| \leq C \|x - y\|,$$

onde  $C = \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\gamma}{q-\gamma} \right)^{1-\gamma} h_1^{q-\gamma} \in (0, 1)$ . Por isso,  $T$  é uma contração. Pelo Princípio de Contração,  $T$  tem o único ponto fixo  $x$ , que é uma solução do PVI (4.1) em  $[t_0, t_0 + h_1]$ . ■

A demonstração do próximo Corolário é semelhante à do Teorema 4.5.

**Corolário 4.2** Seja  $f \in C(J \times B, \mathbb{R}^n)$ . Assumamos que existe uma constante  $L > 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|,$$

para quase todo  $t \in J$ , e para todo  $x, y \in B$ . Então, para  $q \in (0,1)$ , então existe uma única solução do PVI (4.1) no intervalo  $[t_0 - h'_1, t_0 + h'_1]$  onde  $h'_1 < \min \left\{ a, h', \left[ \frac{1}{L} \Gamma(q+1) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$ .

**Teorema 4.6** Assumamos que a condição (iv) do Teorema 4.5 continue válida. Se a solução do PVI (4.1) existe em  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , então a solução do PVI (4.1) é única, onde  $h \leq \min \left\{ a, \left[ \frac{\Gamma(q)}{M_1} \left( \frac{q-\gamma}{1-\gamma} \right)^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{q-\gamma}} \right\}$

**Demonstração:** Assuma que  $y(t)$  e  $x(t)$  sejam soluções do PVI (4.1) em  $[t_0, t_0 + h]$ . Então, para  $t \in [t_0, t_0 + h]$  temos que

$$y(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds,$$

e

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds,$$

Daí,

$$\|y(t) - x(t)\| = \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds \right\|,$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . De (iv), temos que

$$\|y(t) - x(t)\| \leq C \max_{s \in [t_0, t_0 + h]} \|y(s) - x(s)\|,$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ , em que  $C = \frac{M_1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\gamma}{q-\gamma} \right)^{1-\gamma} h_1^{q-\gamma} \in (0,1)$ . Então,

$$\max_{s \in [t_0, t_0 + h]} \|y(t) - x(t)\| \leq C \max_{s \in [t_0, t_0 + h]} \|y(s) - x(s)\|,$$

para  $t \in [t_0, t_0 + h]$ . Isso implica que

$$x(t) \equiv y(t), t \in [t_0, t_0 + h].$$

■

## 4.2 PROLONGAMENTO DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS DE ORDEM FRACIONÁRIA

Nesta seção iremos estudar alguns resultados que descrevem o prolongamento de solução para o Problema de Valor Inicial Fracionário (4.1), a ideia é estender os Teoremas de prolongamento de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias para equações diferenciais fracionárias segundo a derivada de Caputo pelos resultados apresentados em (LI, SARWAR, 2016).

**Definição 4.6** Sejam  $x = x(t)$ ,  $t$  em  $(0, \gamma)$  e  $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ ,  $t$  em  $(0, \tilde{\gamma})$  ambas soluções de (4.1). Se  $\gamma < \tilde{\gamma}$  e  $x(t) = \tilde{x}(t)$  para  $t \in (0, \gamma)$ , então dizemos que  $\tilde{x}(\cdot)$  é um prolongamento de  $x(\cdot)$ . Diremos que  $x(\cdot)$  é não prolongável se não tiver prolongamento. A existência de um intervalo em que a solução  $x(\cdot)$  não prolongável é chamado de intervalo máximo de existência de  $x(\cdot)$ .

O próximo resultado, semelhante a equações diferenciais ordinárias, nos diz que se uma solução é não prolongável em um intervalo finito, então a função tende a fronteira do domínio do campo, isto é, o gráfico escapa de compactos contidos no domínio do campo. Nos próximos resultados, por simplicidade, faremos  $t_0 = 0$ .

**Teorema 4.7** Assumamos que as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema de Existência 4.3 sejam válidas. Considere  $x : (0, \gamma) \rightarrow E$  uma solução de (4.1) com  $\gamma < +\infty$ , se  $x = x(t)$ ,  $t \in (0, \gamma)$  é não prolongável então, para algum  $\eta \in (0, \frac{\gamma}{2})$  e cada subconjunto compacto  $S \subset [\eta, \gamma] \times B$  existe algum  $t^* \in [\eta, \gamma)$  tal que  $(t^*, x(t^*)) \notin S$ .

**Demonstração:** A demonstração deste Teorema será feito em duas partes. Primeiro, suponhamos por contradição que exista um subconjunto compacto  $S \subset [\eta, \gamma) \times B$  tal que

$$\{(t, x(t)) : t \in [\eta, \gamma)\} \subset S.$$

*Passo 1:* Vamos mostrar que existe  $\lim_{t \rightarrow \gamma^-} x(t)$ . Para quaisquer  $t_1, t_2 \in [2\eta, \gamma)$ , com  $t_1 < t_2$ , e usando a Desigualdade de Hölder e o Lema 4.2 temos que:

$$\begin{aligned}
& \|x(t_2) - x(t_1)\| = \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{t_0}^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} \left\| [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] f(s, x(s)) \right\| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \left\| (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) \right\| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] m(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_1} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_1}^{t_2} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} - (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}}] ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}}] ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_1 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_1}^{t_0} - (t_2 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_1}^{t_0} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_2}^{t_1} \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_1 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t_2 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( - \left( (t_2 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t_1 - t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right) + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( -(t_2 - t_0 - t_1 + t_0)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2 - t_1)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( -(t_2-t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2-t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2-t_1)^{1-\beta} \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2-t_1)^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Quando  $t_1 \rightarrow t_2$ , o lado direito da desigualdade acima tende a zero, portanto pelo critério de convergência de Cauchy, segue que  $\lim_{t \rightarrow \gamma^-} x(t) = x^*$ .

*Passo 2:* Neste passo vamos mostrar que  $x(\cdot)$  é prolongável. Como  $S$  é um subconjunto fechado, temos que  $(\gamma, x^*) \in S$ . Defina  $x(\gamma) = x^*$ . Então  $x(t) \in C([0, \gamma], B)$  e consideremos

$$E_h = \left\{ y \in C([\gamma, \gamma + h], B) : \sup_{t \in [\gamma, \gamma + h]} \|y(t) - x_1(t)\| \leq b, y(\gamma) = x_1(\gamma) \right\},$$

onde  $h = \min \left\{ a, \left[ \frac{b\Gamma(q)}{M} \left( \frac{q-\beta}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \right]^{\frac{1}{q-\beta}} \right\}$ , e  $x_1(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\gamma (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds$ .

Além disso, definimos o seguinte operador

$$(Sy)(t) = x_1(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_\gamma^t (t-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds.$$

Notemos que  $E_h$  é convexo, pois

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)y_1(t) + \lambda y_2(t) - x_1(t)\| &= \|(1-\lambda)y_1(t) + \lambda y_2(t) - x_1(t) + \lambda x_1(t) - \lambda x_1(t)\| \\
&= \|(1-\lambda)y_1(t) - (1-\lambda)x_1(t) + \lambda(y_2(t) - x_1(t))\| \\
&\leq (1-\lambda)\|y_1(t) - x_1(t)\| + \lambda\|y_2(t) - x_1(t)\| \\
&\leq (1-\lambda)b + \lambda b = b.
\end{aligned}$$

O que implica  $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in E_h$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$ . Por outro lado, temos que  $DE_h \subset E_h$ . De fato, para todo  $t \in [\gamma, \gamma + h]$  temos que

$$\begin{aligned}
\|(Sy)(t) - x_1(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_\gamma^t (t-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_\gamma^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_\gamma^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) (t-\gamma)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left( \int_{\gamma}^{\gamma+h} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t-\gamma)^{q-\beta} \left( \int_{\gamma}^{\gamma+h} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} h^{q-\beta} \\
&\leq b.
\end{aligned}$$

Também temos que

$$(Sy)(\gamma) = x_1(\gamma) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\gamma}^{\gamma} (\gamma-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds = x_1(\gamma).$$

Portanto,  $SE_h \subset E_h$ .

Podemos afirmar que  $S$  é um operador completamente contínuo em  $E_h$ , isto é,  $S$  é contínuo e compacto. Para  $y_m, y \in E_h, m = 1, 2, \dots$ , com  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m - y\|_* = 0$ , temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t) = y(t),$$

para  $t \in [\gamma, \gamma + h]$ . Assim, da condição (ii), temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(t, y_m(t)) = f(t, y(t)),$$

para  $t \in [\gamma, \gamma + h]$ . De (i) e (ii) temos que

$$\int_{\gamma}^t \|(t-s)^{q-1} f(s, y_m(s))\| ds \leq \left( \int_{\gamma}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{\gamma}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} < \infty.$$

Do Teorema da Convergência Dominada (ISNARD, 2007) obtemos

$$\|(Sy_m)(t) - (Sy)(t)\| = \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{\gamma}^t (t-s)^{q-1} [f(s, y_m(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Isso implica que o operador  $S$  é contínuo. Em seguida, vamos provar que  $S(E_h)$  é relativamente compacto. Além de verificarmos que  $E_h$  é fechado, pois se  $\{y_n\}$  é uma sequência em  $E_h$ . Então,

$$\|y_n(t) - x_1(t)\| \leq b,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $y_m(t) \rightarrow y(t)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m(t) - x_1(t)\| \leq b &\Rightarrow \|\lim_{n \rightarrow \infty} y_m(t) - x_1(t)\| \leq b \\ &\Rightarrow \|y(t) - x_1(t)\| \leq b \\ &\Rightarrow y(t) \in E_h. \end{aligned}$$

Logo,  $E_h$  é fechado.

Finalmente, é suficiente mostrar que a família de funções  $\{(Sy)(t) : y \in E_h\}$  é uniformemente limitado e equicontínuo em  $[\gamma, \gamma + h]$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|(Sy)(t)\| &\leq \|(Sy)(t) - x_1(t)\| + \|x_1(t)\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_{\gamma}^t (t-s)^{q-1} f(s, y(s)) ds \right\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^{\gamma} (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| + \|x_0\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{\gamma}^t ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{\gamma}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_0^{\gamma} ((t-s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_0^{\gamma} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} + \|x_0\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) (t-\gamma)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left( \int_{\gamma}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) \left[ t^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - (t-\gamma)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right] \right)^{1-\beta} \left( \int_0^{\gamma} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} + \|x_0\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t-\gamma)^{q-\beta} \left( \int_{\gamma}^t (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) \gamma^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \left( \int_0^{\gamma} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^{\beta} + \|x_0\| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} h^{q-\beta} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right) \right)^{1-\beta} \gamma^{q-\beta} + \|x_0\| \\ &\leq b + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} M \gamma^{q-\beta} + \|x_0\|. \end{aligned}$$

Portanto  $\{(Sy)(t) : y \in E_h\}$  é uniformemente limitado. Para todo  $y \in E_h$ ,  $\gamma \leq t_1 \leq t_2 \leq \gamma + h$ , temos pela Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
& \| (Sy)(t_2) - (Sy)(t_1) \| \\
= & \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^\gamma (t_2 - s)^{q-1} f(s, y(s)) ds + \int_\gamma^{t_1} (t_2 - s)^{q-1} f(s, y(s)) ds \right. \\
& + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, y(s)) ds - \int_0^\gamma (t_1 - s)^{q-1} f(s, y(s)) ds \\
& \left. - \int_\gamma^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, y(s)) ds \right\| \\
= & \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^{t_1} ((t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}) f(s, y(s)) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, y(s)) ds \right\| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \| [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] f(s, x(s)) \| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} \| (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s)) \| ds \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] m(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} m(s) ds \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_0^{t_1} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^\beta \\
& + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{q-1}]^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_1}^{t_2} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^\beta \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}} - (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}}] ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^\beta \\
& + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_1}^{t_2} [(t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-\beta}}] ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_0}^{t_0+h} [m(s)]^{\frac{1}{\beta}} ds \right)^\beta \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_1 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_1}^0 - (t_2 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_1}^0 \right)^{1-\beta} \\
& + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_2}^{t_1} \right)^{1-\beta} \\
= & \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( t_1^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - t_2^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
& + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
= & \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( - \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right) + (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
& + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_2 - t_1)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

$$= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} (t_2 - t_1)^{1-\beta}.$$

Quando  $t_1 \rightarrow t_2$ , o lado direito da desigualdade tende a zero, e concluímos que  $\{(Sy)(t) : y \in E_h\}$  é equicontínuo.

Temos que  $S(E_h)$  é relativamente compacto, logo pelo Teorema de Arzela-Ascoli 4.1.

Portanto pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, Teorema 4.2, o operador  $S$  tem, pelo menos, um ponto fixo  $\tilde{x}(t) \in E_h$ , isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x_1(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\gamma}^t (t-s)^{q-1} f(s, \tilde{x}(s)) ds \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\gamma} (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\gamma}^t (t-s)^{q-1} f(s, \tilde{x}(s)) ds, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [\gamma, \gamma + h]$ . Defina,

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (0, \gamma], \\ \tilde{x}(t), & t \in [\gamma, \gamma + h]. \end{cases}$$

Segue que  $\bar{x}(t) \in C([0, \gamma + h], B)$  e

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\gamma} (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\gamma}^t (t-s)^{q-1} f(s, \tilde{x}(s)) ds \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\gamma} (t-s)^{q-1} f(s, \bar{x}(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{\gamma}^t (t-s)^{q-1} f(s, \bar{x}(s)) ds \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, \bar{x}(s)) ds, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, \gamma + h]$ . Portanto,  $\bar{x}$  é uma solução do Problema (4.1) em  $[\gamma, \gamma + h]$ . Isso é uma contradição, já que  $x(t)$  é não prolongável.

■

**Observação 4.1** O Teorema 4.7 é uma generalização do Teorema de Prolongamento para equações diferenciais ordinárias. Para considerar o problema de valor inicial fracionário (4.1) basta tomar  $q = 1$ .

Agora iremos apresentar outro teorema de prolongamento que é mais conveniente para algumas aplicações.

**Teorema 4.8 (Teorema de Prolongamento II)** Assumindo que as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema de Existência e Unicidade 4.3 sejam válidas. Então,  $x = x(t)$ ,  $t \in (0, \gamma)$  é não prolongável se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow \gamma^-} \sup \|k(t)\| = +\infty, \quad (4.4)$$

onde  $k(t) = (t, x(t))$ ,  $\|k(t)\| = (\|x(t)\|^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$ .

**Demonstração:** Vamos provar este teorema por contradição. Suponhamos que a Equação (4.4) seja falsa. Então existe uma sequência  $\{t_n\}$  e uma constante positiva  $L > 0$  tal que  $t_n < t_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $\{t_n\}$  é uma sequência crescente, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \gamma, \quad (4.5)$$

com  $\|x(t_n)\|^2 \leq L^2$ . Como  $\{x(t_n)\}$  é limitada, podemos obter uma subsequência que denotaremos também por  $\{x(t_n)\}$  convergente tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = x^*, \quad (4.6)$$

Agora, vamos mostrar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $T \in (0, \gamma)$ , tal que

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon,$$

para todo  $t \in (T, \gamma)$ , isto é

$$\lim_{t \rightarrow \gamma^-} x(t) = x^*, \quad (4.7)$$

Segue das Equações (4.5) e (4.6) que existe  $n_0$  tal que para todo  $n \geq n_0$ , temos que

$$\|x(t_n) - x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se (4.7) não é verdade, então para  $n \geq n_0$  existe  $\lambda_n \in (t_n, \gamma)$  tal que

$$\|x(\lambda_n) - x^*\| \geq \epsilon \text{ e } \|x(t_n) - x^*\| < \epsilon$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq \|x(\lambda_n) - x^*\| \\
&\leq \|x(t_n) - x^*\| + \|x(\lambda_n) - x(t_n)\| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^{\lambda_n} (\lambda_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds - \int_0^{t_n} (t_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^{t_n} (\lambda_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_n}^{\lambda_n} (\lambda_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_n} (t_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(q)} \left\| \int_0^{t_n} ((\lambda_n - s)^{q-1} - (t_n - s)^{q-1}) f(s, x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_n}^{\lambda_n} (\lambda_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_n} \|((\lambda_n - s)^{q-1} - (t_n - s)^{q-1}) f(s, x(s))\| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_n}^{\lambda_n} \|(\lambda_n - s)^{q-1} f(s, x(s))\| ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_n} \|(t_n - s)^{q-1} - (\lambda_n - s)^{q-1}\| f(s, x(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_n}^{\lambda_n} (\lambda_n - s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_0^{t_n} ((t_n - s)^{q-1} - (\lambda_n - s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_0^{t_n} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_n}^{\lambda_n} ((\lambda_n - s)^{q-1})^{\frac{1}{1-\beta}} ds \right)^{1-\beta} \left( \int_{t_n}^{\lambda_n} (m(s))^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (t_n - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_n}^0 - (\lambda_n - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_n}^0 \right) \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (\lambda_n - s)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \Big|_{t_n}^{\lambda_n} \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( t_n^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} - \lambda_n^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (\lambda_n - t_n)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (\lambda_n - t_n)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( -(\lambda_n - t_n)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} + (\lambda_n - t_n)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&\quad + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (\lambda_n - t_n)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{1-\beta}{q-\beta} \right)^{1-\beta} \left( (\lambda_n - t_n)^{\frac{q-\beta}{1-\beta}} \right)^{1-\beta}
\end{aligned}$$

Como  $(t_n - \lambda_n) \rightarrow 0$ , então para  $n \geq n_0$  suficientemente grande podemos encontrar  $\epsilon > 0$  tal que

$$\epsilon \leq \|x(\lambda_n) - x^*\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

Isso implica em contradição. Portanto o  $\lim_{t \rightarrow \gamma^-} x(t)$  existe. Por um argumento análogo da demonstração do Teorema 4.7, podemos encontrar um prolongamento de  $x(t)$ . ■

**Observação 4.2** Se a função  $f$  em (4.1) satisfaz a condição de Lipschitz global com a segunda variável, então a solução global existe e é única.

#### 4.2.1 Teorema de Existência Global de solução

Nesta subseção estudamos a existência global de solução para o PVI (4.1). Estes resultados estão disponível em (LI, SARWAR, 2016).

**Corolário 4.3** Assumindo que as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema de Existência e Unicidade 4.3 sejam válidas. Seja  $x(t)$  uma solução do PVI (4.1) em  $(0, \gamma)$ . Se  $x(t)$  é limitada em  $[\tau, \gamma)$  para algum  $\tau > 0$ , então  $\gamma = +\infty$ .

Antes de apresentarmos o próximo teorema referente à existência global de soluções, segue um lema essencial para os próximos resultados.

**Lema 4.3** Seja  $v : [0, b] \rightarrow [0, +\infty)$  uma função real, e  $w(\cdot)$  não negativa e localmente integrável em  $[0, b]$ . Suponha que existe  $a > 0$  e  $0 < q < 1$  tal que

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^q} ds.$$

Então existe uma constante  $k = k(q)$  tal que para  $t \in [0, b]$  temos que

$$v(t) \leq w(t) + ka \int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^q} ds,$$

para todo  $t \in [0, b]$ .

O seguinte resultado garante a existência e unicidade de soluções globais de (4.1) em  $\mathbb{R}^+$ .

**Teorema 4.9** Assumindo que as hipóteses (a), (b) e (c) do Teorema de Existência e Unicidade 4.3 sejam válidas. Se existe uma função contínua não negativa  $\mu(t)$  definida em  $[0, +\infty)$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \mu(t) \|x - y\|,$$

então, o PVI (4.1) tem uma única solução em  $C([0, +\infty); B)$ .

**Demonstração:** Pelo Lema 4.1 sabemos que  $x(t)$  satisfaz a equação integral

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

Suponha que o intervalo máximo de existência de  $x(t)$  é  $[0, \gamma)$ ,  $\gamma < +\infty$ . Então,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \right\| \\ &= \left\| x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)) ds \right\| \\ &\leq \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (\mu(s) \|x(s)\| + \|f(s, 0)\|) ds \\ &\leq \|x_0\| + \frac{\|\mu\|_{[0, \gamma]}}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|x(s)\| ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, 0)\| ds. \end{aligned}$$

Tomando  $v(t) = \|x(t)\|$  e  $a = \frac{\|\mu\|_{[0, \gamma]}}{\Gamma(q)}$  e  $w(t) = \|x_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \|f(s, 0)\| ds$ . Pelo Lema 4.3 sabemos que  $v(t) = \|x(t)\|$  é limitado em  $[0, \gamma)$ . Então para alguma  $\tau \in (0, \gamma)$ ,  $x(t)$  é limitado em  $[\tau, \gamma)$ . Pelo Teorema 4.3 o PVI (4.1) tem uma solução  $x(t)$  em  $(0, +\infty)$ .

■

De forma imediata temos o seguinte resultado.

**Corolário 4.4** Seja  $f \in C(\mathbb{R} \times B, \mathbb{R}^n)$ . Assumamos que existe a constante  $L > 0$  tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para quase todo  $t \in J$ , e para todo  $x, y \in B$ . Então, o pvi (4.1) tem uma única solução em  $C([0, +\infty); B)$ .

### 4.3 DESIGUALDADES FRACIONÁRIAS

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes para o seguinte estudo estão disponíveis em (WANG, YANG, MA, 2014).

**Definição 4.7** A função  $f$  é Hölder contínua se existem constantes não negativas  $C, \nu$  tais que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^\nu,$$

para todo  $x, y$  no domínio de  $f$ . A constante  $\nu$  é o expoente de Hölder.

**Observação 4.3** Vamos denotar por  $C^{0,\nu}(\Omega)$  o espaço das funções Hölder contínuas definidas em  $\Omega$ , um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , com  $0 < \nu \leq 1$ .

**Lema 4.4** Seja  $m : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  localmente Hölder contínua com expoente  $\nu$ , tal que  $0 < q < \nu < 1$ , e para qualquer  $t_1 \in (t_0, \infty)$ , com  $m(t_1) = 0$  e  $m(t) \leq 0$  para todo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Então  ${}^R D^q m(t_1) \geq 0$ .

**Demonstração:** Pela definição de derivada de Riemann-Liouville podemos escrever a derivada fracionária da função  $m$  da seguinte maneira

$${}^R D^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t (t-s)^{(1-q)-1} m(s) ds \right],$$

ou seja,

$${}^R D^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t (t-s)^{-q} m(s) ds \right].$$

Definamos  $H(t) = \int_0^t (t-s)^{-q} m(s) ds$ . Então para  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned}
 H(t_1+h) - H(t_1) &= \int_0^{t_1+h} (t_1+h-s)^{-q} m(s) ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{-q} m(s) ds \\
 &= \int_0^{t_1} (t_1+h-s)^{-q} m(s) ds + \int_{t_1}^{t_1+h} (t_1+h-s)^{-q} m(s) ds \\
 &\quad - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{-q} m(s) ds \\
 &= \int_0^{t_1} [(t_1+h-s)^{-q} - (t_1-s)^{-q}] m(s) ds \\
 &\quad + \int_{t_1}^{t_1+h} (t_1+h-s)^{-q} m(s) ds \\
 &:= I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Como

$$(t_1+h-s)^{-q} - (t_1-s)^{-q} \leq 0$$

para  $s \in [0, t_1]$ , pois  $0 < q < 1$ , do mesmo modo,  $-1 < -q < 0$ , e por hipótese  $m(s) \leq 0$ , assim

$$I_1 = \int_0^{t_1} [(t_1+h-s)^{-q} - (t_1-s)^{-q}] m(s) ds \geq 0,$$

Logo,

$$H(t_1+h) - H(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_1+h} (t_1+h-s)^{-q} m(s) ds = I_2.$$

Por outro lado, sabemos que  $m$  é localmente Hölder contínua, então existe uma constante  $k(t_1) > 0$  e  $\nu > 0$ , e considerando  $m(t_1) = 0$  temos que

$$-k(t_1)(t_1+h-s)^\nu \leq m(s) \leq k(t_1)(t_1+h-s)^\nu,$$

daí,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{t_1}^{t_1+h} (t_1+h-s)^{-q} m(s) ds \geq - \int_{t_1}^{t_1+h} (t_1+h-s)^{-q} k(t_1)(t_1+h-s)^\nu ds \\
 &= - \int_{t_1}^{t_1+h} (t_1+h-s)^{\nu-q} k(t_1) ds.
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável para  $u = t_1 + h - s$ , temos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int_h^0 u^{\nu-q} (-du) k(t_1) = k(t_1) \int_h^0 u^{\nu-q} du \\
 &= -k(t_1) \int_h^0 u^{\nu-q} du = k(t_1) \int_0^h u^{\nu-q} du \\
 &= k(t_1) \left[ \frac{u^{\nu-q+1}}{\nu-q+1} \right]_0^h \\
 &= k(t_1) \frac{h^{\nu-q+1}}{\nu-q+1}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(t_1 + h) - H(t_1) \geq I_s \geq k(t_1) \frac{h^{\nu-q+1}}{\nu-q+1},$$

assim,

$$H(t_1 + h) - H(t_1) - k(t_1) \frac{h^{\nu-q+1}}{\nu-q+1} \geq 0. \quad (4.8)$$

Dividindo a Desigualdade (4.8) por  $h$  e aplicando o limite, temos

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0^+} \left[ \frac{H(t_1 + h) - H(t_1)}{h} - k(t_1) \frac{h^{\nu-q}}{\nu-q+1} \right] \geq 0 \\
 &\Rightarrow H'(t_1) - k(t_1) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{\nu-q+1}}{\nu-q} \geq 0 \\
 &\Rightarrow H'(t_1) \geq 0.
 \end{aligned}$$

O que implica

$${}^R D^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} H'(t_1) \geq 0. \quad \blacksquare$$

**Lema 4.5** Suponha que  $\beta > 0$  e seja  $c(\cdot)$  uma função não negativa, não decrescente e localmente integrável em  $[0, T)$ , para algum  $T \leq \infty$ . Seja  $g(\cdot)$  uma função contínua, não negativa, não decrescente definida em  $[0, T)$  e  $M > 0$  tal que  $g(t) \leq M$ . Seja também  $u(\cdot)$  uma função não negativa e localmente integrável em  $[0, T)$  tal que

$$u(t) \leq c(t) + g(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds,$$

em  $[0, T)$ . Então  $u(t) \leq c(t) E_\beta(g(t) \Gamma(\beta) t^\beta)$ .

**Proposição 4.2** Seja  $f(t, x, \lambda)$  contínua em  $(t, x, \lambda)$  e localmente Lipschitz em  $x$  (uniformemente em  $t$  e  $\lambda$ ) em  $[t_0, t_1] \times D \times \{|\lambda - \lambda_0| < c\}$  onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo. Seja  $y(t, \lambda_0)$

uma solução do Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x, \lambda_0) \\ x(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D. \end{cases}$$

Suponhamos que  $y(t, \lambda_0) \in D$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Então dado  $\varepsilon > 0$  existem  $\delta > 0$  e única  $z(t, \lambda)$  solução do Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0, \lambda) = z_0 \end{cases}$$

definida em  $[t_0, t_1]$  tal que se  $\|z_0 - y_0\| < \delta$  e  $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ . Então  $\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \varepsilon$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Demonstração:** Pela continuidade da solução  $y(t, \lambda_0)$  em  $t$  e a compacidade do intervalo  $[t_0, t_1]$ , temos que  $y(t, \lambda_0)$  é limitada em  $[t_0, t_1]$ .

Defina o conjunto  $U = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n : \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon\}$  e suponha que  $U \subset [t_0, t_1] \times D$ . Se  $U \not\subset [t_0, t_1] \times D$ , podemos escolher  $\varepsilon_1 < \varepsilon$  tal que  $U \subset [t_0, t_1] \times D$ . O conjunto  $U$  é compacto, pois seja  $\{x_n\}$  uma sequência em  $U$ . Logo

$$\|x_n - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $x_n \rightarrow x$  obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon &\Rightarrow \|\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow x \in U. \end{aligned}$$

Logo,  $U$  é fechado e portanto é compacto. Com isso,  $f(t, x, \lambda)$  é Lipschitz em  $x \in U$  com constante de Lipschitz  $L$ . Pela continuidade de  $f$  em  $\lambda$ , para qualquer  $\eta > 0$  existe  $\beta > 0$ , ( $\beta < c$ ) tal que

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \eta,$$

para todo  $(t, x) \in U$  e  $\|\lambda - \lambda_0\| < \beta$ . Seja  $\eta < \varepsilon$  e  $\|z_0 - y_0\| < \eta$ . Considere o problema

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = z_0, \end{cases} \quad (4.9)$$

Pelo teorema de Existência e Unicidade, existe uma única solução  $z(t, \lambda)$  para o PVI (4.9) definida em  $[t_0, t_0 + \Delta]$ . Considere o intervalo  $[t_0, \tau]$  em que  $(\tau < t_1)$ , então  $y(t, \lambda_0)$  é solução de

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x, \lambda_0), \\ x(t_0) = y_0, \end{cases}$$

e  $z(t, \lambda)$  é solução de

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) = f(t, x, \lambda), \\ x(t_0) = z_0. \end{cases}$$

Portanto,  $y(t, \lambda)$  e  $z(t, \lambda)$  são soluções das equações integrais, respectivamente

$$\begin{aligned} y(t, \lambda_0) &= y_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, y(s, \lambda_0), \lambda_0) ds \\ z(t, \lambda) &= z_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda), \lambda) ds. \end{aligned}$$

Logo, para  $t \in [t_0, \tau]$  e usando o fato que  $f$  é Lipschitz obtemos que

$$\begin{aligned} &\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \\ &\leq \|z_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|f(s, z(s, \lambda), \lambda) - f(s, y(s, \lambda_0), \lambda_0)\| ds \\ &\leq \|z_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|f(s, z(s, \lambda), \lambda) - f(s, y(s, \lambda_0), \lambda)\| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|f(s, y(s, \lambda_0), \lambda) - f(s, y(s, \lambda_0), \lambda_0)\| ds \\ &\leq \|z_0 - y_0\| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} L \|z(s, \lambda) - y(s, \lambda_0)\| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|\lambda - \lambda_0\| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \eta + \frac{1}{\Gamma(q+1)}(t-t_0)^q\eta + \frac{L}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|z(s,\lambda) - y(s,\lambda_0)\| ds \\
&\leq \eta \left(1 + \frac{1}{\Gamma(q+1)}(\tau-t_0)^q\right) + \frac{L}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \|z(s,\lambda) - y(s,\lambda_0)\| ds.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.5, temos

$$\|z(t,\lambda) - y(t,\lambda)\| \leq \eta \left(1 + \frac{1}{\Gamma(q+1)}(\tau-t_0)^q\right) E_q(L\tau^q).$$

Pelo fato de  $y(t,\lambda_0)$  ser limitada em  $[t_0,\tau)$  vem

$$\|z(t,\lambda)\| \leq \|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| + \|y(t,\lambda_0)\| \leq k(\tau).$$

Utilizando esse fato, podemos estender a solução até  $\tau = t_1$ . Tomando

$M = 1 + \frac{1}{\Gamma(1+q)}(\tau-t_0)^q$  e  $\eta = \frac{\varepsilon}{ME_q(L\tau^q)}$ , resulta que

$$\|z(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\| < \varepsilon,$$

desde que  $\|z_0 - y_0\| < \delta$  e  $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$  para  $\delta = \min\{\eta, \beta\}$ . ■

**Lema 4.6** Se  $z(\cdot)$  é solução do sistema

$$\begin{cases} {}^C D^q z(t) = f(t, z, \lambda), \\ z(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

então,  $z(\cdot) \in C^{0,\nu}$ .

**Demonstração:** Inicialmente é fácil ver que a solução do PVI (4.10) é equivalente a equação integral

$$z(t,\lambda) = u_0 + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s,\lambda)) ds.$$

Seja  $t_1 \leq t_2$ ,

$$\begin{aligned}
& \|z(t_2, \lambda) - z(t_1, \lambda)\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds - \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} - \frac{(t_1 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} \right) f(s, z(s, \lambda)) ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, z(s, \lambda)) ds \right\| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t_1} [(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}] ds + \frac{M}{\Gamma(q)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} ds
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $t_i - s = u_i$ ,  $i = 1, 2$ , respectivamente, e mudando os limites de integração e usando o Lema 4.2 obtemos

$$\begin{aligned}
& \|z(t_2, \lambda) - z(t_1, \lambda)\| = \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \int_{t_2-t_1}^{t_2-t_0} u_2^{q-1} du_2 - \int_0^{t_1-t_0} u_1^{q-1} du_1 + \int_0^{t_2-t_1} u_2^{q-1} du_2 \right) \\
&= \frac{M}{\Gamma(q)} \left( \frac{u_2^q}{q} \Big|_{t_2-t_1}^{t_2-t_0} - \frac{u_1^q}{q} \Big|_0^{t_1-t_0} + \frac{u_2^q}{q} \Big|_0^{t_2-t_1} \right) \\
&= \frac{M}{\Gamma(q+1)} ((t_2 - t_0)^q - (t_1 - t_0)^q) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q+1)} [t_2 - t_0 - (t_1 - t_0)]^q \\
&= \frac{M}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q.
\end{aligned}$$

Portanto é de Hölder. ■

O próximo resultado é um resultado de diferenciáveis para funções escalares.

**Teorema 4.10** Consideremos o sistema escalar de ordem fracionária

$$\begin{cases} {}^C D^q u(t) = f(t, u), & q \in (0, 1), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

$f$  é localmente Lipschitz em  $u(\cdot)$ , para todo  $t \geq 0$  e todo  $u(\cdot) \in J \subset \mathbb{R}$ . Seja  $[t_0, T)$  ( $T \leq \infty$ ) o intervalo maximal de existência de  $u(\cdot)$ , e suponhamos que  $u(t) \in J$ , para todo  $t \in [t_0, T)$ . Seja  $v(\cdot) \in C^{0, \nu}$  com  $q \leq \nu < 1$ , satisfazendo

$$\begin{cases} {}^C D^q v(t) \leq f(t, v(t)), \\ v(t_0) = u_0, \end{cases}$$

com  $v(t) \in J$ , para todo  $t \in [t_0, T)$ . Então  $v(t) \leq u(t)$ , para todo  $t \in [t_0, T)$ .

**Demonstração:** Consideremos o problema auxiliar

$$\begin{cases} {}^C D^q z(t) &= f(t, z(t)) + \lambda, \\ z(t_0) &= u_0, \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$ , em qualquer intervalo  $[t_0, t_1]$ . Pela Proposição 4.2, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $\lambda < \delta$  então a única solução  $z(t, \lambda)$  definida em  $[t_0, t_1]$  satisfaz

$$|z(t, \lambda) - u(t)| < \varepsilon, \quad (4.11)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Inicialmente vamos mostrar que  $v(t) \leq z(t, \lambda)$ , para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . A demonstração será feita por redução ao absurdo. Suponhamos que o fato anterior não acontece, então existem  $a, b \in (t_0, t_1]$  tal que  $v(a) = z(a, \lambda)$  e  $v(t) > z(t, \lambda)$  para  $a < t \leq b$ . Defina  $m(t) = v(t) - z(t, \lambda)$ . É fácil ver que  $m(t) \leq 0$ , para todo  $t \in [t_0, a]$  e que  $m(a) = v(a) - z(a, \lambda) = 0$ .

Logo, pelo Lema 4.4, temos

$$\begin{aligned} {}^C D^q(m(a)) &= {}^R D^q(m(t) - m(t_0))|_{t=a} \\ &= {}^R D^q m(t)|_{t=a} - m(t_0) \frac{(a - t_0)^{-q}}{p(1 - q)} \geq 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} {}^C D^q v(a) &\geq {}^C D^q z(a, \lambda) = f(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f(a, v(a)) \\ {}^C D^q v(a) &> f(a, v(a)) \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Agora vamos mostrar que  $v(t) \leq u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Se a afirmação é falsa, existe  $a \in (t_0, t_1]$  tal que  $v(a) > u(a)$ . Seja  $\varepsilon = \frac{v(a) - u(a)}{2}$

$$v(a) - z(a, \lambda) = v(a) - u(a) + u(a) - z(a, \lambda). \quad (4.12)$$

Mas pela Desigualdade (4.11) temos que

$$u(t) - z(t, \lambda) > -\varepsilon,$$

logo da Equação (4.12) obtemos que

$$\begin{aligned} v(a) - z(a, \lambda) &= 2\varepsilon + u(a) - z(a, \lambda) \\ &\geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

isso contradiz o fato de que  $v(t) \leq z(t, \lambda)$ . Como o resultado é verdadeiro para qualquer intervalo compacto, nós podemos concluir que a desigualdade acontece para todo  $t \geq t_0$ . Com efeito, se a desigualdade não acontece para todo  $t \geq t_0$ , podemos tomar  $T < \infty$  como o primeiro valor ao qual a desigualdade é falsa e  $\Delta > 0$ . Portanto  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$  e por continuidade  $v(T) = u(T)$  e  $v(t) > u(t)$  para  $t \in (T, T + \Delta]$ . Portanto, pelo mesmo argumento usado na discussão de  $[t_0, t_1]$  também funciona em  $[t_0, T]$ . ■

No próximo teorema enunciamos um resultado de comparação para sistemas de equações diferenciais de ordem fracionária, para isto, introduzimos a seguinte definição.

**Definição 4.8** Um vetor  $v$  é não negativo (respectivamente positivo) se toda componente  $v_i, i = 1, \dots, n$ , é não negativa (respectivamente positiva). Denotamos um vetor não negativo (respectivamente positivo) por  $0 \gg v$  (respectivamente  $0 \ll v$ ).

**Observação 4.4** Sejam  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $v \leq u$ , isto é,  $v$  precede  $u$  é equivalente a dizer que  $u_i \geq v_i, 1 = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 4.11** Considere o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} {}^C D^q x(t) &= f(t, x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

em que  $f : [t_0, T) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua em  $t$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto aberto,  $0 \in \mathcal{M}$  e existe uma constante  $L > 0$  tal que para todo  $u', u'' \in \Omega \subset \mathcal{M}$ ,

$$\|f(t, u') - f(t, u'')\| \leq L \|u' - u''\|, \quad (4.13)$$

para todo  $t \in [t_0, T)$ . Seja  $u(t), t \in [t_0, T)$  uma solução do Problema de Valor Inicial, se existe

um

vetor

$v = (v_1, \dots, v_m) : [t_0, T) \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $v_i \in C^{0,\nu}$ ,  $q < \nu < 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e

$${}^C D^q v(t) \leq f(t, v(t)), t \in [t_0, \infty),$$

então  $v(t_0) \leq u_0$ ,  $u_0 \in \mathcal{M}$ , implica que  $v(t) \leq u(t)$ ,  $t \in [t_0, T)$ .

**Demonstração:** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} {}^C D^q z(t) = f(t, z(t)) + \lambda E, \\ z(0) = u_0, \end{cases}$$

onde  $\lambda$  é uma constante e  $E = (1, \dots, 1)^T$ . Para um intervalo compacto  $[t_0, t_1]$  pela Proposição 4.2, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\lambda < \delta$ , então existe uma única solução  $z(t, \lambda)$  definida em  $t \in [t_0, t_1]$ , com

$$\|z(t, \lambda) - u(t)\|_M < \epsilon, \quad (4.14)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , em que a norma  $\|\cdot\|_M := \max\{|\cdot|, \dots, |\cdot|\}$  definido como o valor máximo dos componentes. Inicialmente vamos mostrar que

$$v(t) \leq z(t, \lambda), \quad (4.15)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Suponha que a afirmação dada em (4.15) seja falsa, então pode haver  $a, b \in [t_0, t_1]$  de tal forma que para pelo menos um  $i \in \{1, \dots, m\}$ , ocorra  $v_i(a) = z_i(a, \lambda)$ ,  $v_i(t) > z_i(t, \lambda)$  e  $v_j(t) \leq z_j(t, \lambda)$  para todo  $t \in (a, b]$ ,  $j \neq i$  e  $j = 1, \dots, m$ . Seja o conjunto  $m_i(t) = v_i(t) - z_i(t, \lambda)$ . Por discussão semelhante a da demonstração do Teorema 4.10, obtemos

$${}^C D^q v_i(a) \geq {}^C D^q z_i(a, \lambda) = f_i(a, z(a, \lambda)) + \lambda > f_i(a, z(a, \lambda)), \quad (4.16)$$

o que contradiz a desigualdade  ${}^C D^q v(t) \leq f(t, v(t))$ , desde que  $z_i(a, \lambda) = v_i(a)$ .

Provaremos agora que  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Novamente, suponha que essa afirmação é falsa, então pode haver  $a \in (t_0, t_1]$  e pelo menos um  $i$  tal que  $v_i(a) > u_i(a)$ . Tomando

$\epsilon = \frac{(v_i(a) - u_i(a))}{2}$  e usando a Equação (4.14), temos

$$v_i(a) - z_i(a, \lambda) = v_i(a) - u_i(a) + u_i(a) - z_i(a, \lambda) \geq \epsilon,$$

o que contradiz o fato de que  $v_i(t) \leq z_i(t, \lambda)$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Assim mostramos que  $v(t) \leq u(t)$  e concluímos que isso é verdade para  $t \in [t_0, t_1]$ . Se não fosse, tomemos  $T < \infty$  e  $\Delta > 0$ . Daí resulta pela continuidade que  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in [t_0, T)$ ,  $v_i(T) = u_i(T)$  e  $v_i(t) > u_i(t)$ ,  $t \in (T, T + \Delta]$ . Então a mesma discussão para  $[t_0, t_1]$  vale para  $[t_0, T]$ . ■

## 5 ESTABILIDADE DE LYAPUNOV E APLICAÇÕES

Recentemente, sistemas de equações de ordem fracionária tem recebido notória importância na literatura devido a grande utilidade desse tipo de teoria no estudo de problemas das áreas da Física, Epidemiologia, Teoria do Controle, Sismologia, Materiais, entre outras áreas, para mais informações podemos consultar as referências (PODLUBNY, 2002), (CAPUTO, 1992), (MACHADO, 2003), (MATIGNON, 1996), (POOSEH, RODRIGUES, TORRES, 2011) e (CHEN, 2006). Nesta seção vamos discutir a teoria de Estabilidade de Lyapunov (KHALIL, 1996) adaptados para sistemas de ordem fracionária e faremos o estudo da estabilidade assintótica para os pontos de equilíbrio endêmico e livre da doença para um sistema epidemiológico do tipo SIR que modela a transmissão da Dengue. Este tipo de sistema de ordem fracionária já foi estudado na literatura do ponto de vista numérico (POOSEH, RODRIGUES, TORRES, 2011) e (DIETHELM, 2013). Entretanto, este tipo de modelo não foi tratado ainda na literatura sobre o ponto de vista da Teoria de Lyapunov para sistemas de ordem fracionária, desta forma, esta é a principal motivação cujas as principais referências são (AGUILA-CAMACHO, 2014), (LI, CHEN, PODLUBNY, 2010) e (VARGAS-DE-LEÓN, 2015). De acordo com Li, Chen (2010), para sistemas não lineares de equações de ordem fracionária, o método direto de Lyapunov fornece-nos uma maneira de analisar a estabilidade desse tipo de sistemas sem explicitar as soluções, desde que, exista alguma candidata à função de Lyapunov.

### 5.1 ESTABILIDADES PARA SISTEMAS FRACIONÁRIOS

Sistemas de equações diferenciais ordinárias instável, pode ser estável se estivermos estudando um problema semelhante no contexto de equações de ordem fracionárias. Para mostrar esse fato, vamos considerar o seguinte exemplo.

**Exemplo 5.1** Comparemos os dois seguintes sistemas com a condição inicial  $x(t_0)$  para  $0 < \nu < 1$ .

$$\frac{d}{dt}x(t) = \nu t^{\nu-1}, \quad (5.1)$$

$${}^C D_t^q x(t) = \nu t^{\nu-1}, \quad 0 < q < 1. \quad (5.2)$$

As soluções analíticas dos Sistemas de Equações Diferenciais Ordinário e Fracionário (5.1) e (5.2), respectivamente, são  $t^\nu + x(t_0)$  e  $\frac{\nu\Gamma(\nu)t^{\nu+q-1}}{\Gamma(\nu+q)} + x(t_0)$ . Podemos ver que o Sistema de Ordem Inteira (5.1) é instável para  $\nu \in (0,1)$ . Entretanto, o Sistema de Ordem Fracionária (5.2) é estável para  $0 < \nu \leq 1 - q$ .

### 5.1.1 Conceitos de Estabilidade para Sistemas de Ordem Fracionária

Nesta seção, discutimos o conceito de estabilidade para sistemas não autônomos de ordem fracionária. Uma observação importante, é que em sistemas de ordem fracionária as soluções não satisfazem a propriedade clássica de fluxo ou sistemas dinâmicos (LI, CHEN, PODLUBNY, 2010). Portanto não podemos usar esse argumento para a demonstração dos resultados de estabilidade como são provados no contexto de Equações Diferenciais Ordinárias. Em virtude desse fato, abordamos a Teoria de Estabilidade de Lyapunov via funções de classe  $K$ .

**Definição 5.1** Um ponto  $\bar{x}$  é chamado de ponto de equilíbrio do sistema fracionário (4.1) quando

$$f(t, \bar{x}) \equiv 0, \quad (5.3)$$

para todo  $t \geq t_0$ .

Note que a equação (5.3) deve ser satisfeita  $t \geq t_0$ , implicando que o PVI (4.1) deve ser capaz de ficar no ponto  $x_0$  durante todo o tempo  $t$ . Por exemplo, para um sistema que varia linearmente no tempo é fácil de ver que:

$${}^C D^q x(t) = A(t)x(t),$$

tem a origem como o único ponto de equilíbrio, a menos que  $A(t)$  seja sempre não singular, ou seja,  $\det A(t) \neq 0$ , para todo  $t$ .

**Observação 5.1** Por conveniência, é possível fazer uma translação de um ponto de equilíbrio

qualquer  $\bar{x}$  do PVI (4.1) para a origem de  $\mathbb{R}^n$ , fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$y = x - \bar{x} \Rightarrow x = y + \bar{x}$$

Desse modo, o PVI (4.1) será dado da seguinte maneira

$${}^C D^q y(t) = {}^C D^q (x(t) - \bar{x}) = f(t, x(t)) = f(t, y(t) + \bar{x}) = g(t, y(t))$$

Logo, o PVI (4.1) no equilíbrio satisfaz a seguinte identidade

$$g(t, 0) \equiv f(t, \bar{x}) \equiv 0$$

**Exemplo 5.2** O sistema não autônomo fracionário segundo Caputo

$${}^C D^q x(t) = -A(t) \frac{x}{1+x^2}$$

tem um ponto de equilíbrio  $x_0 = 0$ . Entretanto, o sistema

$${}^C D^q x(t) = -A(t) \frac{x}{1+x^2} + b(t)$$

com  $b(t) \neq 0$  não tem ponto de equilíbrio e, podemos considerar como um sistema sob perturbação externa  $b(t)$ .

A teoria de Lyapunov (SLOTINE, 1991) foi desenvolvida principalmente para estudar a estabilidade de sistemas não lineares no que diz respeito as condições iniciais.

Agora veremos a definição de conjunto interior e os conceitos de estável, instável, assintoticamente estável e exponencialmente estável para sistemas não autônomos. Para isso, será fundamental incluir o tempo inicial  $t_0$  nas definições.

**Definição 5.2** Dado um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , um vetor  $x \in X$  é dito ponto interior de  $X$  se existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x) \subset X$ . O conjunto dos pontos interiores de  $X$  é denotado por  $\overset{\circ}{X}$  e é denominado de interior de  $X$ .

**Definição 5.3** O ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é **estável** no tempo  $t_0$  se, para todo  $R > 0$ , então existe  $r(R, t_0)$  tal que

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < R, \quad (5.4)$$

para todo  $t \geq t_0$ . Quando (5.4) não ocorre, ou seja, quando o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  não é estável, dizemos que  $\bar{x}$  é **instável**.

A Definição 5.3 significa que qualquer solução que se inicia numa bola arbitrariamente pequena de raio  $r$ , mantém sua trajetória numa bola arbitrariamente pequena de raio  $R$ .

Já o conceito de assintoticamente estável pode ser definido para sistemas não autônomos da seguinte maneira:

**Definição 5.4** O ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é **assintoticamente estável** quando

- a)  $\bar{x}$  é estável,
- b) Existe  $r(t_0) > 0$  tal que, se  $\|x(t_0) - \bar{x}\| < r(t_0)$ , então

$$\|x(t) - \bar{x}\| \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

Desse modo, a estabilidade assintótica requer que exista uma região de atração para um dado tempo inicial.

**Definição 5.5** O ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é **globalmente assintoticamente estável** se para todo  $x(t_0)$ , temos que

$$x(t) \rightarrow \bar{x}, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

**Definição 5.6** Uma função escalar contínua  $V(x)$  é localmente positiva definida se  $V(0) = 0$  e, em uma bola  $B_{R_0}$  tivermos

$$x \neq 0 \Rightarrow V(x) > 0$$

Se  $V(0) = 0$  e as propriedades acima valem para todo o espaço de soluções, então  $V(x)$  é globalmente positiva definida.

**Observação 5.2** Alguns conceitos relacionados podem ser definidos de maneira semelhante, tanto no sentido local como no global, isto é,

- a) a função  $V(x)$  é negativa definida se  $-V(x)$  for positiva definida.
- b)  $V(x)$  é positiva semi definida se  $V(0) = 0$  e  $V(x) \geq 0$ , para  $x \neq 0$ , e

c)  $V(x)$  é negativa semi definida se  $-V(x)$  é positiva semi definida.

O prefixo “semi” é usado para se referir a possibilidade de  $V(x)$  ser igual a zero quando  $x \neq 0$ .

Esses conceitos podem ter significados geométricos semelhantes aos de funções positivas definidas, além disso, definimos o conceito de funções localmente positiva definida de outros modos como na próxima definição e também de funções decrescentes.

**Definição 5.7** Uma função escalar  $V(t,x)$  variante no tempo é localmente positiva definida se  $V(t,0) = 0$  e existir uma função localmente positiva definida invariante no tempo  $W_1(x)$ , tal que, para todo  $t \geq t_0$ , temos

$$V(t,x) \geq W_1(x).$$

Então, a função variante no tempo é localmente positiva definida se ela domina uma função localmente positiva definida invariante no tempo. Funções que são globalmente positivas definidas são definidas de modo semelhantes.

**Observação 5.3** De maneira análoga, temos:

- a) a função  $V(t,x)$  é negativa definida se  $-V(t,x)$  for positiva definida,
- b)  $V(t,x)$  é positiva semi definida se dominar uma função positiva semi definida invariante no tempo,
- c)  $V(t,x)$  é negativa semi definida se  $-V(t,x)$  for positiva semi definida.

**Definição 5.8** Uma função escalar  $V(t,x)$  é decrescente se  $V(t,0) = 0$  e existir uma função positiva definida invariante no tempo  $W_2(x)$  tal que

$$\forall t \geq t_0, \quad V(t,x) \leq W_2(x).$$

Em outras palavras, a função escalar é decrescente se for dominada por uma função positiva definida invariante no tempo.

A seguir apresentamos a definição de Função de Lyapunov, sendo este conceito um dos principais elementos para esta teoria de estabilidade (TEWA, DIMI, BOWONG, 2009).

**Definição 5.9** Uma função  $V(t,x)$  positiva definida, continuamente diferenciável que é decrescente ao longo ds trajetórias de (4.1) é uma Função de Lyapunov para o PVI (4.1).

Agora, definimos uma classe importante de funções que serão úteis.

**Definição 5.10** Uma função contínua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  é de classe  $K$  se:

- a)  $\alpha(0) = 0$
- b)  $\alpha(r) > 0$ , para todo  $r > 0$ ,
- c)  $\alpha$  é uma função estritamente crescente.

Além disso, se  $a = \infty$  e  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow \infty$ , então  $\alpha(\cdot)$  é dita ser de classe  $K_\infty$ .

**Exemplo 5.3 (Exemplos de funções de classe  $K$  e  $K_\infty$ )**

- a)  $\alpha(r) = \arctg(r)$  é estritamente crescente, pois  $\alpha'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$ , logo é de classe  $K$ . Mas não é de classe  $K_\infty$ , pois  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2} < \infty$ .
- b)  $\alpha(r) = r^c$ , para algum número real positivo  $c > 1$ ,  $\alpha(\cdot)$  é estritamente crescente se  $\alpha'(r) = cr^{c-1} > 0$ , logo é de classe  $K$ . Além disso,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ , portanto é de classe  $K_\infty$ .

O lema a seguir nos fornece algumas propriedades de funções de classe  $K$  e  $KL$  que serão necessárias.

**Lema 5.1** Sejam  $\alpha_1(\cdot)$  e  $\alpha_2(\cdot)$  funções de classe  $K$  em  $[0, a)$ ,  $\alpha_3(\cdot)$  e  $\alpha_4(\cdot)$  funções de classe  $K_\infty$ . Seja  $\alpha_i^{-1}(\cdot)$  a inversa de  $\alpha_i(\cdot)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Então,

- a)  $\alpha_1^{-1}$  é definida em  $[0, \alpha_1(a))$  e é de classe  $K$ ,
- b)  $\alpha_3^{-1}$  é definida em  $[0, \infty)$  e é de classe  $K_\infty$ ,
- c)  $\alpha_1 \circ \alpha_2$  é de classe  $K$ ,
- d)  $\alpha_3 \circ \alpha_4$  é de classe  $K_\infty$ ,

**Demonstração:** Primeiramente provemos que a função  $\alpha_1^{-1}$  é de classe  $K$ . Segue de maneira análoga para se provar que a função  $\alpha_3^{-1}$  é de classe  $K_\infty$ . Sendo assim, sabemos que  $\alpha_1 : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ , então pelo Teorema 13 (disponível em (LIMA, 2010) p. 237 e (LIMA, 2014)), na qual a injetividade e continuidade de uma função implica em monotonicidade e inversão, temos que  $\alpha_1^{-1} : [0, \alpha_1(a)) \rightarrow [0, \infty)$ .

- a)  $0 = \alpha_1(0) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(0) = \alpha_1^{-1}(\alpha_1(0)) = 0 \Rightarrow \alpha_1^{-1}(0) = 0,$
- b) Seja  $R \in (0, \alpha_1(a))$ , então existe  $r > 0$  tal que  $\alpha_1(r) = R > 0$ . Desta forma,  $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(r)) = \alpha_1^{-1}(R) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(R) = r > 0.$
- c) Sejam  $R_1, R_2 \in (0, \alpha_1(a))$ , tais que  $R_1 < R_2$ , então existem  $r_1, r_2 > 0$  com  $\alpha_1(r_1) = R_1, \alpha_1(r_2) = R_2$ . Portanto  $r_1 < r_2$ , caso contrário, se  $r_1 \geq r_2$  então  $\alpha(r_1) \geq \alpha(r_2)$ , desta forma teríamos  $R_1 \geq R_2$  contradição. Do anterior segue que

$$\begin{aligned} r_1 < r_2 &\Rightarrow \alpha_1^{-1}(\alpha_1(r_1)) < \alpha_1^{-1}(\alpha_1(r_2)) \\ &\Rightarrow \alpha_1^{-1}(R_1) < \alpha_1^{-1}(R_2). \end{aligned}$$

Portanto  $\alpha^{-1}$  é decrescente.

Vamos provar que a composição de funções de classe  $K$  é de classe  $K$ , ou seja,  $\alpha_1 \circ \alpha_2$  é de classe  $K$ . Segue de maneira análoga para provar que  $\alpha_3 \circ \alpha_4$ .

- a)  $\alpha_1 \circ \alpha_2(0) = \alpha_1(\alpha_2(0)) = \alpha_1(0) = 0,$
- b)  $\alpha_2(r) = R > 0$  com  $r > 0$  e  $\alpha_1(R) = R'$  com  $R > 0$ , então

$$\alpha_1 \circ \alpha_2(r) = \alpha_1(\alpha_2(r)) = \alpha_1(R) = R'.$$

- c)  $\alpha_1 \circ \alpha_2$  é estritamente crescente, ou seja,

$$\begin{aligned} r_1 > r_2 &\Rightarrow \alpha_2(r_1) \geq \alpha_2(r_2), \\ &\Rightarrow \alpha_1(\alpha_2(r_1)) \geq \alpha_1(\alpha_2(r_2)), \\ &\Rightarrow \alpha_1 \circ \alpha_2(r_1) \geq \alpha_1 \circ \alpha_2(r_2). \end{aligned}$$

O seguinte lema nos fornece a relação entre funções de classe  $K$ , funções decrescentes e positivas definidas.

**Lema 5.2** A função  $V(t, x)$  é localmente (ou globalmente) positiva definida se, e somente se, existir uma função  $\alpha$  de classe  $K$  tal que  $V(t, 0) = 0$  e

$$V(t, x) \geq \alpha(\|x\|),$$

$\forall t \geq 0$  e  $x \in B_{R_0}$  (ou todo o espaço de soluções)

A função  $V(t,x)$  é localmente (ou globalmente) decrescente se, e somente se, existir uma função  $\beta$  de classe  $K$  tal que  $V(t,0) = 0$  e

$$V(t,x) \leq \beta(\|x\|),$$

$\forall t \geq 0$  e  $x \in B_{R_0}$  (ou todo o espaço de soluções).

**Demonstração:** 1ª Parte: Vamos provar a equivalência existente entre funções de classe  $K$  e positivas definidas.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\alpha(\cdot)$  uma função de classe  $K$  e sabemos que

$$V(t,x) \geq \alpha(\|x\|),$$

além disso,  $\alpha(\cdot)$  é uma função positiva definida invariante no tempo e,

- a)  $\alpha(\|0\|) = \alpha(0) = 0$ ,
- b)  $\alpha(\|x\|) > 0$ , como  $\|x\| > 0, \forall x \neq 0$ .

Logo  $V(t,x)$  domina uma função positiva definida invariante no tempo, o que a caracteriza como positiva definida.

( $\Rightarrow$ ) Sabemos que  $V(t,x)$  é uma função variante no tempo e localmente positiva definida. Segue direto da definição que  $V(0,t) = 0$  e que  $V(t,x) \geq W_1(x)$ , sendo  $W_1(x)$  uma função positiva definida invariante no tempo.

Defina a função  $\alpha(\cdot)$  da seguinte maneira

$$\alpha(p) = \inf_{p \leq \|x\| \leq R} W_1(x),$$

Iremos mostrar que  $\alpha(\cdot)$  é uma função de classe  $K$ , ou seja

- a)  $\alpha(0) = \inf_{0 \leq \|x\| \leq R} W_1(x) = 0$ ,
- b)  $\alpha(p) = \inf_{p \leq \|x\| \leq R} W_1(x) > 0$ ,

Pois,  $W_1(x)$  é uma função contínua por definição e não nula, exceto em 0. Sabemos que  $\alpha(\cdot)$  é contínua (KHALIL, 1996). Considerando  $p_1 \leq p_2$  então

$$\inf_{p_1 \leq \|x\| \leq R} W_1(x) < \inf_{p_2 \leq \|x\| \leq R} W_1(x) \Rightarrow \alpha(p_1) < \alpha(p_2),$$

Logo,  $\alpha(\cdot)$  é uma função de classe  $K$ .

2ª Parte: Vamos provar a equivalência existente entre funções de classe  $K$  e decrescentes.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\beta(\cdot)$  uma função de classe  $K$  e sabemos que

$$V(t,x) \leq \beta(\|x\|),$$

além disso,  $\beta(\cdot)$  é uma função positiva definida invariante no tempo e,

- a)  $\beta(\|0\|) = \beta(0) = 0$
- b)  $\beta(\|x\|) > 0$ , como  $\|x\| > 0, \forall x \neq 0$ .

Logo  $V(t,x)$  é dominada por uma função positiva definida invariante no tempo, o que a caracteriza como decrescente.

( $\Rightarrow$ ) Sabemos que  $V(t,x)$  é uma função variante no tempo e decrescente. Segue direto da definição que  $V(0,t) = 0$  e que  $V(t,x) \leq W_2(x)$ , sendo  $W_2(x)$  uma função positiva definida invariante no tempo.

Defina a função  $\beta(\cdot)$  da seguinte maneira

$$\beta(p) = \sup_{0 \leq \|x\| \leq p} W_2(x)$$

Iremos mostrar que  $\beta(\cdot)$  é uma função de classe  $K$ , ou seja

- a)  $\beta(0) = \sup_{0 \leq \|x\| \leq 0} W_2(x) = 0$
- b)  $\beta(p) = \sup_{0 \leq \|x\| \leq p} W_2(x) > 0$

Pois,  $W_2(x)$  é uma função contínua por definição e não nula, exceto em 0. Sabemos que  $\beta(\cdot)$  é contínua (??). Considerando  $p_1 \leq p_2$  então

$$\sup_{0 \leq \|x\| \leq p_1} W_2(x) < \sup_{0 \leq \|x\| \leq p_2} W_2(x) \Rightarrow \beta(p_1) < \beta(p_2),$$

Logo,  $\beta(\cdot)$  é uma função de classe  $K$ . ■

**Lema 5.3** Se  $f$  é uma função continuamente diferenciável em  $[0, \infty)$  e  ${}^C D^q f(t) \leq 0$ , para todo  $0 < q < 1$ , então  $f$  é monótona decrescente. Se  ${}^C D^q f(t) \geq 0$ , para todo  $0 < q < 1$ , então  $f$  é monótona crescente.

**Demonstração:** Pelo Lema 3.5 apresentado por Diethelm (2013) temos que  ${}^C D^q f(t) = {}^R D^q f(t) - \frac{t^{-q} f(0)}{\Gamma(1-q)}$ . Por  $f$  ser uma função continuamente diferenciável em  $[0, \infty)$  e  $\lim_{q \rightarrow 1^-} \Gamma(1-q) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$  pelo Teorema 2.20 por Diethelm, (2013) obtemos que

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} {}^C D^q f(t) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \left( {}^R D^q f(t) - \frac{t^{-q} f(0)}{\Gamma(1-q)} \right) = f'(t),$$

para cada  $t > 0$ , por  ${}^C D^q f(t) \leq 0$ , para todo  $0 < q < 1$  obtemos que  $f$  é monótona decrescente em  $(0, \infty)$ . Agora, vamos provar que  $f$  é monótona decrescente em  $[0, \infty)$ . Por contradição, se dado  $t > 0$  tal que  $f(0) < f(t)$ , pelo Teorema do Valor Intermediário, para  $u$  tal que  $f(0) < u < f(t)$  existe  $0 < t_0 < t$  tal que  $f(t_0) = u < f(t)$  isso contradiz o fato de  $f$  monótona decrescente em  $(0, \infty)$ . Pelo mesmo argumento, vamos mostrar que  $f$  é monótona crescente em  $[0, \infty)$  desde que  ${}^C D^q f(t) \geq 0$ , para todo  $0 < \alpha < 1$ . ■

De acordo com o lema 5.2 temos o seguinte teorema, cuja demonstração original está disponível em (CAMACHO, MERMOUD, GALLEGOS, 2014):

**Teorema 5.1** Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema não autônomo fracionário de ordem  $q$  segundo a definição de derivada de Caputo (4.1) e  $D \subset \mathbb{R}^n$  o domínio contendo  $x = 0$ . Assumamos que existem uma função de Lyapunov  $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  e funções de classe  $K$ ,  $\alpha_i(\cdot)$ , para  $i = 1, 2, 3$  satisfazendo

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad (5.5)$$

$${}_0^C D_t^q V(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad (5.6)$$

para todo  $t \geq 0$ , e todo  $x \in D$ ,  $0 < q < 1$ . Então  $x = 0$  é assintoticamente estável.

**Demonstração:** A derivada de  $V$  ao longo das trajetórias de (4.1) é dada por

$${}_0^C D_t^q V(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

Afirmção: Dado  $r > 0$  e  $\rho > 0$  tal que  $B_r(0) \subset D$  e  $\rho < \min_{\|x\|=r} \alpha(\|x\|)$ . Então

$$\{x \in B_r(0) : \alpha_1(\|x\|) \leq \rho\} \subset B_r^\circ(0)$$

vamos supor que

$$\{x \in B_r(0) : \alpha_1(\|x\|) \leq \rho\} \not\subset B_r(0)$$

então existe  $p_1 \in \{x \in B_r(0) : \alpha_1(\|x\|) \leq \rho\}$  e  $\|p_1\| = r$  logo,

$$\rho < \min_{\|x\|=r} \alpha_1(\|x\|) \leq \alpha_1(\|p_1\|) < \rho \Rightarrow \rho < \rho,$$

o que é uma contradição. Portanto, o resultado segue. Vamos definir o conjunto dependente do tempo

$$\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r(0), V(t,x) \leq \rho\}$$

como  $V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|)$ , temos

$$\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r(0), V(t,x) \leq \rho\} \supset \{x \in B_r(0), \alpha_2(\|x\|) \leq \rho\} \quad (5.7)$$

desde que  $\alpha_2(\|x\|) \leq \rho \Rightarrow V(t,x) \leq \rho$ . Do outro lado da desigualdade, temos  $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x)$  e de maneira análoga,

$$\{x \in B_r(0), \alpha_1(\|x\|) \leq \rho\} \subset \{x \in B_r(0), V(t,x) \leq \rho\} = \Omega_{t,\rho} \quad (5.8)$$

Segue das desigualdades de (5.7) e (5.8) que

$$\{x \in B_r(0), \alpha_2(\|x\|) \leq \rho\} \subset \Omega_{t,\rho} \subset \{x \in B_r(0), \alpha_1(\|x\|) \leq \rho\} \subset B_r(0) \subset D$$

para todo  $t \geq 0$ .

Afirmção: Para algum  $x_0 \in \Omega_{t,\rho}$  a solução iniciando em  $(0, x_0)$  permanece em  $\Omega_{t,\rho}$ , para todo  $t \geq 0$ . Sabemos que  $\Omega_{t,\rho} = \{x \in B_r(0), V(t,x) \leq \rho\}$ , e  ${}^C D^q V(t, x(t)) < 0 \Rightarrow$  Pelo Lemma 5.3  $V$  é monótona decrescente, logo

$$t \geq 0 \Rightarrow V(t, x(t)) \leq V(0, x(0)) = V(0, x_0) < \rho \Rightarrow x(t) \in \Omega_{t,\rho},$$

Portanto, a solução iniciando  $(0, x_0)$  é definida para todo  $t \geq 0$  e  $x(t) \in B_r(0) \subset D$ . Portanto (5.5) e (5.6) são verdadeiras sobre as soluções iniciando em  $(0, x_0)$  com  $x_0 \in B_r(0)$ .

Das hipóteses (5.5) e (5.6), temos que

$${}^C D_t^q V(t, x(t)) \leq -\alpha_3(\|x(t)\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V(t, x(t))))),$$

portanto considere o seguinte desigualdade diferenciável

$${}^C D_t^q V \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)), \quad V(0) = V(0, x(0)).$$

Pelo Teorema 4.11, Princípio de Comparação Fracionária, temos que  $V(t, x(t))$  é limitada por uma única solução não negativa da equação diferencial escalar

$${}^C D_t^q g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))), \quad g(0) = V(0, x(0)), \quad (5.9)$$

Pelo Lema 5.1 temos que  $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$  é uma função de classe  $K$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$  é também de classe  $C^1$ , caso não seja, podemos encontrar uma função  $\eta$  de classe  $K$  e de classe  $C^1$  tal que  $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(r) > \eta(r)$  e proceder na demonstração usando a função  $\eta$ .

Segue da definição de ponto de equilíbrio que  $g(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , portanto  $g \equiv 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema (5.9), vamos mostrar mais adiante que este ponto de equilíbrio é assintoticamente estável. Por outro lado, como estamos supondo que  $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$  é de classe  $C^1$ , logo é localmente Lipschitz, portanto qualquer outra solução com  $g(0) > 0$  não se anula. Portanto  $g(t) > 0$  em  $t \in [0, \infty)$ , temos que  ${}^C D^q g(t) < 0$ . segue do Lemma 5.3 que  $g(t) \leq g(0)$  para  $t \in (0, \infty)$ .

Suponha por contradição que  $g \equiv 0$  não é assintoticamente estável, então existe uma constante positiva  $\epsilon$  tal que  $g(t) \geq \epsilon$  para  $t \geq 0$ . Então segue que

$$0 < \epsilon \leq g(t) \leq g(0), \quad t \leq 0 \quad (5.10)$$

Substituindo 5.10 em 5.9 temos

$$\begin{aligned} -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))) &\leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\epsilon)) \\ &= -\frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\epsilon))}{g(0)} g(0) \\ &\leq -lg(t). \end{aligned}$$

Em que  $0 < l = \frac{\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\epsilon))}{g(0)}$ . Então,

$${}^C D_t^q g(t) = -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(g(t))) \leq -lg(t).$$

Seja  $F(s) = \mathcal{L}[E_q(-lt^q)]$ . Pelo Teorema 3.7 temos que  $F(s) = \frac{s^{q-1}}{s^q+l}$ , por outro lado, pelo Lema 3.3, temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E_q(-lt^q) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^{q-1}}{s^q+l} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^q}{s^q+l} = 0.$$

Portanto,

$$g(t) \leq g(0)E_q(-lt^q) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

O que contradiz o fato de que  $g(t) \geq \epsilon$ . Baseado nas discussões de ambos os casos, temos que  $g(t)$  tende a 0 quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(t,x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(g(t)).$$

Do fato anterior e das propriedades de funções de classe  $K$  segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . ■

## 5.2 MODELO SIR-SI FRACIONÁRIO DA DENGUE

Utilizando as hipóteses apresentadas na seção de Conceitos Epidemiológicos, o sistema de equações diferenciais fracionárias segundo Caputo não linear para a Dengue é dado por:

$$\begin{cases} {}^C D_t^q S_h &= \mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v - \mu_h S_h, \\ {}^C D_t^q I_h &= \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v - (\mu_h + \gamma) I_h, \\ {}^C D_t^q R_h &= \gamma I_h - \mu_h R_h, \\ {}^C D_t^q S_v &= \mu_v N_v - \frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h - \mu_v S_v \quad e \\ {}^C D_t^q I_v &= \frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h - \mu_v I_v. \end{cases} \quad (5.11)$$

Os pontos de equilíbrio do sistema serão:

a) Livre da doença:  $E^0 = (S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = (N_h, 0, 0, N_v, 0)$

b) Endêmico:  $E^* = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$ , em que,

$$\begin{aligned} - S_h^* &= \frac{\mu_v \mu_h N_h (q \mu_h R_h^* + \gamma_H \mu_v)}{pq A \mu_h R_h^* + \mu_H (q \mu_h R_h^* + \gamma_H \mu_v) \mu_v}, \\ - I_h^* &= \frac{\mu_h R_h^*}{\gamma_h}, \\ - R_h^* &= \frac{\gamma_h (R_0 - 1)}{\beta_v b (\mu_h + \gamma_h)^2 (N_h + m)^2 \mu_v (\beta_h b A + \mu_h \mu_v)}, \\ - S_v^* &= \frac{\gamma_h A}{q \mu_h R_h^* + \gamma_h \mu_v}, \\ - I_v^* &= \frac{q A \mu_h R_h^*}{q \mu_h R_h^* + \gamma_h \mu_v}. \end{aligned}$$

**Observação 5.4** Os pontos de equilíbrio livre da doença e endêmicos e o parâmetro Razão de Reprodução Básica são os mesmos para os Sistemas 2.5 e 5.11, independente da ordem das derivadas adotadas.

**Definição 5.11** Um conjunto  $\Omega$  é **positivamente invariante** se toda solução que se inicia em algum ponto em  $\Omega$  permanece em  $\Omega$  durante todo o tempo  $t \geq 0$ .

**Teorema 5.2** Seja  $(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)$  uma solução do sistema fracionário (5.11) com condição inicial  $(S_h(0), I_h(0), R_h(0), S_v(0), I_v(0))$  em  $\mathbb{R}_+^5$ , e o conjunto compacto

$$\Omega = \{(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \in \mathbb{R}_+^5 : S_h + I_h + R_h \leq N_h \text{ e } S_v + I_v \leq N_v\}.$$

Então,  $\Omega$  é um conjunto positivamente invariante.

**Demonstração:** Para demonstração destes resultados será feito a mudança de variável

$$\bar{S}_h = \frac{S_h}{N_h}, \bar{I}_h = \frac{I_h}{N_h}, \bar{R}_h = \frac{R_h}{N_h}, \bar{S}_v = \frac{S_v}{N_v}, \bar{I}_v = \frac{I_v}{N_v},$$

e também a mudança  $\bar{R}_h = 1 - \bar{S}_h - \bar{I}_h$  e  $\bar{S}_v = 1 - \bar{I}_v$  para transformar o modelo (5.11) em um sistema equivalente de três equações. Para esse novo sistema, a região de invariância será dada por

$$\bar{\Omega} = \{(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq \bar{S}_h + \bar{I}_h \leq 1, 0 \leq \bar{I}_v \leq 1\}.$$

Sendo assim, vamos denotar por

$$\bar{\Omega}_+ = \{(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) \in \mathbb{R}_+^3 : \bar{S}_h \geq 0, \bar{I}_h \geq 0, \bar{I}_v \geq 0\}.$$

Seja  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  o campo de equações como sendo

$$F(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) = \left( \mu_h(1 - \bar{S}_h) - \frac{\beta_h b N_v}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v, \frac{\beta_h b N_v}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v - (\mu_h + \gamma) \bar{I}_h, \frac{\beta_v b N_h}{N_h + m} (1 - \bar{I}_v) \bar{I}_h - \mu_v \bar{I}_v \right).$$

Como  $F$  é de classe  $C^1$  e  $\bar{\Omega}$  é um conjunto compacto, temos que  $F$  será globalmente Lipschitz.

Por outro lado, se  $(\bar{S}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_v(0)) \in \text{eixo } \bar{S}_h = \{(\bar{S}_h, 0, 0) : \bar{S}_h > 0\}$  (do mesmo modo, define-se o eixo  $\bar{I}_h$  e o eixo  $\bar{I}_v$ ), então analisando o campo de equações  $F$  no eixo  $\bar{S}_h$  temos

$$F(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) = (\mu_h - \mu_h \bar{S}_h, 0, 0).$$

Aplicando a Transformada de Laplace com parâmetro  $\lambda$  temos que

$$\mathcal{L}[\bar{S}_h(t)] = \mu_h \frac{\lambda^{q-(1+q)}}{\lambda^q + \mu_h} + \frac{\lambda^{q-1}}{\lambda^q + \mu_h} \bar{S}_h(0).$$

Pelo Teorema 3.13 temos

$$\bar{S}_h(t) = \mu_h t^q E_{q,q+1}(-\mu_h t^q) + E_{q,1}(-\mu_h t^q) \bar{S}_h(0).$$

Sendo assim, a solução

$$(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t)) = (\mu_h t^q E_{q,q+1}(-\mu_h t^q) + E_{q,1}(-\mu_h t^q) \bar{S}_h(0), 0, 0).$$

Pelo Corolário 4.2 o eixo  $\bar{S}_h(t)$  é um conjunto positivamente invariante. Do mesmo modo, analisando o campo de equações  $F$  no eixo  $\bar{I}_h(t)$  temos

$$F(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) = (\mu_h, -(\mu_h + \gamma) \bar{I}_h, 0).$$

Assim,

$${}^C D_t^q \bar{S}_h(t) = \mu_h \Rightarrow J^q {}^C D_t^q \bar{S}_h(t) = J^q \mu_h \Rightarrow \bar{S}_h(t) - \bar{S}_h(0) = \mu_h \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}.$$

Como  $\bar{S}_h(0) = 0$  temos  $\bar{S}_h(t) = \mu_h \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}$ . Aplicando a Transformada de Laplace com

parâmetro  $\lambda$  temos que

$$\mathcal{L} [\bar{I}_h] = \frac{\lambda^{q-1}}{\lambda^q + (\mu_h + \gamma)} \bar{I}_h(0).$$

Pelo Teorema 3.13 temos

$$\bar{I}_h(t) = E_{q,1}(-(\mu_h + \gamma)t^q) \bar{I}_h(0).$$

A solução  $(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t)) = \left( \mu_h \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}, E_{q,1}(-(\mu_h + \gamma)t^q) \bar{I}_h(0), 0 \right) \in \bar{\Omega}_+$ , pois  $\mu_h \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} > 0$  e  $E_{q,1}(-(\mu_h + \gamma)t^q) \bar{I}_h(0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Ou seja, obtemos que a solução iniciando no eixo  $\bar{I}_h$  permanece em  $\bar{\Omega}_+$ . Analisando o campo de equações no eixo  $\bar{I}_v$  temos

$$F(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) = (\mu_h, 0, -\mu_v \bar{I}_v),$$

de maneira análoga como foi feito para o eixo  $\bar{I}_h$  para o campo de equações no eixo  $\bar{I}_v$  temos que a solução

$$(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t)) = \left( \mu_h \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}, 0, E_{q,1}(-\mu_v t^q) \bar{I}_v(0) \right) \in \bar{\Omega}_+,$$

devido ao fato de  $\mu_h \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} > 0$  e  $E_{q,1}(-\mu_v t^q) \bar{I}_v(0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Ou seja, obtemos que a solução iniciando no eixo  $\bar{I}_v$  permanece em  $\bar{\Omega}_+$ .

Desse modo, toda solução que se inicia em algum dos eixos permanece em  $\bar{\Omega}_+$ .

Em seguida, iremos provar que o conjunto  $\bar{\Omega}_+$  é positivamente invariante. Vamos supor por contradição que existe uma solução  $(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t))$  tal que  $(\bar{S}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_v(0)) \in \bar{\Omega}_+$  mas que escapa de  $\bar{\Omega}_+$ . Sabemos pela unicidade de soluções que  $(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t))$  não cruza os eixos pois senão a solução não escaparia de  $\bar{\Omega}_+$ . Sendo assim, temos três possibilidades:

(i) Se a solução  $(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t))$  escapa pelo plano  $\bar{S}_h(t) = 0$ , então existe  $t_0$  tal que  $\bar{S}_h(t_0) = 0$ ,  $\bar{I}_h(t_0) > 0$  e  $\bar{I}_v(t_0) > 0$  e para todo  $t > t_0$  suficientemente próximo de  $t_0$  temos que  $\bar{S}_h(t) < 0$ . Por outro lado, a derivada  ${}_0^C D_t^q \bar{S}_h|_{t=t_0} = \mu_h > 0$ . Pelo Lema 5.3 obtemos que  $\bar{S}_h(t) > \bar{S}_h(t_0) > 0$  para todo  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ . O que é uma contradição.

(ii) Se a solução  $(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t))$  escapa pelo plano  $\bar{I}_h(t) = 0$ , então existe  $t_0$  tal que  $\bar{S}_h(t_0) > 0$ ,  $\bar{I}_h(t_0) = 0$  e  $\bar{I}_v(t_0) > 0$  e para todo  $t > t_0$  suficientemente próximo de  $t_0$  temos que  $\bar{I}_h(t) < 0$ . Por outro lado, a derivada  ${}_0^C D_t^q \bar{I}_h|_{t=t_0} = \frac{\beta_h b N_h}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v > 0$ . Pelo Lema 5.3 obtemos que  $\bar{I}_h(t) > \bar{I}_h(t_0) > 0$  para todo  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ . O que é uma contradição.

(iii) Se a solução  $(\bar{S}_h(t), \bar{I}_h(t), \bar{I}_v(t))$  escapa pelo plano  $\bar{I}_v(t) = 0$ , então existe  $t_0$  tal que

$\bar{S}_h(t_0) > 0$ ,  $\bar{I}_h(t_0) > 0$  e  $\bar{I}_v(t_0) = 0$  e para todo  $t > t_0$  suficientemente próximo de  $t_0$  temos que  $\bar{I}_v(t) < 0$ . Por outro lado, a derivada  ${}^C D_t^q \bar{I}_v|_{t=t_0} = \frac{\beta_v b N_h}{N_h + m} \bar{I}_h > 0$ . Pelo Lema 5.3 obtemos que  $\bar{I}_v(t) > \bar{I}_v(t_0) > 0$  para todo  $t$  suficientemente próximo de  $t_0$ . O que é uma contradição.

Logo, obtemos que  $\bar{S}_h(t) > 0$ ,  $\bar{I}_h(t) > 0$  e  $\bar{I}_v(t) > 0$  para todo  $t \geq 0$ . Se  $0 \leq \bar{S}_h(0) + \bar{I}_h(0) \leq 1$ , então a partir das duas primeiras equações temos:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^q (\bar{S}_h + \bar{I}_h) &= \mu_h - \mu_h \bar{S}_h - (\mu_h + \gamma) \bar{I}_h \\ &= \mu_h - \mu_h \bar{S}_h - \mu_h \bar{I}_h - \gamma \bar{I}_h \\ &\leq \mu_h - \mu_h (\bar{S}_h + \bar{I}_h). \end{aligned}$$

Aplicando a Transformada de Laplace com parâmetro  $\lambda$  temos que

$$\mathcal{L} [\bar{S}_h + \bar{I}_h] \leq \mu_h \frac{\lambda^{q-(1+q)}}{\lambda^q + \mu_h} + \frac{\lambda^{q-1}}{\lambda^q + \mu_h} (\bar{S}_h(0) + \bar{I}_h(0)).$$

Pelo Teorema 3.13 temos

$$\bar{S}_h + \bar{I}_h \leq \mu_h t^q E_{q,q+1}(-\mu_h t^q) + E_{q,1}(-\mu_h t^q) (\bar{S}_h(0) + \bar{I}_h(0)).$$

Como  $\bar{S}_h(0) + \bar{I}_h(0) \leq 1$  obtemos

$$\bar{S}_h + \bar{I}_h \leq \mu_h t^q E_{q,q+1}(-\mu_h t^q) + E_{q,1}(-\mu_h t^q) = 1.$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que  $\bar{I}_v(t) \leq 1$  se  $\bar{I}_h(0) \leq 1$ . Isso implica que  $\bar{\Omega}$  é um conjunto positivamente invariante. A partir do Corolário 4.4 qualquer solução que se inicia em  $\bar{\Omega}$  é globalmente definida e única. Logo, o conjunto  $\Omega$  será positivamente invariante desde que o conjunto  $\bar{\Omega}$  também seja. ■

Para a demonstração dos próximos resultados, precisamos dos seguintes lemas que estão disponíveis em (AGUILA-CAMACHO, 2014) e (VARGAS-DE-LEÓN, 2010), respectivamente.

**Lema 5.4** Seja  $x(t) \in \mathbb{R}^+$  uma função contínua e diferenciável. Então, para todo tempo  $t \geq t_0$

$$\frac{1}{2} {}^C D_t^q [x^2(t)] \leq x(t) {}^C D_t^q x(t), \quad \forall q \in (0,1). \quad (5.12)$$

**Demonstração:** A Desigualdade (5.12) é equivalente a

$$x(t) {}^C D_{t_0}^q x(t) - \frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^q x^2(t) \geq 0, \quad (5.13)$$

para todo  $q \in (0,1)$ . Usando a Definição de Derivada de Caputo, temos que

$${}^C D_{t_0}^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds$$

Do mesmo modo,

$$\frac{1}{2} {}^C D_{t_0}^q x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x(s)x'(s)}{(t-s)^q} ds$$

Da Expressão (5.13) temos que

$$\begin{aligned} & x(t) \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds - \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x(s)x'(s)}{(t-s)^q} ds \geq 0, \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(s)]x'(s)}{(t-s)^q} ds \geq 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Definimos a variável auxiliar  $y(s) = x(t) - x(s)$ , assim,  $y'(s) = -x'(s)$ . Da Desigualdade (5.14) segue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{y(s)(-y'(s))}{(t-s)^q} ds \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{y(s)y'(s)}{(t-s)^q} ds \leq 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Integrando pelo método de partes, temos

$$du = y(s)y'(s)ds \Rightarrow u = \frac{1}{2}y^2(s)$$

$$v = \frac{1}{\Gamma(1-q)}(t-s)^{-q} \Rightarrow dv = \frac{q}{\Gamma(1-q)}(t-s)^{-q-1}$$

Então,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2}y^2(s) \frac{1}{\Gamma(t-s)^{-q}} \right]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \frac{1}{2}y^2(s) \frac{q}{\Gamma(1-q)}(t-s)^{-q-1} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & - \left[ \frac{y^2(s)}{2\Gamma(1-q)(t-s)^q} \right]_{s=t} + \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-q)(t-t_0)^q} + \frac{q}{2\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(s)}{(t-s)^{q+1}} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Vamos analisar a indeterminação  $s = t$  na primeira parcela da Desigualdade (5.16)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} \frac{y^2(s)}{2\Gamma(1-q)(t-s)^q} &= \frac{1}{2\Gamma(1-q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{(x(t) - x(s))^2}{(t-s)^q} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x^2(t) - 2x(t)x(s) - x^2(s)}{(t-s)^q} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Como ocorreu uma indeterminação podemos aplicar a regra de L'Hospital, ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Gamma(1-q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{-2x(t)x'(s) + 2x(s)x'(s)}{q(t-s)^{q-1}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{[-2x(t)x'(s) + 2x(s)x'(s)](t-s)^{1-q}}{q} = 0. \end{aligned}$$

Na Desigualdade (5.16) podemos escrever:

$$\frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-q)(t-t_0)^q} + \frac{q}{2\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(s)}{(t-s)^{q+1}} ds \geq 0 \quad (5.17)$$

A Desigualdade (5.17) é claramente verdadeira, portanto conclui-se a demonstração. ■

**Lema 5.5** Seja  $x(t) \in \mathbb{R}^+$  uma função contínua e diferenciável. Então, para todo tempo  $t \geq t_0$

$${}^C D_t^q \left[ x(t) - x^* - x^* \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right) \right] \leq \left[ 1 - \frac{x^*}{x(t)} \right] {}^C D_t^q x(t), \quad (5.18)$$

$x^* \in \mathbb{R}^+$  e para todo  $q \in (0,1)$ .

**Demonstração:** Sabemos que  ${}^C D_t^q x^* = 0$  e pela definição de derivada de Caputo

$${}^C D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds,$$

para todo  $q \in (0,1)$  e,

$$\begin{aligned} {}^C D_t^q \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right) &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{\left( \ln \left( \frac{x(s)}{x^*} \right) \right)'}{(t-s)^q} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{\frac{x^*}{x(s)} \frac{x'(s)}{x^*}}{(t-s)^q} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)(t-s)^q} ds \end{aligned}$$

A Hipótese (5.18) é equivalente à

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow {}^C D_t^q \left[ x(t) - x^* - x^* \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right) \right] - \left[ 1 - \frac{x^*}{x(t)} \right] {}^C D_t^q x(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -x^* {}^C D_t^q \ln \left( \frac{x(t)}{x^*} \right) + \frac{x^*}{x(t)} {}^C D_t^q x(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -x^* \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)(t-s)^q} ds + \frac{x^*}{x(t)} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^* \left( \frac{1}{x(t)\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds - \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)(t-s)^q} ds \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Logo, temos que provar que

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds - \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x(t)x'(s)}{x(s)(t-s)^q} ds \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \left( \frac{x(s) - x(t)}{x(s)} \right) \frac{x'(s)}{(t-s)^q} ds \leq 0.$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$w(s) = \frac{x(s) - x(t)}{x(s)} \Rightarrow x(s) = w(s)x(t) + x(t) \quad (5.19)$$

então,

$$w'(s) = \frac{x'(s)}{x(t)} \Rightarrow x'(s) = w'(s)x(t). \quad (5.20)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t x(t) \left( \frac{x(s) - x(t)}{x(t)} \right) \frac{x'(s)}{x(s)(t-s)^q} ds \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t x(t)w(s) \frac{w'(s)x(t)}{[w(s)x(t) + x(t)](t-s)^q} ds \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x(t)w(s)}{(w(s) + 1)} \frac{w'(s)}{(t-s)^q} ds \leq 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

A expressão

$$\begin{aligned}
 \frac{x(t)w(s)}{w(s)+1} &= \frac{x(t)w(s) + x(t) - x(t)}{w(s)+1} \\
 &= \frac{x(t)(w(s)+1) - x(t)}{w(s)+1} \\
 &= x(t) \left( 1 - \frac{1}{w(s)+1} \right).
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Substituindo a Expressão (5.22) na Desigualdade (5.21) temos que

$$\frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t x(t) \left( 1 - \frac{1}{w(s)+1} \right) \frac{w'(s)}{(t-s)^q} ds \leq 0 \tag{5.23}$$

Integrando a expressão 5.23 pelo método de partes segue que

$$v = \frac{(t-s)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \Rightarrow dv = \frac{q(t-s)^{-q-1}}{\Gamma(1-q)} dt$$

$$\begin{aligned}
 du &= x(t) \left( 1 - \frac{1}{w(s)+1} \right) w'(s) ds \\
 u &= x(t) \int \left( 1 - \frac{1}{w(s)+1} \right) w'(s) ds \\
 &= x(t) \int \left( w'(s) - \frac{w'(s)}{w(s)+1} \right) \\
 &= x(t) (w(s) - \ln(w(s)+1))
 \end{aligned}$$

Então temos que

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t x(t) \left( 1 - \frac{1}{w(s)+1} \right) \frac{w'(s)}{(t-s)^q} ds \\
 &= \left[ \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s)+1)]}{\Gamma(1-q)(t-s)^q} \right]_{t_0}^t - \frac{q}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s)+1)]}{(t-s)^{q+1}} ds \leq 0 \\
 &= \left[ \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s)+1)]}{\Gamma(1-q)(t-s)^q} \right]_{s=t} - \frac{x(t)[w(t_0) - \ln(w(t_0)+1)]}{\Gamma(1-q)(t-t_0)^q} \\
 &\quad - \frac{q}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s)+1)]}{(t-s)^{q+1}} ds \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Vamos analisar a indeterminação  $s = t$  na primeira parcela da Desigualdade (5.24),

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow t} \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s) + 1)]}{\Gamma(1 - q)(t - s)^q} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s) + 1)]}{(t - s)^q} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x(t)w(s) - x(t)\ln(w(s) + 1)}{(t - s)^q} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x(s) - x(t) - x(t)\ln\left(\frac{x(s)}{x(t)}\right)}{(t - s)^q} = \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Como resultou em uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$  podemos aplicar a regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x(s) - x(t) - x(t)\ln\left(\frac{x(s)}{x(t)}\right)}{(t - s)^q} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x'(s) - x(t)\frac{x'(s)}{x(s)}}{q(t - s)^{q-1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1 - q)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{\left(1 - \frac{x(t)}{x(s)}\right)x'(s)(t - s)^{1-q}}{q} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\frac{x(t)[w(t_0) - \ln(w(t_0) + 1)]}{\Gamma(1 - q)(t - t_0)^q} - \frac{q}{\Gamma(1 - q)} \int_{t_0}^t \frac{x(t)[w(s) - \ln(w(s) + 1)]}{(t - s)^{q+1}} ds \leq 0$$

ou equivalentemente,

$$-\frac{x(t_0) - x(t) - x(t)\ln\left(\frac{x(t_0)}{x(t)}\right)}{\Gamma(1 - q)(t - t_0)^q} - \frac{q}{\Gamma(1 - q)} \int_{t_0}^t \frac{x(s) - x(t) - x(t)\ln\left(\frac{x(s)}{x(t)}\right)}{(t - s)^{q+1}} ds \leq 0 \quad (5.25)$$

A Desigualdade (5.25) é claramente verdadeira, portanto conclui-se a demonstração. ■

### 5.2.1 Estabilidade Assintótica Local de $E^0$

**Proposição 5.1** Se  $\mathcal{R}_0 < 1$ , então o ponto de equilíbrio livre doença  $E^0$  é localmente assintoticamente estável.

**Demonstração:** Para provar a estabilidade assintótica local de  $E_0$  em  $\Omega$  para  $R_0 \leq 1$  e consi-

derando que  $S_0^0 = N_h$  e  $V_0^0 = N_v$ , vamos considerar a seguinte função:

$$V(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) = (S_h - S_h^0 - S_h^0 \log \frac{S_h}{S_h^0}) \quad (5.26)$$

$$+ I_v + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left[ (S_v - S_v^0 - S_v^0 \log \frac{S_v}{S_v^0}) + I_v \right] \quad (5.27)$$

Observe que  $V$  é uma função positiva definida, logo pelo Lema 5.2 existem funções  $\alpha$  e  $\beta$  de classe  $K$  tais que

$$\alpha(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|) \leq V(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \leq \beta(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|).$$

Usando os Lemas (5.4) e 5.5) temos que

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^q V(t) &\leq \left(1 - \frac{S_h^0}{S_h}\right) {}_0^C D_t^q S_h + {}_0^C D_t^q I_h \\ &+ \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(1 - \frac{S_v^0}{S_v}\right) {}_0^C D_t^q S_v + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} {}_0^C D_t^q I_v \\ &= \left(1 - \frac{S_h^0}{S_h}\right) \left(\mu_h N_h - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v - \mu_h S_h\right) + \left(\frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v - (\mu_h + \gamma) I_h\right) \\ &+ \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(\frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h - \mu_v I_v\right) \\ &+ \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(1 - \frac{S_v^0}{S_v}\right) \left(\mu_v N_v - \frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h - \mu_v S_v\right) \\ &= \left(1 - \frac{S_h^0}{S_h}\right) \mu_h N_h + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(1 - \frac{S_v^0}{S_v}\right) \mu_v N_v - \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v + \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h I_v \\ &+ \frac{\beta_h b}{N_h + m} S_h^0 I_v - (\mu_h + \gamma) I_h - \mu_h S_h + \mu_h S_h^0 - \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(\frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h\right) \\ &+ \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(\frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v^0 I_h\right) + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(\frac{\beta_v b}{N_h + m} S_v I_h\right) \\ &- \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v I_v - \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v S_v + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v S_v^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2 - \frac{S_h}{S_h^0} - \frac{S_h^0}{S_h}\right) \mu_h N_h \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \left(2 - \frac{S_v}{S_v^0} - \frac{S_v^0}{S_v}\right) \mu_v N_v \\
&\quad + \frac{\beta_h b}{N_h + m} N_h I_v - (\mu_h + \gamma) I_h + (\mu_h + \gamma) I_h - \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v I_v \\
&= -\mu_h N_h \frac{(S_h - S_h^0)^2}{S_h^0 S_h} - \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v N_v \frac{(S_v - S_v^0)^2}{S_v^0 S_v} + \\
&\quad + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v I_v \left( \frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h N_v}{\mu_v (N_h + m)^2 (\mu_h + \gamma)} - 1 \right) \\
&= -\mu_h N_h \frac{(S_h - S_h^0)^2}{S_h^0 S_h} - \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v N_v \frac{(S_v - S_v^0)^2}{S_v^0 S_v} \\
&\quad + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v I_v (R_0 - 1) \\
&= -W_3(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \leq 0,
\end{aligned}$$

em que

$$W_3(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) = \mu_h N_h \frac{(S_h - S_h^0)^2}{S_h^0 S_h} + \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v N_v \frac{(S_v - S_v^0)^2}{S_v^0 S_v} \quad (5.28)$$

$$+ \frac{(N_h + m)(\mu_h + \gamma)}{\beta_v b N_v} \mu_v I_v (1 - R_0). \quad (5.29)$$

Pela Equação (5.28) e pelo Lema 5.2 sabemos que existe uma função  $\gamma$  tal que que

$$\gamma(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|) \geq W_3(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v).$$

Logo,

$${}^C D_t^q V(t) \leq -\gamma(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|).$$

Pelo Teorema 5.1 provamos que  $E^0$  é assintoticamente estável em  $\Omega$ , ou seja, se a hipótese de  $\mathcal{R}_0 < 1$  for satisfeita e quando  $t \rightarrow \infty$ , então as soluções do sistema convergem para o ponto de equilíbrio livre da doença  $E_0$  em uma vizinhança. ■

O teorema que trata da desigualdade entre média geométrica e média aritmética (LIMA, 2010) será importante para verificarmos que as funções utilizadas no próximo teorema são positivas definidas.

### 5.2.2 Estabilidade Assintótica Local de $E^*$

**Teorema 5.3 (Desigualdade de Médias)** Se  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  é um conjunto não vazio de números reais positivos, então

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

**Proposição 5.2** Se  $R_0 > 1$ , então o ponto de equilíbrio endêmico  $E^*$  é localmente assintoticamente estável.

**Demonstração:** Para provar a estabilidade assintótica local de  $E_*$  em  $\Omega$  para  $R_0 \geq 1$ , vamos construir a seguinte função:

$$\begin{aligned} L(S_h, I_h, S_v, I_v) = & c_1 \left( S_h - S_h^* - S_h^* \log \frac{S_h}{S_h^*} \right) + c_2 \left( I_h - I_h^* - I_h^* \log \frac{I_h}{I_h^*} \right) \\ & + c_3 \left( S_v - S_v^* - S_v^* \log \frac{S_v}{S_v^*} \right) + c_4 \left( I_v - I_v^* - I_v^* \log \frac{I_v}{I_v^*} \right) \end{aligned}$$

com as seguintes substituições:

$$\theta = \frac{\beta_h b}{N_h + m}, \quad \beta = \frac{\beta_v b}{N_h + m}, \quad c_1 = c_3 = \beta S_v^* I_h^*, \quad c_2 = c_4 = \theta S_h^* I_v^*$$

Por outro lado,  $L$  é uma função positiva definida, logo pelo Lema 5.2 existem funções  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  de classe  $K$  tais

$$\alpha_1(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|) \leq L(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \leq \alpha_2(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|).$$

Usando o Lema 5.5 temos que

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^q L(t) \leq & \beta S_v^* I_h^* \left( 1 - \frac{S_h^*}{S_h} \right) {}_0^C D_t^q S_h + \beta S_v^* I_h^* \left( 1 - \frac{I_h^*}{I_h} \right) {}_0^C D_t^q I_h \\ & + \theta S_h^* I_v^* \left( 1 - \frac{S_v^*}{S_v} \right) {}_0^C D_t^q S_v + \theta S_h^* I_v^* \left( 1 - \frac{I_v^*}{I_v} \right) {}_0^C D_t^q I_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{S_h^*}{S_h}\right) [\mu_h N_h - \theta S_h I_v - \mu_h S_h] \\
&\quad + \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) [\theta S_h I_v - (\gamma + \mu_h) I_h] \\
&\quad + \theta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{S_v^*}{S_v}\right) [\mu_v N_v - \beta S_v I_h - \mu_v S_v] \\
&\quad + \theta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) [\beta S_v I_h - \mu_v I_v]
\end{aligned}$$

da equação 5.11 no equilíbrio endêmico, temos que

$$\begin{aligned}
\mu_h N_h &= \theta S_h^* I_v^* + \mu_h S_h^* \\
\mu_v N_v &= \beta S_v^* I_h^* + \mu_v S_v^* \\
(\gamma + \mu_h) &= \theta \frac{S_h^* I_v^*}{I_h^*} \\
\mu_v &= \beta \frac{S_v^* I_h^*}{I_v^*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_0^C D_t^q L \leq \\
& \leq \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{S_h^*}{S_h}\right) [\theta S_h^* I_v^* + \mu_h S_h^* - \theta S_h I_v - \mu_h S_h] \\
& \quad + \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) \left[\theta S_h I_v - \theta S_h^* I_v^* \frac{I_h}{I_h^*}\right] \\
& \quad + \theta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{S_v^*}{S_v}\right) [\beta S_v^* I_h^* + \mu_v S_v^* - \beta S_v I_h - \mu_v S_v] \\
& \quad + \theta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) \left[\beta S_v I_h - \beta S_v^* I_h^* \frac{I_v}{I_v^*}\right] \\
& = \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{S_h^*}{S_h}\right) [\theta S_h^* I_v^* - \theta S_h I_v - \mu_h (S_h - S_h^*)] \\
& \quad + \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) \left[\theta S_h I_v - \theta S_h^* I_v^* \frac{I_h}{I_h^*}\right] \\
& \quad + \theta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{S_v^*}{S_v}\right) [\beta S_v^* I_h^* - \beta S_v I_h - \mu_v (S_v - S_v^*)] \\
& \quad + \theta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) \left[\beta S_v I_h - \beta S_v^* I_h^* \frac{I_v}{I_v^*}\right] \\
& = -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} + \theta \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{S_h^*}{S_h}\right) (S_h^* I_v^* - S_h I_v) \\
& \quad + \theta \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) \left[S_h I_v - S_h^* I_v^* \frac{I_h}{I_h^*}\right] - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
& \quad + \theta \beta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{S_v^*}{S_v}\right) (S_v^* I_h^* - S_v I_h) + \theta \beta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) \left[S_v I_h - S_v^* I_h^* \frac{I_v}{I_v^*}\right] \\
& = -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} + \theta \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{S_h^*}{S_h}\right) (S_h^* I_v^* - S_h I_v) \\
& \quad + \theta \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) S_h I_v - \theta \beta S_v^* I_h^* \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) S_h^* I_v^* \frac{I_h}{I_h^*} + \theta \beta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{S_v^*}{S_v}\right) (S_v^* I_h^* - S_v I_h) \\
& \quad + \theta \beta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) S_v I_h - \theta \beta S_h^* I_v^* \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) S_v^* I_h^* \frac{I_v}{I_v^*} \\
& = -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
& \quad - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[-1 + \frac{S_h^*}{S_h} + \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) \frac{I_h}{I_h^*} - 1 + \frac{S_v^*}{S_v} + \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) \frac{I_v}{I_v^*}\right] \\
& \quad - \theta \beta S_v^* I_h^* \left[\left(1 - \frac{S_h^*}{S_h}\right) S_h I_v - \left(1 - \frac{I_h^*}{I_h}\right) S_h I_v\right] \\
& \quad - \theta \beta S_h^* I_v^* \left[\left(1 - \frac{S_v^*}{S_v}\right) S_v I_h - \left(1 - \frac{I_v^*}{I_v}\right) S_v I_h\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
&\quad - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ -1 + \frac{S_h^*}{S_h} + \frac{I_h}{I_h^*} - 1 - 1 + \frac{S_v^*}{S_v} + \frac{I_v}{I_v^*} - 1 \right] \\
&\quad - \theta \beta S_v^* I_h^* \left[ S_h I_v - S_h^* I_v - S_h I_v + \frac{I_h^* S_h I_v}{I_h} \right] \\
&\quad - \theta \beta S_h^* I_v^* \left[ S_v I_h - S_v^* I_h - S_v I_h + \frac{I_v^* S_v I_h}{I_v} \right] \\
&= -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
&\quad - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ \frac{S_h^*}{S_h} + \frac{I_h}{I_h^*} + \frac{S_v^*}{S_v} + \frac{I_v}{I_v^*} - 4 \right] \\
&\quad - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ -\frac{S_h^* I_v}{S_h^* I_v^*} + \frac{I_h^* S_h I_v}{I_h S_h^* I_v^*} \right] - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ -\frac{S_v^* I_h}{S_v^* I_h^*} + \frac{I_v^* S_v I_h}{I_v S_v^* I_h^*} \right] \\
&\leq -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
&\quad - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ \frac{S_h^*}{S_h} + \frac{I_h}{I_h^*} - \frac{I_h}{I_h^*} + \frac{S_v^*}{S_v} - \frac{I_v^*}{I_v} + \frac{I_v}{I_v^*} - 4 + \frac{I_h^* S_h I_v}{I_h S_h^* I_v^*} + \frac{I_v^* S_v I_h}{I_v S_v^* I_h^*} \right] \\
&= -\mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} - \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
&\quad - \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ \frac{S_h^*}{S_h} + \frac{S_v^*}{S_v} + \frac{I_h^* S_h I_v}{I_h S_h^* I_v^*} + \frac{I_v^* S_v I_h}{I_v S_v^* I_h^*} - 4 \right] \\
&= -W_3(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \leq 0,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
W_3(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) &= \mu_h \beta S_v^* I_h^* \frac{(S_h - S_h^*)^2}{S_h} + \mu_v \theta S_h^* I_v^* \frac{(S_v - S_v^*)^2}{S_v} \\
&\quad + \theta \beta S_v^* I_h^* S_h^* I_v^* \left[ \frac{S_h^*}{S_h} + \frac{S_v^*}{S_v} + \frac{I_h^* S_h I_v}{I_h S_h^* I_v^*} + \frac{I_v^* S_v I_h}{I_v S_v^* I_h^*} - 4 \right]
\end{aligned} \tag{5.30}$$

é uma função positiva definida. Além disso, o segundo produto da última parcela da Equação (5.30) é positivo pelo Teorema 5.3, pois a média aritmética é maior que a média geométrica. Logo, da Equação (5.30) e pelo Lema 5.2 temos que existe uma função  $\alpha_3$  de classe  $K$  tal que,

$$\alpha_3(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|) \geq W_3(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v).$$

Portanto,

$${}_0^C D_t^q L(t) \leq -\alpha_3(\|(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)\|).$$

Pelo Teorema 5.1 provamos que  $E^*$  é localmente assintoticamente estável em  $\Omega$ , ou seja, se a hipótese de  $\mathcal{R}_0 > 1$  for satisfeita e quando  $t \rightarrow \infty$ , então as soluções do sistema convergem para o ponto de equilíbrio endêmico  $E_*$  em uma vizinhança. ■

## 6 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção apresentamos uma simplificação do Sistema (5.11) para facilitar no processo de simulação numérica. No trabalho de Santos, (2014) é considerado o mesmo processo de modelagem, entretanto, o nascimento de vetores é posto uma taxa de recrutamento.

É possível obtermos um outro Sistema de Equações Diferenciais simplificado equivalente ao Sistema (2.5). Fazendo as substituições  $\bar{R}_h = 1 - \bar{S}_h - \bar{I}_h$  e  $\bar{S}_v = 1 - \bar{I}_v$  e considerando as populações relativas reduziremos o sistema para três equações diferenciais fracionárias não lineares em termos das variáveis populacionais relativas.

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^q \bar{S}_h &= \mu_h(1 - \bar{S}_h) - \frac{\beta_h b N_v}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v, \\ {}_0^C D_t^q \bar{I}_h &= \frac{\beta_h b N_v}{N_h + m} \bar{S}_h \bar{I}_v - (\mu_h + \gamma) \bar{I}_h \quad e \\ {}_0^C D_t^q \bar{I}_v &= \frac{\beta_v b N_h}{N_h + m} (1 - \bar{I}_v) \bar{I}_h - \mu_v \bar{I}_v. \end{cases} \quad (6.1)$$

A Razão de Reprodução Básica para o novo Sistema de Equações Diferenciais Fracionárias (6.1), que foi utilizado para o cálculo dos pontos de equilíbrio, é dada por

$$\mathcal{R}_0 = \sqrt{\frac{b^2 \beta_h \beta_v N_h N_v}{(N_h + m)^2 \mu_v (\mu_h + \gamma)}}$$

Os pontos de equilíbrio do Sistema 6.1 livre da doença e endêmico são, respectivamente:

$$E^1 = (\bar{S}_h^{(1)}, \bar{I}_h^{(1)}, \bar{I}_v^{(1)}) = (1, 0, 0) \text{ e endêmico: } E^2 = (\bar{S}_h^{(2)}, \bar{I}_h^{(2)}, \bar{I}_v^{(2)}) \text{ com}$$

$$\bar{S}_h^{(2)} = \frac{\phi + M}{\phi + M \mathcal{R}_0^2}, \quad \bar{I}_h^{(2)} = \frac{\mathcal{R}_0^2 - 1}{\phi + M \mathcal{R}_0^2}, \quad \bar{I}_v^{(2)} = \frac{\phi(\mathcal{R}_0^2 - 1)}{\mathcal{R}_0^2(\phi + M)}.$$

em que

$$\phi = \frac{b \beta_v N_h}{\mu_v (N_h + m)}, \quad M = \frac{\gamma + \mu_h}{\mu_h}.$$

**Teorema 6.1** Seja  $(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v)$  uma solução do Sistema de Equações Diferenciais Fracionárias 6.1 com condição inicial  $(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) \in \mathbb{R}_+^3$  e o conjunto compacto

$$\bar{\Omega} = \{(\bar{S}_h, \bar{I}_h, \bar{I}_v) \in \mathbb{R}_+^3 : 0 \leq \bar{S}_h + \bar{I}_h \leq 1, 0 \leq \bar{I}_v \leq 1\}.$$

Então,  $\bar{\Omega}$  é um conjunto positivamente invariante e qualquer solução iniciando-se em  $\bar{\Omega}$  é globalmente definida e única.

**Demonstração:** A prova deste resultado é uma consequência direta e imediata do Teorema 5.2.

**Observação 6.1** O fato do conjunto  $\bar{\Omega}$  ser um conjunto positivamente invariante para o Sistema de Equações Diferenciais Fracionárias 6.1 garante que  $\Omega$  seja também um conjunto positivamente invariante para o sistema 5.11 devido às restrições impostas nas equações, sendo assim, o Teorema 5.2 é válido.

Para verificar a validade dos resultados obtidos, foram realizadas simulações numéricas em relação ao ponto de equilíbrio livre da doença  $E^1$  e endêmico  $E^2$  do Sistema de Equações Diferenciais Fracionárias para a Dengue. Na tentativa de investigar a estabilidade global das soluções do sistema 6.1 foram utilizados as ordens fracionárias e ordinárias, 0,9 e 1, respectivamente, e quatro valores iniciais que tornam o modelo bem definido:

- a)  $a : (\bar{S}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_v(0)) = (0,16; 0,10; 0,20);$
- b)  $b : (\bar{S}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_v(0)) = (3,92 \times 10^{-2}; 1,73 \times 10^{-9}; 3,83 \times 10^{-9});$
- c)  $c : (\bar{S}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_v(0)) = (0,40; 0,60; 0,40);$
- d)  $d : (\bar{S}_h(0), \bar{I}_h(0), \bar{I}_v(0)) = (0,90; 0,10; 0,10).$

## 6.1 PONTO DE EQUILÍBRIO LIVRE DA DOENÇA $E^1$

Para o quadro simulado foram utilizados os valores para os parâmetros apresentados na Tabela 1.

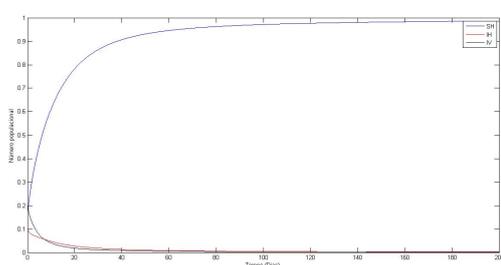
O efeito do valor do expoente fracionário  $q$  foi simulado para um tempo de  $t = 200$  dias. O valor para a ordem fracionária  $q$  foi 0,9. O ponto de equilíbrio livre da doença é  $E^1 = (\bar{S}_h^{(1)}, \bar{I}_h^{(1)}, \bar{I}_v^{(1)}) = (1,0,0)$ . De acordo com os valores da tabela 1 o valor de  $\mathcal{R}_0 < 1$  é  $\mathcal{R}_0 = 0,664$ .

É possível perceber que as soluções simuladas do modelo fracionário convergem para o ponto de equilíbrio livre da doença  $E^1$  independente dos quatro valores considerados para a condição inicial, podendo considerar estabilidade global sob o ponto de vista numérico.

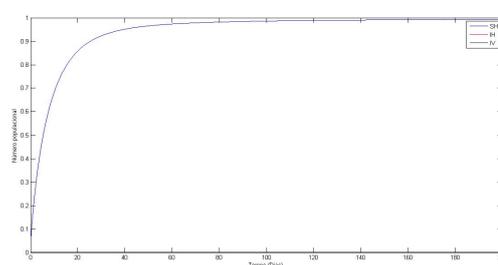
Tabela 1 – Valores para os parâmetros do o sistema de ordem fracionária da Dengue.

Parâmetro	Valor
$\mu_h$	$1,44 \times 10^{-1}$
$\mu_v$	0,28
$N_h$	225.530
$N_v$	$2,86 \times 10^6$
$\beta_h$	0,075
$\beta_v$	0,1
$\gamma$	$34,28 \times 10^{-2}$
$m$	1.200
$b$	0,8

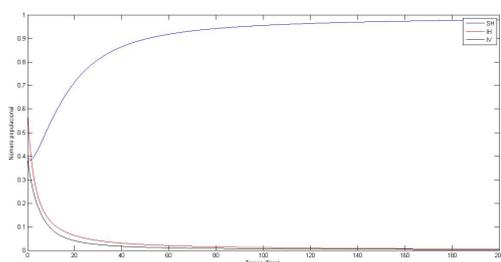
Fonte: Adaptado dos valores disponíveis em Santos, (2014).

Figura 5 – Dinâmica com o valor inicial  $a$ .

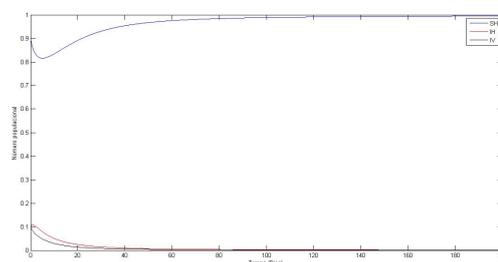
Fonte: Do autor.

Figura 6 – Dinâmica com o valor inicial  $b$ .

Fonte: Do autor.

Figura 7 – Dinâmica com o valor inicial  $c$ .

Fonte: Do autor.

Figura 8 – Dinâmica com o valor inicial  $d$ .

Fonte: Do autor.

## 6.2 PONTO DE EQUILÍBRIO ENDÊMICO $E^2$

Para o quadro simulado foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros apresentados na Tabela 2.

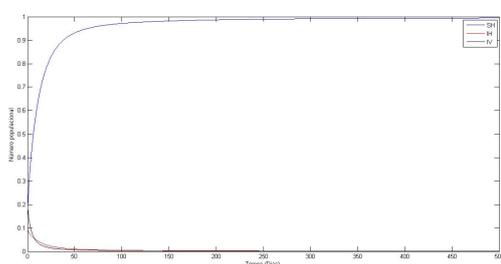
Do mesmo modo, como na análise numérica do ponto de equilíbrio livre da doença, será verificado o efeito do valor do expoente fracionário  $q$  foi simulado para um tempo de  $t = 3000$  dias. O valor para a ordem fracionária  $q$  foi 0,9. O ponto de equilíbrio endêmico é  $E^2 = (\bar{S}_h^{(2)}, \bar{I}_h^{(2)}, \bar{I}_v^{(2)}) = (0,019; 0,00059; 0,0017)$ . De acordo com a Tabela 2 o valor de  $\mathcal{R}_0 > 1$  é  $\mathcal{R}_0 = 7,18$ .

Observamos que na Figura 9 para  $t = 1000$  dias e a ordem da derivada fracionária

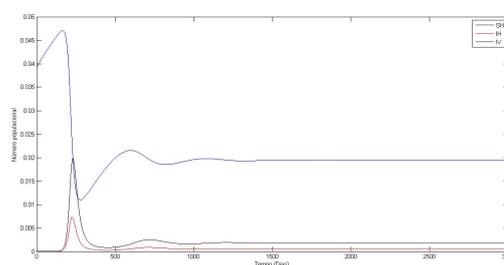
Tabela 2 – Valores para os parâmetros do o sistema de ordem fracionária da Dengue.

Parâmetro	Valor
$\mu_h$	$8,57 \times 10^{-5}$
$\mu_v$	0,25
$N_h$	64.580
$N_v$	296.000
$\beta_h$	0,75
$\beta_v$	1
$\gamma$	$14,28 \times 10^{-2}$
$m$	6.000
$b$	0,8

Fonte: Santos, (2014).

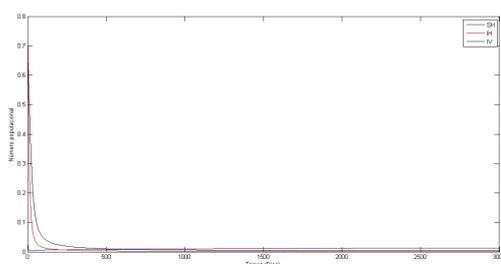
Figura 9 – Dinâmica com o valor inicial  $a$ .

Fonte: Do autor.

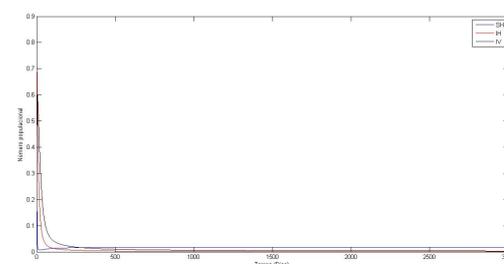
Figura 10 – Dinâmica com o valor inicial  $b$ .

Fonte: Do autor.

$q = 0,5$  a solução já apresenta convergência. Já na Figura 10 podemos ver que a solução converge para o ponto de equilíbrio endêmico.

Figura 11 – Dinâmica com o valor inicial  $c$ .

Fonte: Do autor.

Figura 12 – Dinâmica com o valor inicial  $d$ .

Fonte: Do autor.

Nas Figuras 11 e 12 foi simulado o que ocorre com as soluções para  $t = 3000$  dias e condições iniciais  $b$  e  $c$ , respectivamente. É possível notar que independente do valor inicial, temos que as soluções simuladas convergem para o valor do ponto de equilíbrio endêmico. As oscilações tornam-se mais visíveis de acordo com a escala utilizada quando o valor inicial é relativamente próximo dos valores do ponto de equilíbrio endêmico.

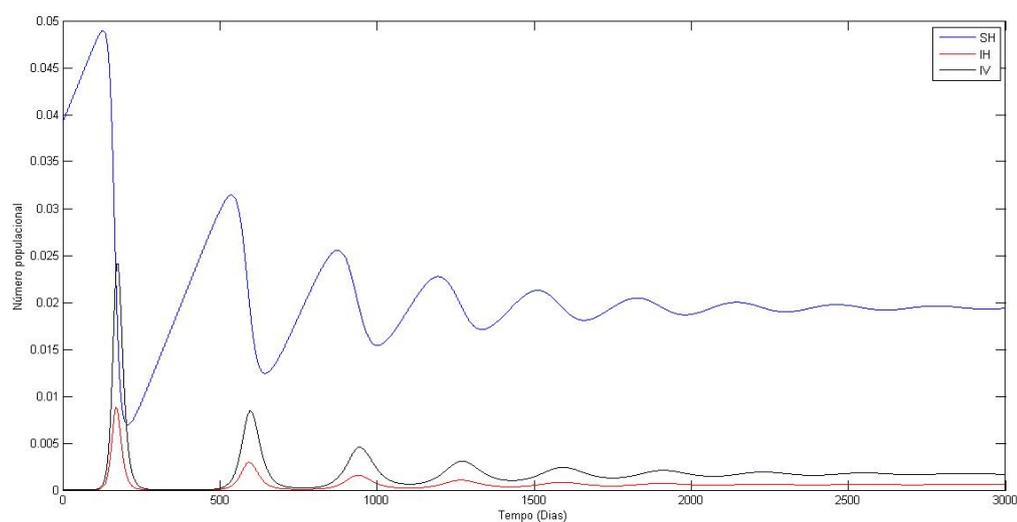


Figura 13 – Dinâmica com o valor inicial  $b$  e ordem da derivada  $q = 1$ .

Fonte: Do autor.

Além disso, é possível perceber na Figura 13 que com o aumento da ordem da derivada fracionária a convergência torna-se mais rápida, porém com maiores oscilações como mostra a Figura 10. Com isso, a variação da ordem possibilita um amortecimento na convergência das soluções do sistema.

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi inicialmente estudado um sistema de equações diferenciais fracionárias para a infecção de Dengue. Para isso, foi necessário estudar a teoria de Cálculo Fracionário, passando por sua origem, resultados mais fundamentais como integrais e derivadas de ordem e até as ferramentas necessárias para desenvolvimento e resoluções de equações de ordem fracionária, como por exemplo, a Transformada de Laplace. Sendo assim, foi necessário o estudo e apresentação da teoria qualitativa de equações diferenciais de ordem não inteira, incluindo a unicidade, existência e prolongamento de soluções para um problema de valor inicial, de maneira a apresentar uma generalização do caso ordinário.

A primeira proposta do trabalho foi apresentar uma nova demonstração dos resultados de prolongamento e existência global de soluções de um problema de valor inicial fracionário a partir das hipóteses de resultados de existência e unicidade. Desse modo, foram obtidas novas provas desses resultados utilizando e adaptando as hipóteses gerais de um trabalho já disponível na literatura.

A segunda proposta foi estudar resultados da Teoria de Estabilidade de Lyapunov para aplicá-los em um sistema de equações diferenciais para a infecção de Dengue, devido à periculosidade desta doença e assim, estudar o que acontece com as soluções deste modelo quando o tempo converge para o infinito. Usando a teoria de comparação e desigualdades diferenciais para sistemas de ordem fracionária, foi possível complementar a prova de um resultado sobre o comportamento assintótico local para pontos de equilíbrio livre da doença de acordo com os valores que podem assumir a razão de reprodução básica  $\mathcal{R}_0$ , que é um valor limite que pode determinar a dinâmica local e global de alguma doença epidemiológica, pois concorda com a Teoria de Epidemiologia Matemática. Com isso, foi provado analiticamente que ambos os pontos de equilíbrio livre da doença e endêmico são localmente assintoticamente estáveis. E por meio de simulações numéricas realizadas escolhendo-se mais de um valor para a condição inicial suspeita-se que a estabilidade das soluções sejam globais, independente de uma vizinhança escolhida do ponto de equilíbrio.

Outro resultado obtido, consiste nas simulações numéricas comprovarem os resultados teóricos de estabilidade assintótica e mostram que velocidade de convergência da solução do sistema de ordem fracionário está diretamente atrelado à ordem da derivada fracionária adotada, ou seja, a medida que se aumenta ou diminui tal ordem, introduz-se um sistema de amortecimento

na velocidade de convergência das soluções em relação aos pontos de equilíbrio.

Como trabalhos futuros, pretende-se adaptar e generalizar os resultados teóricos da Estabilidade de Lyapunov em um contexto global, que é atualmente um problema em aberto. Além de utilizar conjuntos de dados reais e compará-los com soluções simuladas. Portanto, a execução deste trabalho foi fundamental para contribuição na literatura, não apenas para pesquisadores da área de Ciências Exatas, mas também para biólogos, epidemiologistas que tem o interesse de estudar o contexto analítico destas doenças, podendo ser aplicadas a qualquer outra doença que possui transmissão horizontal por meio de vetores, como Zika, Chikungunya, malária, febre amarela, doença de Chagas.

## REFERÊNCIAS

- AGUILA-CAMACHO, Norelys; DUARTE-MERMOUD, Manuel A.; GALLEGOS, Javier A. Lyapunov functions for fractional order systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, [S.l.], v. 19, n. 9, p. 2951-2957, 2014.
- BARREIRA, L., VALLS, C. **Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa**. São Paulo: Livraria da Física, 2012.
- BASSANEZI, R. C **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática** 3 ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- BRAUER, F., NOHEL J. **Qualitative Theory of Differential Equations**. Nova York: **Dover Publications**, 1989.
- BOUCHARA, J. C. et al. **Cálculo Integral Avançado**. São Paulo: EdUsp, 1999.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno** 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- CAMACHO, N. A; MERMOUD, M. A. D.; GALLEGOS, J. A. Lyapunov functions for fractional order systems. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, [S.l.], v. 19, n. 9, p. 2951-2957, 2014.
- CAMARGO, R. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009. 141f. Tese (Doutorado em Matemática.) Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. UNICAMP: Campinas, 2009.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Campinas: Livraria da Física, 2015.
- CAPUTO, M. **Elasticità e dissipazione**, Bologna: Zanichelli, 1969.
- CAPUTO, M. **Lectures on seismology and rheological tectonics**. Univ. degli Studi di Roma: La Sapienza, 1992.
- CHANPIN, L.; YUTIAN, M. Fractional dynamical system and its linearization theorem. **Nonlinear Dynamics**, [S.l.], v. 71, n. 4, p. 621-633, 2013.
- CHEN, W. Time-Space Fabric Underlying Anomalous Diffusion. **Chaos, Solitons and Fractals**, [S.l.], v. 28, n. 4, p.923-929, 2006.
- DEMIRCI, E.; OZALP, N. A method for solving differential equations of fractional order.

**Journal of Computational and Applied Mathematics**, [S.l.], v. 236, n. 11, p. 2754-2762, 2012.

DEROUCICH, M.; BOUTAYEB, A. Dengue fever: Mathematical modelling and computer simulation. **Applied Mathematics and Computation**, [S.l.], v. 177, n. 2, p.528-544, 2006.

DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $R_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations. **Journal of Mathematical Biology**, [S.l.], v. 28, n.4, p. 365-382, 1990.

DIETHELM, K. A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of dengue fever. **Nonlinear Dynamics**, [S.l.], v. 71, n. 4, p. 613-619, 2013.

DIETHELM, K. *The analysis of fractional differential equations*. Nova York: Springer, 2004.

DIETZ H. The estimation of the basic reproduction number for infectious diseases. **Statistical Methods in Medical Research**, [S.l.], v. 2, n. 1, p. 23-41, 1993.

DUMBAR, R. S. **Topics in probability theory and stochastic processes**. Department of Mathematics. University of Nebraska, 2009.

ESTEVA, L.; VARGAS, C. A model for dengue disease with variable human population. **Journal of Mathematical Biology**, [S.l.], v. 38, n. 3, p. 220-240, 1999.

ESTEVA, L.; VARGAS, C. Analysis of a dengue disease transmission model. **Mathematical Biosciences**, [S.l.], v. 150, n. 2, p. 131-151, 1998.

GONZÁLEZ-PARRA, G. C. et al. **Dynamics of model of Toxoplasmosis disease in human and cat populations**. Univ. de Los Andes, Venezuela, 2008.

GORENFLO, R.; MAINARDI, F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order In: Carpinteri, A.; Mainardi, F. **Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics** New York: Springer-Verlag, p.223-276, 1997.

ISEA R., LONNGREN, K. E. On the Mathematical Interpretation of Epidemics by Kermack and McKendrick. **Gen. Math. Notes**, [S.l.], v. 19, n. 2, p. 83-87, 2013.

ISNARD, C. **Introdução à Medida e Integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

KERMACK, W.O.; MCKENDRICK, A.G. A contribution to the mathematical theory of epidemics, **Proc. R. Soc. Lond**, [S.l.], v. 115, n.772, p. 700-721, 1927.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Prentice-Hall, Englewood Cliffts, 1996.

LI, C.; SARWAR, S. Existence and Continuation of solutions for Caputo type fractional differential equations. **Electronic Journal of Differential Equations**, [S.l.], v. 2016, n. 207, p. 1-14, 2016.

- LI, Y.; CHEN, Y.; PODLUBNY, I. Stability of fractional-order nonlinear dynamics systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. **Computers and Mathematics with Applications**, [S.l.], v. 59, n. 5, p. 1810-1821, 2010.
- LIMA, L. E. **Curso de Análise**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2010. v.1.
- LIMA, L. E. **Curso de Análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Projeto Euclides, 2014. v. 2.
- LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. **Initialized fractional calculus**. Hanover: NASA/TP-2000-209943, 2000.
- MACHADO, J. A. T. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. **Fractional Calculus and Applied Analysis**, [S.l.], v. 6, n. 1, p. 73-80, 2003.
- MAOLIN, D., ZAIHUA, W., HAIYAN, H. Measuring memory with the order of fractional derivative. **Scientific Reports**, [S.l.], v. 3, n. 3431, p.1-3, 2013.
- MARTCHEVA, M. **An Introduction to Mathematical Epidemiology**. New York: Springer, 2015.
- MATIGNON, D., **Stability result on fractional differential equations with applications to control processing**. IMACS-SMC, Lille, France, p. 963-968, 1996.
- MCCALLEMAIL, P.J., DAVID W. K. Learning and memory in disease vectors **Trends in Parasitology**, [S.l.], v. 18, n. 10, p. 429-433, 2002.
- MITTAG-LEFFLER, M. G. Sur la nouvelle fonction  $E_{\alpha}(x)$ . **Comptes Rendus Acad. Scientific Paris**. v. 137, p. 554-558, 1903.
- MUNKRES, J. **Topology**. 2 ed. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- PODLUBNY, I. **Fractional differential equations, mathematics on science and engineering**, v. 198. San Diego: Academic Press, 1999.
- PODLUBNY, I. Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integral and Fractional Differentiation, **Fractional Calculus and Applied Analysis**, [S.l.], v. 5, n. 4, p. 367-386, 2002.
- POOSEH, S.; RODRIGUES, H. S.; TORRES, D. F. M. Fractional derivatives in Dengue epidemics. **Classical Analysis and ODEs**, [S.l.], v. 1, n. 8, p. 739-742, 2011.
- SANTOS, D. A.; THIBES, R. Simulações Numéricas de um Modelo de Transmissão de Dengue em Microrregiões do Sudoeste da Bahia (Brasil). **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, [S.l.], v. 15, n. 3, p. 249-259, 2014.
- SARDAR, T. et al. A mathematical model of dengue transmission with memory. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, [S.l.], v. 22, n. 3, p.

511-525, 2014.

SOTOMAIOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro, IMPA - Projeto Euclides, 1979.

SLOTINE, J. J. E.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. Sidney: Printice-Hall, 1991.

TARASOV, V. E. Review of some promising fractional physical models. **International Journal of Modern Physics**, [S.l.], v. 27, n. 9, p. 1330005, 2013.

TEWA, J. J.; DIMI, J. L.; BOWONG S. Lyapunov functions for a dengue disease transmission model. **Chaos, Solitons and Fractals**, [S.l.], v. 39, n. 2, p. 936-941, 2009.

VARGAS-DE-LEÓN, Cruz. Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, [S.l.], v. 24, n. 1, p. 75-85, 2015.

WANG, Z.; YANG, D.; MA, T. Stability analysis for nonlinear fractional-order systems based on comparison principle. *Nonlinear Dynamics*, [S.l.], v. 75, n. 1, p. 387-402, 2014.

ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications**, Vol. 1, Fixed-Point Theorems. 1ª edição. Nova York: Springer-Verlag, 1986.

ZHOU, Y. Existence and Uniqueness of Solutions for a System of Fractional Differential Equations. **Fractional Calculus and Applied Analysis**, [S.l.], v. 12, n. 2, pp.195-204, 2009.